**FIMFA: Partiel du mercredi 21 mars 2012, Analyse complexe, durée 2h.**

**Les notes de cours ou les calculatrices ne sont pas autorisées.**

**Question de cours.** Rappeler la preuve du résultat suivant: Si $\Phi$ est une fonction holomorphe sur un voisinage d'un triangle orienté $T$ et holomorphe aussi en tout point "intérieur" à $T$, alors l'intégrale de contour $\int_T f(z)dz$ est nulle.

**Questions d'applications assez directes du cours.**

1) Combien de zéros (en comptant les multiplicités éventuelles) les fonctions suivantes ont-elles dans le disque unité ouvert?
a) $f_0(z) = z^{10000} + z^2/2 - 1/4$. b) $f_1(z) = z^7 - 6z^5 + 2$. c) $f_2(z) = e^z - 5z^3 + 2$.

2) Soit $f$ une fonction holomorphe sur $\mathbb{C}$ telle qu'il existe $M > 0$ et un entier $n \geq 1$ de sorte que pour tout $z \in \mathbb{C}$ avec $|z| \geq M$, on a $|f(z)| \leq M|z|^n$. Que peut-on dire de la dérivée $n$-ième de $f$ en 0? Montrer que $f$ est un polynôme de degré au plus $n$.

**Exercice (singularités éliminables ou pas...).**
On note $\Omega = \mathbb{U} \setminus \{0\} = \{z \in \mathbb{C} \ : \ 0 < |z| < 1\}$.

1) On suppose que $F$ est une fonction holomorphe et bornée sur $\Omega$ (il existe $M > 0$, tel que $|F(z)| \leq M$ pour tout $z \in \Omega$).
a) Montrer que pour tout $\xi$ avec $|\xi| \in (0, 1/2)$,

$$\int_\gamma \frac{F(z)dz}{z - \xi} = 2i\pi F(\xi),$$

où $\gamma$ désigne le cercle de rayon $3/4$ centré en l'origine et orienté dans le sens trigonométrique direct.
b) Montrer qu'il est possible de prolonger $F$ par continuité en 0. Montrer que ce prolongement est alors holomorphe sur $\mathbb{U}$.

2) On suppose que $H$ est une fonction holomorphe sur $\Omega$ telle que $|H(z)| \to \infty$ lorsque $z \to 0$. Montrer qu'alors, il existe un entier $n > 0$, tel que $H(z) = z^{-n}\tilde{H}(z)$, où $\tilde{H}$ est une fonction holomorphe sur $\mathbb{U}$.

3) Soit $J$ une fonction holomorphe sur $\Omega$ mais qui ne vérifie ni la condition de la première question, ni celle de la deuxième. Ainsi, il existe $M > 0$ et deux suites $z_n$ et $z'_n$ qui tendent vers 0 dans $\Omega$, avec $\lim_{n\to\infty} |J(z_n)| = \infty$ et $|J(z'_n)| \leq M$ pour tout $n$. Montrer qu'alors, pour tout $a \in \mathbb{C}$, il existe une suite $z''_n$ qui tend vers 0 dans $\Omega$ telle que $\lim_{n\to\infty} J(z''_n) = a$ (Indication: On pourra raisonner par l'absurde et étudier la fonction $z \mapsto 1/(J(z) - a)$ au voisinage de 0).

**Exercice (Noyau de Bergman).**
Lorsque $g$ une fonction (à valeurs dans $\mathbb{C}$) continue bornée sur le disque unité $\mathbb{U}$. On définit alors la fonction $Tg$ par

$$Tg(\xi) = \frac{1}{\pi} \int\int_{x^2+y^2<1} \frac{g(z)dxdy}{(1 - \xi\bar{z})^2}$$

pour tout $\xi \in \mathbb{U}$ (où l'intégrale en $dxdy$ est une intégrale double habituelle sur le disque unité, et on note $z = x + iy$).

1) On suppose que $f$ est une fonction holomorphe dans le disque unité $\mathbb{U}$, telle qu'il existe $M > 0$ avec $|f(z)| < M$ pour tout $z \in \mathbb{U}$. Pour tout $z \in \mathbb{U}$, on définit $F(z) = zf(z)$. On fixe $\xi \in \mathbb{U}$.

a) On note $\gamma_\rho$ le cercle de rayon $\rho$ centré en l'origine, orienté dans le sens trigonométrique direct. Justifier le fait que pour tout $\rho < 1$,

$$\int_{\gamma_\rho} \frac{F(z)dz}{(z-\rho^2\xi)^2} = 2i\pi F'(\rho^2\xi).$$

b) En déduire la valeur de

$$\int_0^1 \rho d\rho \int_{\gamma_\rho} \frac{F(z)dz}{(z-\rho^2\xi)^2}.$$

c) En conclure que $Tf = f$.

2) Soit $g$ une fonction (à valeurs dans $\mathbb{C}$) continue bornée sur le disque unité $\mathbb{U}$. Montrer que $Tg$ est holomorphe. En déduire que lorsque $Tg$ est bornée, alors $T(Tg) = Tg$.

**Question pour réfléchir.**

*Remarque: Cette question sera sous-notée et hors-barême; à n'aborder donc que si toutes les autres questions ont été traitées (ou essayées).*

On suppose que $r_1 > r_2 > 1$. Montrer qu'il n'existe pas de bijection holomorphe entre $A_{r_1} = \{z \ : \ 1 < |z| < r_1\}$ et $A_{r_2} = \{z \ : \ 1 < |z| < r_2\}$.