n-types d'homotopie

Dimitri Ara

1 Introduction

La théorie de l'homotopie associe à un espace topologique connexe X, une famille de groupes $(\pi_n(X))_{n\geq 1}$ appelés groupes d'homotopie. Plus, précisément, elle construit des foncteurs contravariants de la catégorie des espaces topologiques pointés vers celle de groupes. Ces groupes sont invariants par « déformation » de l'espace. L'homotopie ne permet donc pas de distinguer deux objets équivalents à déformation près.

La catégorie des CW-complexes (qui est une sous-catégorie pleine de la catégorie des espaces topologiques que nous définirons plus loin) se révèle être une bonne catégorie pour travailler en homotopie. Si X et Y sont deux CW-complexes connexes, X se déforme en Y (plus précisément X et Y ont même type d'homotopie) si et seulement s'il existe une application continue $f : X \to Y$ qui induit des isomorphismes sur les groupes d'homotopie. On est ainsi tout naturellement conduit à la notion de « X se n-déforme en Y » en exigeant seulement que f induise des isomorphismes sur les n premiers groupes d'homotopie.

Se pose alors la question de trouver un invariant associé à X qui détermine sa classe de n-déformation. Pour $n = 0$, il est évident (une fois le problème correctement posé) que cet invariant est l'ensemble des composantes connexes de X. Le cas $n = 1$ est nettement plus intéressant : cette fois-ci l'invariant associé est le groupoïde fondamental (qu'on définira plus loin). Pour $n = 2$, on arrive à bricoler une notion de 2-groupoïde fondamental qui convient. Simpson conjecture que pour tout n, on a une notion de n-groupoïde fondamental (qu'il explicite) qui convient. Le problème de la véracité de cette conjecture est ouvert pour $n \geq 3$.

Mais commençons par le début.

2 Introduction à l'homotopie

Dans toute la suite, nous désignerons par I l'intervalle $[0, 1]$.

2.1 Homotopies

Plaçons-nous dans Top la catégorie des espaces topologiques.

Définition 1. *Soient $f : X \to Y$ et $g : X \to Y$. On dit que f et g sont homotopes s'il existe $F : X \times I \to Y$ telle que $f = Fi_0$ et $g = Fi_1$ avec $i_0 : X \to X \times I$ qui envoie x sur $(x, 0)$ et $i_1 : X \to X \times I$ qui envoie x sur $(x, 1)$.*

Définissons $F_t : X \to Y$ par $F_t(x) = F(x, t)$. On a alors $F_0 = f$ et $F_1 = g$. Intuitivement, les F_t sont les déformations successives de f vers g au cours du temps.

On vérifie facilement que l'homotopie est une relation d'équivalence et que la composition des applications passe au quotient.

On obtient ainsi une catégorie Toph dont les objets sont les espaces topologiques et les morphismes les classes d'homotopie d'applications continues. On dit que X et Y ont même type d'homotopie s'ils sont isomorphes dans cette catégorie. Cette définition formalise la notion de « X se déforme en Y » de l'introduction.

La relation « avoir le même type d'homotopie » est strictement plus grossière que la relation d'homéomorphisme. Par exemple, il est facile de voir que l'espace à un élément et $\mathbf{R}^n$ ont même type d'homotopie mais ils ne sont évidemment pas homéomorphes dès que n est strictement supérieur à 0.

2.2 CW-complexes

Les CW-complexes forment une classe d'espaces topologiques fondamentale en topologie algébrique. Leur définition qui peut sembler *ad hoc* est justifiée par de nombreux théorèmes.

Notons S^n la sphère de dimension n et B^n la boule fermée de dimension n.

Définition 2. *Une décomposition cellulaire sur un espace topologique X est la donnée d'une suite croissante de sous-espaces $(X_n)_{n \geq 0}$ et pour chaque n, d'un ensemble α_n indexant une famille d'applications $(\phi_\alpha : S^n \to X^n)_{\alpha \in \alpha_n}$ tels que*

1. *X est la limite inductive des X_n, c'est-à-dire que X est la réunion des X_n et que O inclus dans X est ouvert si et seulement si sa trace sur tout X_n est ouverte ;*
2. *X_0 est discret ;*
3. *pour $n \geq 0$, X_{n+1} s'obtient à partir de X_n en lui collant des n-sphères selon les $(\phi_\alpha)_{\alpha \in \alpha_n}$; plus précisément, X_{n+1} est le quotient de l'espace $X_n \amalg (\amalg_{\alpha \in \alpha_n} B^{n+1}_\alpha)$ obtenu en identifiant x dans B^{n+1}_α et $\phi_\alpha(x)$ dans X pour tout x dans S^{n+1} identifié avec le bord de B^{n+1}.*

Un CW-complexe est un espace topologique muni d'une décomposition cellulaire. On note CW la sous-catégorie pleine des CW-complexes et CWh la catégorie dont les objets sont les CW-complexes et les morphismes les classes d'homotopie d'applications continues.

Si X et Y sont deux CW-complexes, on dit que $f : X \to Y$ est une application cellulaire si pour tout i, $f(X_i) \subset Y_i$. Le premier résultat important sur les CW-complexes est le suivant :

Théorème 1 (Approximation cellulaire)**.** *Soit $f : X \to Y$ une application entre CW-complexes. Alors f est homotope à une application simpliciale.*

Voir [Hat, p. 348] pour une preuve. Les autres propriétés importantes que nous utiliserons des CW-complexes ont pour pré-requis la définition des groupes d'homotopie.

2.3 Groupe et groupoïde fondamental

Soit (X, x_0) un espace topologique pointé. L'invariant algébrique le plus simple qu'on associe à un tel espace est son groupe fondamental $\pi_1(X, x_0)$.

On appelle lacet (de base x_0) toute application continue γ de I vers X telle que $\gamma(0) = \gamma(1) = x_0$. On peut composer deux lacets γ_1 et γ_2 en suivant γ_2 puis γ_1. A priori, on obtient une application de $[0, 2]$ dans X mais on peut la normaliser en une application de I vers X en parcourant γ_1 et γ_2 deux fois plus vite. On voit facilement que cette composition passe au quotient par l'homotopie. On note $\pi_1(X, x_0)$ le monoïde des lacets de base x_0 à homotopie près.

Proposition 1. *Le monoïde $\pi_1(X, x_0)$ est un groupe.*

Démonstration. L'identité est le lacet constant égal à x_0 et l'inverse de γ est γ parcouru dans le sens inverse. Il est facile de vérifier qu'on obtient bien les identités d'un groupe à homotopie près. □

En fait, π_1 est un foncteur contravariant de la catégorie des espaces pointés dans la catégorie des groupes : si $f : (X, x) \to (Y, y)$, à un lacet sur γ sur Y, on peut associer le lacet $f\gamma$ sur X. Il est évident que deux applications homotopes induisent la même application sur les groupes fondamentaux. En particulier, une équivalence d'homotopie induit un isomorphisme de groupes.

Si X est connexe par arcs, le choix du point de base est en fait sans importance si on voit $\pi_1(X, x)$ comme un groupe abstrait. Plus précisément, si x_0 et y_0 sont connectés par un arc γ, on a $\pi_1(X, y_0) = \gamma\pi_1(X, x_0)\gamma^{-1}$. Ainsi, si X est connexe par arcs, on note $\pi_1(X)$ son groupe fondamental.

Si X n'est pas connexe par arcs, le groupe fondamental de X basé en un point x_0 ne dépend que de la composante connexe par arcs de x_0. Pour remédier à cela, on définit le groupoïde fondamental $\Pi(X)$ (un groupoïde est une catégorie dans laquelle toutes les flèches sont inversibles).

Les objets de $\Pi_1(X)$ sont les points de X et si x, y sont deux points de X, les morphismes de x à y sont les classes d'homotopie de chemins d'origine x et de but y. En particulier, $\mathrm{Hom}_{\Pi(X)}(x,x) = \pi(X,x)$.

Intuitivement, le groupe fondamental mesure des propriétés de dimension 1 de l'espace comme par exemple des épointages. Notamment, si X est un CW-complexe connexe par arcs, $\pi_1(X)$ ne dépend que de X_2 (2 et non pas 1 car recoller un disque peut boucher un trou de dimension 1).

Notons que le π_1 (d'un CW-complexe) se calcule relativement facilement. Pour finir sur les π_1, donnons quelques exemples : $\pi_1(\mathbf{R}^n) = 0$, $\pi_1(S^1) = \mathbf{Z}$, $\pi_1(S^n) = 0$ pour $n \geq 2$, $\pi_1(\mathbf{R}^n \backslash \{x_0, ..., x_k\})$ est le groupe libre sur $k+1$ générateurs si $n \geq 2$.

2.4 Groupes d'homotopie supérieurs

Nous allons maintenant définir des analogues en dimension supérieure du groupe fondamental d'un espace pointé (X, x_0)

Fixons un $n \geq 1$ et considérons les analogues des chemins en dimension n à savoir les applications $f : I^n \to X$ qui envoient le bord de I^n sur x_0 (on note $f : (I^n, \partial I^n) \to (X, x_0)$). Si f_1 et f_2 sont deux applications, on peut les composer de la manière suivante :

$$(f_1 f_2)(x) = \begin{cases} f_2(x_1/2, x_2, \ldots, x_n) & \text{si } x_1 \leq 1/2 \\ f_1(1 - x_1/2, x_2, \ldots, x_n) & \text{si } x_1 \geq 1/2. \end{cases}$$

On voit immédiatement que la composition passe au quotient.

Proposition 2. *$\pi_n(X, x_0)$ est un groupe abélien.*

Démonstration. Le fait que $\pi_n(X, x_0)$ est un groupe se démontre aussi facilement que dans le cas $n = 1$. Le fait que ce groupe est abélien est tout aussi évident mais un peu pénible à écrire. Une preuve visuelle est donné dans [Hat, p. 340]. □

On notera donc $f_1 + f_2$ la composition de f_1 et f_2.

Les remarques sur la dépendance du point de base pour $n = 1$ sont encore vraies (voir [Hat, p. 341] pour une explication visuelle). On a également une notion de n-groupoïde fondamental mais elle n'est pas satisfaisante. C'est un problème important de l'homotopie moderne que de trouver la bonne définition du n-groupoïde fondamental. Nous reviendrons à ce sujet plus loin.

Intuitivement, les π_n mesurent des propriétés de dimension n et si X connexe est muni d'une décomposition cellulaire (X_i), $\pi_n(X)$ ne dépend que de X_{n+1} (voir [Hat, p. 351]).

Les π_n sont très difficiles à calculer. Ainsi, on ne connaît pas les groupes d'homotopie supérieurs des sphères. C'est un des grands problèmes de l'homotopie que de les calculer. Une des approches pour mieux connaître ces groupes est l'homotopie stable. Voir [Han, Ch. 6].

2.5 Équivalences d'homotopie faibles

La notion d'équivalence d'homotopie faible est une notion d'homotopie *ad hoc* plus maniable formellement que la notion d'homotopie.

Définition 3. *Soit $f : X \to Y$. On dit que f est une équivalence d'homotopie faible (ou de manière plus courte une équivalence faible) si*

1. *f induit une bijection entre les composantes connexes par*
2. *pour tout $n \geq 1$, pour tout x dans X, $\pi_n(f, x)$ est un isomorphisme de $\pi_n(X, x)$ vers $\pi_n(Y, f(x))$.*

Clairement, une équivalence d'homotopie est une équivalence d'homotopie faible. La réciproque est fausse en général mais est vraie pour les CW-complexes.

Théorème 2 (de Whitehead)**.** *Soit $f : X \to Y$ une équivalence d'homotopie faible entre CW-complexes. Alors f est une équivalence d'homotopie.*

De plus, on a :

Théorème 3 (CW-approximation)**.** *Pour tout espace topologique X, il existe un CW-complexe Y et une équivalence d'homotopie faible de X vers Y.*

Ces deux résultats justifie mutuellement les définitions de CW-complexes et d'équivalences d'homotopie faibles. Voir respectivement [Hat, p. 346] et [Hat, p. 342] pour des preuves.

3 Théorie des catégories

3.1 Localisation de catégories

Soit $\mathcal{C}$ une catégorie et $\mathcal{A}$ un sous-ensemble des flèches de $\mathcal{C}$. La catégorie des foncteurs $F : \mathcal{C} \to \mathcal{C}'$ (où $\mathcal{C}'$ varie) qui envoie les flèches de $\mathcal{A}$ sur des isomorphismes admet un objet initial qu'on note $\mathcal{C}[\mathcal{A}^{-1}]$. La construction de cet objet est totalement formelle (voir [GZ, p. 6]).

3.2 n-catégories

Nous n'allons pas donner de définition précise d'une n-catégorie. Nous dirons seulement qu'une n-catégorie (stricte) est la donnée d'objets, de flèches entre les objets (les 1-flèches), de flèches entre les 1-flèches (les 2-flèches), de flèches entre les 2-flèches, etc. et d'opérations de composition vérifiant certains axiomes naturels mais pénible à expliciter. Parmi ces axiomes, il y a l'existence de i-unités.

Les spécialistes des n-catégories sont d'accord sur le fait que cette définition (rendu précise) n'est pas la bonne. Ils cherchent à définir une notion de n-catégories faibles en imposant des relations entre les i-flèches à isomorphisme près au sens des $(i+1)$-flèches. D'où une dizaine de définitions dans la littérature des n-catégories faibles dépendantes des propriétés que l'on rend faibles.

On a le même problème pour la notion de n-groupoïdes. Un n-groupoïde (strict) est une n-catégorie (stricte) dans laquelle toutes les flèches sont inversibles. Ici, encore, les spécialistes estiment que la définition n'est pas la bonne et une dizaine de définitions cohabite.

On notera n-Groupoid la catégorie des n-groupoïdes.

4 Catégories homotopiques

4.1 Catégorie homotopique

La catégorie homotopique Hot est la catégorie dont les objets sont les CW-complexes et les morphismes les classes d'homotopie d'applications continues. C'est l'objet d'étude par excellence de l'homotopie.

On peut décrire cette catégorie d'une autre manière. Considérons la catégorie Toph. Notons W_∞ l'ensemble des équivalence faibles. Et appelons Hot' la catégorie obtenue à partir de Toph par localisation par W_∞.

Théorème 4. *Le foncteur évident F de* Hot *dans* Hot' *est une équivalence de catégorie.*

Démonstration. Construisons un foncteur quasi-inverse. On commence par construire un foncteur de G de Top dans Hot. Si X est un espace topologique, par le théorème de CW-approximation, on peut lui associer un CW-complexe X' tel qu'il existe une équivalence faible $f : X \to Y$. On peut rendre cette construction fonctorielle et on obtient notre foncteur. Par le théorème de Whitehead, l'image de W_∞ par G est inversible et par propriété universelle de Hot $= \mathrm{Top}[W_\infty^{-1}]$, G se prolonge en G' de Hot$'$ vers Hot. On vérifie que ce foncteur est un quasi-inverse de F. □

4.2 Catégorie des n-types d'homotopie

Notre deuxième description de la catégorie homotopique permet de formuler facilement une définition de la catégorie Hot_n des n-types d'homotopie.

Définition 4. *Soit $f : X \to Y$. On dit que f est une n-équivalence d'homotopie (faible) si*

1. *f induit une bijection entre les composantes connexes par arcs de X et Y ;*
2. *pour tout p entre (au sens large) 1 et n, pour tout x dans X, $\pi_p(f, x)$ est un isomorphisme de $\pi_p(X, x)$ vers $\pi_p(X, f(x))$.*

Notons W_n l'ensemble des n-équivalences. La catégorie des n-types d'homotopie notée Hot_n est la catégorie obtenue par localisation de Top par W_n.

4.3 Description simpliciale

On peut également décrire la catégorie des n-types en termes d'ensembles simpliciaux. L'avantage des ensembles simpliciaux est que leur théorie de l'homotopie est purement combinatoire.

Pour toute cette partie, on pourra se référer aux chapitres 2 et 3 de [GZ] ou aux sections 1.9 et 1.10 de [JT].

4.3.1 Objets simpliciaux

On définit la catégorie simpliciale Δ de la manière suivante : les objets sont les ensembles $[n] = \{0, \ldots, n\}$ pour $n \geq 0$, et les morphismes entre $[n]$ et $[m]$ sont les applications croissantes (au sens large).

Définition 5. *Un objet simplicial (respectivement cosimplicial) sur une catégorie $\mathcal{C}$ est un foncteur de Δ^{op} (respectivement Δ) vers $\mathcal{C}$.*

Si X est un objet simplicial, on note X_i l'image de $[i]$. Si X est un objet cosimplicial, on la note X^i.

On appelle ensemble simplicial un objet simplicial sur la catégorie des ensembles et espace simplicial un objet simplicial sur la catégorie des espaces topologiques. On note $\widehat{\Delta}$ la catégorie des ensembles simpliciaux.

Notons Δ^* l'espace simplicial suivant : Δ^n est l'enveloppe convexe dans $\mathbf{R}^{n+1}$ de la base canonique. Et si ϕ appartient à $\mathrm{Hom}([n],[m])$, $\Delta^*(\phi) : \Delta^n \to \Delta^m$ associe $(y_0, \ldots, y_m)$ à $(x_0, \ldots, x_n)$ où $y_j = \sum_{\phi(i)=j} x_i$.

4.3.2 Foncteur réalisation

À un ensemble simplicial X, on peut associer un espace topologique $|X|$ via le foncteur réalisation. Celui-ci est caractérisé par la propriété suivante : $|\cdot|$ est l'unique foncteur commutant aux limites inductives qui fait commuter le diagramme suivant :

$$\begin{tikzcd} \widetilde{\Delta} \arrow[r, "|\cdot|"] & \mathrm{Top} \\ \Delta \arrow[u, hook] \arrow[ur, "\Delta^*"'] & \end{tikzcd}$$

où la flèche verticale est l'inclusion de Yoneda.

Voici une manière de le construire :

$$|X| = \left(\bigcup_{n \geq 0} X_n \times \Delta^n \right) / \sim$$

où $\sim$ est la relation d'équivalence engendrée par $(a, \Delta^*(f)(x)) \sim (X(f)(a), x)$ où f appartient à $\mathrm{Hom}([n],[m])$, a à X_m et x à Δ^n.

4.3.3 Foncteur singulier

Construisons maintenant le foncteur singulier S.

À un espace X, on associe l'ensemble simplicial $S(X)$ défini par

$$S(X)_* = \mathrm{Hom}_{\mathrm{Top}}(\Delta^*, X).$$

Notons qu'à partir de $S(X)$, on peut définir le complexe singulier $C(X)$ associé à X qui permet de calculer son homologie singulière. On pose

$$C(X)_n = \mathbf{Z}[S(X)_n]$$

et la différentielle $d : C(X)_{n+1} \to C(X)_n$ est définie par

$$d = \sum_{i=0}^{n+1} (-1)^i C(X)_{n+1}(\phi_i)$$

où ϕ_i est l'unique morphisme de $[n]$ vers $[n+1]$ qui n'atteint pas i et les $C(X)_{n+1}(\phi_i)$ sont les $S(X)_{n+1}(\phi_i)$ étendues par linéarité.

4.3.4 Une adjonction et une équivalence

Il résulte de considération formelle que :

Proposition 3. *Le couple de foncteurs* $(|\cdot|, S)$ *est un couple de foncteurs adjoints.*

Mais on a beaucoup mieux !

Appelons un morphisme d'ensembles simpliciaux $f : X \to Y$ une n-équivalence si $|f|$ est une n-équivalence (au sens des espaces topologiques). Notons $W_{\Delta,n}$ les n-équivalences d'ensembles simpliciaux et $\mathrm{Hot}_{\Delta,n}$ la catégorie localisée $\widetilde{\Delta}[W_{\Delta,n}^{-1}]$. Alors on a :

Théorème 5 (Milnor)**.** *Les foncteurs* $|\cdot|$ *et* S *induisent respectivement des foncteurs de* Hot_n *vers* $\mathrm{Hot}_{\Delta,n}$ *et de* $\mathrm{Hot}_{\Delta,n}$ *vers* Hot_n *quasi-inverses l'un de l'autre.*

On a donc une description des n-types d'homotopie en terme d'ensemble simpliciaux.

5 n-types et n-groupoïdes

Revenons à la problématique annoncée dans l'introduction : associer à un espace X un invariant qui caractérise son n-type d'homotopie. Plus précisément, construire pour chaque n, un foncteur de Hot_n vers une catégorie $\mathcal{C}$ (dépendante de n) qui induit une équivalence de catégorie après localisation par W_n.

Commençons par examiner les petites valeurs de n.

5.1 Cas $n = 0$

Ce cas est trivial :

Proposition 4. *Le foncteur* $\pi_0 : \mathrm{Top} \to \mathrm{Set}$ *qui à* X *associe les composantes connexes par arcs* $\pi_0(X)$ *induit une équivalence de catégories de* Hot_0 *vers* Set.

Démonstration. Par définition, une 0-équivalence induit une bijection sur les composantes connexes par arcs et donc les flèches $\pi_0(W_0)$ sont inversibles. Par propriété universelle de Hot_0, π_0 induit bien un foncteur de $\mathrm{Hot}_0 \to \mathrm{Set}$. On obtient un quasi-inverse en envoyant un ensemble sur l'espace topologique discret associé. □

Ainsi, un 0-type d'homotopie n'est rien d'autre qu'un ensemble.

5.2 Cas $n = 1$

Ce cas est à peine plus difficile :

Proposition 5. *Le foncteur* $\Pi_1 : \mathrm{Top} \to \mathrm{Groupoid}$ *qui à un espace topologique associe son groupoïde fondamental induit une équivalence de catégories de* Hot_1 *vers* $\mathrm{Groupoid}[S^{-1}]$ *où* S *sont les équivalences de groupoïdes.*

Démonstration. Clairement, Π_1 passe à la localisation. Remarquons que f est une 1-équivalence si et seulement si $\Pi_1(f)$ est une équivalence de groupoïdes (la condition sur le π_0 équivaut à l'essentielle surjectivité et celle sur le π_1 à la pleine fidélité). À partir d'un groupoïde G, on construit un graphe dont les sommets sont les objets de G et les arrêtes correspondent aux morphismes. La remarque permet de faire passer se foncteur à la localisation. On vérifie qu'on obtient ainsi un quasi-inverse de Π_1. □

Ainsi, les 1-types d'homotopie sont les groupoïdes à équivalence près.

Attention, les équivalences de groupoïdes ne sont pas les isomorphismes dans la catégorie des groupoïdes !

5.3 Cas $n = 2$

On a un énoncé analogue dans ce cas :

Proposition 6. *Le foncteur* $\Pi_2 : \mathrm{Top} \to 2\text{-}\mathrm{Groupoid}$ *qui à un espace topologique associe son* 2*-groupoïde fondamental (strict) induit une équivalence de catégories de* Hot_2 *vers* $2\text{-}\mathrm{Groupoid}[S^{-1}]$ *où* S *sont les équivalences de* 2*-groupoïdes.*

Il faut préciser ce qu'on entend par 2-groupoïde fondamental. Les objets de $\Pi_2(X)$ sont les points de X. Les 1-flèches entre x et y sont les applications f de $[0, n]$ dans X telles que $f(0) = x$ et $f(n) = y$ où n est un entier positif qui varie. La composition est la juxtaposition. On force formellement l'existence de l'inverse en imposant que f composé avec f parcouru dans l'autre sens soit l'application constante égale à $f(0)$. Les 2-flèches sont les homotopies entre 1-flèches.

5.4 Cas $n \geq 3$

L'énoncé analogue aux cas précédents est faux. Les 3-groupoïdes strictes ne réalisent pas tous les 3-types d'homotopie (et notamment pas celui de S^2, voir [Koc, p. 20]). Il faut donc affaiblir la notion de 3-groupoïdes.

Différents modèles pour les 3-types ou même les n-types ont été proposés. Dans [Sim], Simpson conjecture que les n-groupoïdes avec unités faibles conviennent. Dans [JK], Joyal et Kock démontre la conjecture de Simpson pour X simplement connexe et $n = 3$. Dans [Tam], Tamsamani démontre que les n-groupoïdes avec une notion de composition faible conviennent. Il existe également d'autres modèles plus compliqués.

Le but de ma thèse est de comparer ces différents modèles en termes de catégories de modèles et d'adjonction de Quillen (voir [Hov]), de trancher la conjecture de Simpson dans le cas $n = 3$ et si possible dans le cas général.

Références

[GZ] Gabriel, P. ; Zisman, M. Calculus of fractions and homotopy theory. Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete, Band 35 Springer-Verlag New York, Inc., New York 1967.

[Han] Handbook of algebraic topology. Edited by I. M. James. North-Holland, Amsterdam, 1995.

[Hat] Hatcher, Allen Algebraic topology. Cambridge University Press, Cambridge, 2002.

[Hov] Hovey, Mark Model categories. Mathematical Surveys and Monographs, 63. American Mathematical Society, Providence, RI, 1999.

[JK] Joyal, A. ; Kock, J. Weak units and homotopy 3-types. Pas encore disponnible.

[JT] Joyal, A. ; Tierney, M. An introduction to Simplicial Homotopy Theory. Preliminary version, 1999. `http://hopf.math.purdue.edu/Joyal-Tierney/JT-chap-01.pdf`.

[Koc] Koack, J. Weak identity arrows in higher categories. Preliminary version, 2004. `http://www.cirget.uqam.ca/~kock/cat/aarhus.pdf`.

[Sim] Simpson, C. Homotopy types of strict 3-groupoids. Preprint, math.CT/9810059.

[Spa] Spanier, Edwin H. Algebraic topology. Corrected reprint. Springer-Verlag, New York-Berlin, 1981.

[Tam] Tamsamani, Z. Sur des notions de n-catégorie et n-groupoïde non strictes via des ensembles multi-simpliciaux. K-Theory 16 (1999), 5199. (alg-geom/9512006 and alg-geom/9607010).