FIMFA 2011/2012
Vendredi 1er juin 2012

ANALYSE FONCTIONNELLE
DURÉE 3 HEURES – DOCUMENTS NON AUTORISÉS

1. Régularisation de Tikhonov et inverse de Moore-Penrose

On considère H un espace de Hilbert réel séparable de dimension infinie et $A \in \mathcal{L}(H)$ un opérateur linéaire compact sur H. Une famille $(R_\alpha)_{\alpha>0} \subset \mathcal{L}(H)$ est dite régularisante pour A si

$$\forall x \in H, \quad \lim_{\alpha \to 0} R_\alpha A x = x\,.$$

(1) Montrer que $(R_\alpha A)_{\alpha>0}$ ne converge pas dans $\mathcal{L}(H)$ lorsque $\alpha \to 0$ (on pourra utiliser le fait que l'espace $\mathcal{K}(H)$ des opérateurs linéaires compacts est fermé dans $\mathcal{L}(H)$). En dénduire que $(R_\alpha)_{\alpha>0}$ ne converge pas dans $\mathcal{L}(H)$

On suppose que A est injectif et auto-adjoint.

(2) Montrer que la famille (R_α) définie par $R_\alpha = (\alpha I + A^*A)^{-1}A^*$ est régularisante pour A.

On suppose maintenant uniquement que A est injectif.

(3) Montrer que, pour $\alpha > 0$, $(\alpha I + A^*A)$ est inversible.

(4) Soit $x \in H$. On pose $x_\alpha = (\alpha I + A^*A)^{-1}A^*Ax$. Montrer que $(|x_\alpha|)_\alpha$ est croissante et que $|x_\alpha| \le |x|$.

(5) Montrer que $(|x_\alpha|)_\alpha$ converge vers $|x|$, puis que (x_α) converge vers x. En déduire que la famille (R_α) définie par $R_\alpha = (\alpha I + A^*A)^{-1}A^*$ est régularisante pour A.

(6) On définit la fonctionnelle J_α par

$$J_\alpha(y) = \frac{\alpha}{2}|y|^2 + \frac{1}{2}|Ay - Ax|^2.$$

Montrer que x_α est l'unique solution du problème d'optimisation

$$J_\alpha(x_\alpha) = \min_{y \in H} J_\alpha(y)\,.$$

On ne fait plus l'hypothèse que A est injectif.

(7) Soit $f \in R(A)$. Montrer que $((\alpha I + A^*A)^{-1}A^*f)$ converge vers une limite $\bar{x}$ unique telle que $A\bar{x} = f$. L'application $f \in R(A) \mapsto \bar{x}$ est appelée l'inverse de Moore-Penrose de A.

2. Lemmes de moyenne et hypoellipticité

Les équations de transport sont des équations hyperboliques, qui propagent les singularités (contrairement aux équations paraboliques qui ont un effet régularisant instantanné). Néanmoins, pour les équations de transport cinétiques, on peut montrer un effet régularisant des moyennes en vitesses. On va s'intéresser ici aux propriétés de l'opérateur de transport libre $v \cdot \nabla_x$ stationnaire.

Plus précisément, on considère l'équation

$$(*) \qquad f + v \cdot \nabla_x f = g \in L^2(\mathbf{R}^d_x \times \mathbf{R}^d_v)\,.$$

(1) Montrer que f et $v \cdot \nabla_x f$ appartiennent à $L^2(\mathbf{R}^d_x \times \mathbf{R}^d_v)$. On pourra exprimer f en fonction de g en utilisant les caractéristiques du transport.

(2) En considérant la suite (g_n) définie par $g_n(x) = n^{d/2}\chi(nx)\psi(v)$ où $\chi, \psi \in C_c^\infty(\mathbf{R}^d, \mathbf{R}^+)$, montrer qu'on n'a pas de compacité forte sur la suite des solutions (f_n). L'équation $(*)$ n'a donc pas d'effet régularisant.

(3) Soit $\varphi \in C_c(\mathbf{R}_v^d)$ une fonction test. En utilisant la transformation de Fourier partielle par rapport à la variable spatiale, montrer que la moyenne ρ, définie par $\rho(x) = \int \varphi(v) f(x,v)dv$, appartient à $H^{1/2}(\mathbf{R}^d)$

$$\int |\xi||\mathcal{F}_x\rho(\xi)|^2 d\xi \leq C\|g\|^2_{L^2(\mathbf{R}^d\times\mathbf{R}^d)}$$

où la constante C dépend uniquement de la norme L^∞ et du support de φ. On pourra introduire une partition de l'espace des vitesses en fonction de $|\xi \cdot v|$, utiliser la borne L^2 sur $\mathcal{F}_x(v \cdot \nabla_x f)$ là où $|v \cdot \xi| \geq \alpha$, et la borne L^2 sur $\mathcal{F}_x f$ là où $|v \cdot \xi| < \alpha$.

On considère maintenant l'équation

$$(**) \qquad f + v \cdot \nabla_x f - \Delta_v f = g \in L^2(\mathbf{R}_x^d \times \mathbf{R}_v^d)\,.$$

Dans toute la suite, on notera $\mathcal{F}f \equiv \mathcal{F}f(\xi, \eta)$ la transformée de Fourier de f.

(4) Montrer que f appartient à $L^2(\mathbf{R}_x^d, H^1(\mathbf{R}_v^d))$.

(5) On veut en déduire de la régularité spatiale sur f. Pour cela, on va utiliser une décomposition de l'espace de Fourier. Plus précisément, on définit

$$f_1 = \mathcal{F}^{-1}\left(\mathbf{1}_{|\eta|\geq|\xi|^{1/3}}\mathcal{F}f\right) \text{ et } f_2 = f - f_1\,.$$

Montrer que f_1 appartient à $H^{1/3}(\mathbf{R}_x^d, L^2(\mathbf{R}_v^d))$.

(6) En utilisant l'équation $(**)$, montrer qu'il existe une fonction $\varphi \in L^2(\mathbf{R}_x^d, H^{-1}(\mathbf{R}_v^d))$ telle que pour tout paramètre d'interpolation $t > 0$, on a

$$\begin{aligned}\mathbf{1}_{|\xi|\geq 1}\mathbf{1}_{|\eta|\leq|\xi|^{1/3}}\mathcal{F}f(\xi,\eta) =& \mathbf{1}_{|\xi|\geq 1}\mathbf{1}_{|\eta|\leq|\xi|^{1/3}}\mathcal{F}f(\xi, \eta - t\xi)\\ &+ t\mathbf{1}_{|\xi|\geq 1}\mathbf{1}_{|\eta|\leq|\xi|^{1/3}}\int_0^1 \mathcal{F}\varphi(\xi, \eta - st\xi)ds\,.\end{aligned}$$

En choisissant $t = 2|\xi|^{-2/3}$, montrer que sur le support de $\mathbf{1}_{|\xi|\geq 1}\mathbf{1}_{|\eta|\leq|\xi|^{1/3}}$, on a

$$|\eta - t\xi| \geq |\xi|^{1/3} \text{ et } |\eta - st\xi| \leq 3|\xi|^{1/3}\,.$$

En déduire que $f_2 \in H^{1/3}(\mathbf{R}_x^d, L^2(\mathbf{R}_v^d))$.

3. Formulation cinétique pour l'équation de Hopf

On introduit une distribution microscopique de particules $f \equiv f(t,x,v)$ qui au temps t ont la position x et la vitesse v. La dynamique est décrite par l'équation cinétique

$$\begin{aligned}\partial_t f_\varepsilon + v\partial_x f_\varepsilon &= \frac{1}{\varepsilon}(\chi_{f_\varepsilon} - f_\varepsilon)\\ f_{\varepsilon|t=0} &= f_0 \in L^1(\mathbf{R}\times\mathbf{R})\end{aligned}$$

Ici et dans toute la suite, pour toute fonction $f \equiv f(t,x,v)$, on note χ_f la fonction définie par

$$\begin{cases}\chi_f(t,x,v) = 1 \text{ si } v \leq \int f(t,x,v)dv\\ \chi_f(t,x,v) = 0 \text{ sinon}\end{cases}$$

L'équation cinétique exprime donc une compétition entre le transport libre et un processus de relaxation vers l'équilibre thermodynamique local qui traduit l'effet global des collisions.

Dans la limite $\varepsilon \to 0$, on s'attend à ce que l'équilibre thermodynamique soit atteint presque partout $f_\varepsilon \sim \chi_{f_\varepsilon}$. En utilisant la conservation de la masse, on obtient alors que la masse limite $u = \int f dv$ devrait satisfaire l'équation de Hopf.

On commence par prouver que, pour tout $\varepsilon > 0$ fixé, l'équation cinétique a une unique solution globale.

(1) En utilisant les caractéristiques du transport libre et la formule de Duhamel, montrer que les solutions f_ε de l'équation cinétique sont des points fixes de l'application T définie par

$$Tf(t,x,v) = f_0(x-vt,v)e^{-t/\varepsilon} + \frac{1}{\varepsilon}\int_0^t \chi_f(s,x-v(t-s),v)e^{-(t-s)/\varepsilon}ds\,.$$

(2) Montrer que T est une application bornée et contractante sur $L^\infty([0,\tau],L^1(\mathbf{R}^2))$. En déduire que l'équation cinétique a une unique solution, définie globalement. Montrer de plus que la solution f_ε satisfait le principe du maximum

$$\|f(t)\|_\infty \le e^{-t/\varepsilon}\|f_0\|_\infty + (1-e^{-t/\varepsilon})\,.$$

On se propose dans un second temps de montrer quelques propriétés importantes sur le comportement qualitatif des solutions de l'équation cinétique.

(3) *Propriété de monotonie.* Montrer que si $f_0 \le \tilde{f}_0$, les solutions f et $\tilde{f}$ de l'équation cinétique avec données initiales respectives f_0 et $\tilde{f}_0$ satisfont $f \le \tilde{f}$.

(4) *Vitesse finie de propagation.* On suppose que $f_0 \in L^1 \cap L^\infty(\mathbf{R}\times\mathbf{R})$ est à support compact. Montrer que la solution de l'équation cinétique $f(t)$ est à support compact en v, puis en déduire que $f(t)$ est à support compact.

(5) *Fonctionnelle d'entropie cinétique.* On appelle entropie cinétique une fonctionnelle h telle que, pour toute solution f_ε de l'équation cinétique,

$$\partial_t \int h(f_\varepsilon(t,x,v))dv + \partial_x \int vh(f_\varepsilon(t,x,v))dv \le 0\,.$$

Cette inégalité traduit l'irreversibilité de l'évolution, c'est une formulation du second principe de la thermodynamique. Montrer qu'il existe une telle entropie.

Dans la limite $\varepsilon \to 0$, les bornes uniformes sur (f_ε) assurent qu, à extraction près, on a convergence faible. Pour obtenir l'équation limite, on a besoin néanmoins de convergence forte.

(6) *Régularité spatiale.* Montrer qu'on a l'estimation de propagation

$$\sup_{dx\in\mathbf{R}} \frac{1}{dx}\iint |f_\varepsilon(t,x+dx,v) - f_\varepsilon(t,x,v)|dxdv \le \sup_{dx\in\mathbf{R}} \frac{1}{dx}\iint |f_0(x+dx,v)-f_0(x,v)|dxdv\,.$$

Dans toute la suite, on supposera que f_0 est régulière, disons $f_0 \in C^1_c(\mathbf{R}\times\mathbf{R})$.

(7) *Régularité temporelle.* En utilisant la conservation de la masse, obtenir une borne sur $(\partial_t u_\varepsilon)$. En déduire qu'à extraction près, u_ε converge presque partout.

(8) Soit u la limite de (u_ε). Montrer que u est solution entropique de l'équation de Hopf

$$\partial_t u + \frac{1}{2}\partial_x u^2 = 0\,.$$