Dualité de Pontryagin

Dimitri Ara et Nolwen Huet

sous la direction de David Harari

Résumé

Si G est un groupe abélien localement compact et $\mathbb{T}$ le tore $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$, alors $\mathrm{Hom}(G, \mathbb{T})$ muni de la topologie de la convergence compacte est un groupe abélien localement compact. On définit ainsi une dualité dans la catégorie des groupes abéliens localement compacts : la dualité de Pontryagin. Dans cet exposé, nous démontrons le théorème de Pontryagin qui affirme que l'application canonique de G dans son bidual est un isomorphisme de groupes topologiques. Pour ce faire, nous montrons que la dualité de Pontryagin est compatible, en un sens que nous préciserons, avec les produits, les extensions de groupes, les limites inductives, les limites projectives et qu'à partir de groupes dit élémentaires, on peut obtenir par ces opérations tous les groupes abéliens localement compacts.

1 Groupes abéliens localement compacts

On appelle catégorie des groupes abéliens localement compacts la catégorie dont les objets sont les groupes abéliens localement compacts (et donc par définition séparés) et les morphismes sont les morphismes de groupes continus. On la notera $\mathfrak{C}$. Nous noterons multiplicativement la loi de ses objets et e désignera, sauf mention explicite du contraire, leur unité. Les isomorphismes de $\mathfrak{C}$ sont les morphismes de groupes bicontinus. On a une caractérisation simple des sous-objets de $\mathfrak{C}$:

Proposition 1. *Soit G un objet de $\mathfrak{C}$. Un sous-groupe H de G est un sous-objet de G si et seulement si H est fermé dans G.*

Démonstration. Si H est fermé dans G et si V est un voisinage compact de l'unité dans G, alors $V \cap H$ est un voisinage compact de l'unité dans H et par conséquent H est localement compact.

Réciproquement, si H est localement compact, alors H est fermé dans G car d'après le corollaire 1 du paragraphe 3.3 du chapitre 3 de [3], un groupe localement compact est complet (pour la structure uniforme donnée par les voisinages de l'unité). □

Dans le reste de l'exposé, les groupes quotients sont munis de la topologie quotient et on a :

Proposition 2. *Si G est un objet de $\mathfrak{C}$ et H est un sous-objet de G, alors le groupe quotient G/H est lui-même un objet de $\mathfrak{C}$.*

Démonstration. H étant fermé, G/H est séparé. Le reste suit. □

Introduisons la notion de morphisme strict qui permet d'exprimer sa compatibilité avec la topologie quotient :

Définition 1. Soit G_1 et G_2 deux groupes topologiques, f un morphisme de G_1 dans G_2. On dit que f est strict si la topologie de $f(G_1)$ induite par celle de G_2 est la topologie quotient sur $G_1/\ker f$, c'est-à-dire si $f(G_1)$ est isomorphe à $G_1/\ker f$ en tant que groupe topologique.

On remarque qu'un morphisme ouvert ou fermé est strict.

2 Caractères, dual et bidual

Soit G un objet de $\mathfrak{C}$. On note $\mathbb{T}$ l'ensemble des nombres complexes de module 1 et on appelle caractère de G un morphisme de groupe continu de G dans $\mathbb{T}$. L'ensemble des caractères $\mathrm{Hom}(G, \mathbb{T})$ est naturellement muni d'une structure de groupe. Nous le munissons également de la topologie de la convergence compacte dont une base de voisinages de l'unité est donnée par les voisinages $\Omega(K, V) = \{\chi; \chi(K) \subset V\}$ où K est un compact de G et V un voisinage de 1 dans $\mathbb{T}$. Cette topologie fait de $\mathrm{Hom}(G, \mathbb{T})$ un groupe topologique que l'on notera $\hat{G}$: c'est le dual de Pontryagin de G.

Proposition 3. *Si G est un objet de $\mathfrak{C}$ alors $\hat{G}$ est également un objet de $\mathfrak{C}$.*

Rappelons tout d'abord le théorème d'Ascoli (corollaire 3 du paragraphe 2.5 du chapitre 10 de [4]) :

Proposition 4 (Ascoli). *Soit X un espace topologique localement compact, Y un groupe topologique séparé et H un sous-ensemble de l'ensemble $\mathrm{Hom}(X, Y)$ des fonctions continues de X dans Y muni de la topologie de la convergence compacte. Si H est équicontinu et $H(x) = \bigcup_{h \in H}\{h(x)\}$ est relativement compact dans Y pour tout x dans X, alors H est relativement compact dans $\mathrm{Hom}(X, Y)$.*

La proposition 3 résulte du lemme suivant :

Lemme 1. *Si K est un voisinage compact de e dans G alors $\Omega(K, V)$ est relativement compact dans $\hat{G}$ pour V assez petit.*

Démonstration. D'après le théorème d'Ascoli, il nous suffit de montrer que $\Omega(K,V)$ est équicontinu en e pour un V bien choisi (car $\Omega(K,V)(G)$ est relativement compact par compacité de $\mathbb{T}$), c'est-à-dire que pour tout voisinage W de 1 dans $\mathbb{T}$, il existe un voisinage L de e dans G tel que $\chi(L) \subset W$ pour $\chi \in \Omega(K,V)$.

Choisissons V contenu dans l'ensemble des éléments de $\mathbb{T}$ de partie réelle strictement positive. On a $\bigcap_{k>0} V_k = \{1\}$ avec $V_k = \{z \in \mathbb{T}; z^k \in V\}$. Par un argument de mesure, cela entraîne qu'il existe $n > 0$ tel que $\bigcap_{0 \leqslant k \leqslant n} V_k \subset W$. Si l'on prend alors L tel que $L^n \subset K$, on a pour k compris entre 1 et n, $\chi(L^k) = (\chi(L))^k \subset V$ donc $\chi(L) \subset V_k$ et L est bien un voisinage de e tel que $\Omega(K,V)(L) \subset W$. □

Proposition 5. *Si G est un objet de $\mathfrak{C}$ compact (respectivement discret) alors $\hat{G}$ est discret (respectivement compact).*

Démonstration. Si G est compact et si V ne contient pas de sous-groupes propres alors $\Omega(G,V) = \{\hat{e}\}$ et $\hat{G}$ est discret.

Si G est discret alors $\Omega(\{e\},V) = \hat{G}$ qui est compact pour un V bien choisi d'après le lemme précédent. □

La proposition 3 affirme que $\mathfrak{C}$ est stable par passage au dual. On peut ainsi introduire le bidual de G que l'on notera $\hat{\hat{G}}$. On a alors une application canonique de G dans $\hat{\hat{G}}$ donnée par

$$\begin{array}{cccll} \varphi & : & G & \longrightarrow & \hat{\hat{G}} \\ & & x & \longmapsto & (\chi \mapsto \langle x,\chi\rangle) \quad \text{avec } \langle x,\chi\rangle = \chi(x) \end{array}$$

Nous démontrerons au paragraphe 7 le théorème de Pontryagin :

Théorème (Pontryagin). *Soit G un objet de $\mathfrak{C}$. Alors φ est un isomorphisme entre G et son bidual.*

On se contente pour l'instant du résultat suivant :

Proposition 6. *Soit G un objet de $\mathfrak{C}$. L'application canonique φ de G dans son bidual est un morphisme.*

Démonstration. φ est clairement un morphisme de groupes. Montrons qu'il est continu. Il suffit de trouver un voisinage X de l'unité dans G qui soit contenu dans $\varphi^{-1}(\Omega(\hat{K},W)) = \{x \in G; \hat{K}(x) \subset W\}$ pour tout compact $\hat{K}$ dans $\hat{G}$ et tout voisinage V de l'unité dans $\mathbb{T}$.

Pour ce faire, donnons-nous K un voisinage compact de l'unité dans G et V un voisinage de 1 dans $\mathbb{T}$ tel que $V^2 \subset W$. Par compacité de $\hat{K}$, on peut choisir un nombre fini de $\hat{a}_i$ tel que $\hat{K} \subset \bigcup \hat{a}_i\, \Omega(K,V)$. La continuité des $\hat{a}_i$ nous assure l'existence d'un voisinage X de l'unité dans G contenu dans K tel que $\bigcup \hat{a}_i(X) \subset V$. On a alors pour tout $\hat{x} \in \hat{K}$, $\hat{x}(X) \subset V^2 \subset W$ et X est donc le voisinage recherché. □

On dira qu'un objet de G vérifie le théorème de Pontryagin si φ est un isomorphisme entre G et son bidual. Afin de prouver le théorème de Pontryagin, nous allons montrer qu'il est compatible avec les produits, les extensions de groupes, les limites projectives et les limites inductives. Nous commençons par les produits et les extensions.

3 Produits, sous-groupes et quotients

Proposition 7. *Si G_1 et G_2 sont deux objets de $\mathfrak{C}$ alors $(G_1 \times G_2)\widehat{}$ et $\hat{G}_1 \times \hat{G}_2$ sont isomorphes.*

Démonstration. Soit e_1 et e_2 les éléments neutres respectifs de G_1 et G_2. Les applications

$$\begin{array}{rccc} \phi & : & \hat{G}_1 \times \hat{G}_2 & \longrightarrow & (G_1 \times G_2)\widehat{} \\ & & (\chi_1, \chi_2) & \mapsto & ((x,y) \mapsto \chi_1(x)\chi_2(y)) \end{array}$$

et

$$\begin{array}{rccc} \psi & : & (G_1 \times G_2)\widehat{} & \to & \hat{G}_1 \times \hat{G}_2 \\ & & \chi & \mapsto & (\chi(\cdot, e_2), \chi(e_1, \cdot)) \end{array}$$

sont des morphismes de groupes réciproques. Pour conclure, il suffit de montrer la continuité de ϕ et ψ. Or

$$\phi(\Omega(K_1, V) \times \Omega(K_2, V)) \subset \Omega(K_1 \times K_2, V^2)$$

et

$$\psi(\Omega(K_1 \times K_2, V)) \subset \Omega(K_1, V) \times \Omega(K_2, V)$$

□

Ainsi, si deux objets G_1 et G_2 vérifient le théorème de Pontryagin, il en est de même de $G_1 \times G_2$. Afin de démontrer la compatibilité du théorème de Pontryagin avec les extensions de groupes, nous introduisons les définitions suivantes :

Définition 2. Soit G un objet de $\mathfrak{C}$. Deux éléments $x \in G$ et $\chi \in \hat{G}$ sont dit orthogonaux si $\langle x, \chi \rangle = 1$. Un élément χ de $\hat{G}$ est dit orthogonal à un sous-groupe H de G s'il est orthogonal à tous les éléments de H. L'ensemble des éléments orthogonaux à H est un groupe appelé sous-groupe orthogonal de H dans G et est noté $H^{\perp}$.

Définition 3. Soit $f : G \to G'$ un morphisme de $\mathfrak{C}$. On appelle transposée de f le morphisme $\hat{f}$ obtenue par application du foncteur $\mathrm{Hom}(-, \mathbb{T})$ à f :

$$\begin{array}{rccc} \hat{f} : & \hat{G'} & \longrightarrow & \hat{G} \\ & \chi' & \longmapsto & (\chi : x \mapsto \langle f(x), \chi \rangle) \end{array}$$

Proposition 8. *Soit G un objet de $\mathfrak{C}$ et H un sous-objet de G. La transposée $\hat{p}$ de la projection canonique $p : G \to G/H$ induit un isomorphisme entre $(G/H)\widehat{}$ et $H^\perp$.*

Démonstration. En effet, $\hat{p}$ est un morphisme strict injectif d'image $H^\perp$:

Il clairement injectif car si χ et χ' sont deux caractères de G' tels que $\chi \circ p = \chi' \circ p$ alors $\chi = \chi'$ par surjectivité de p.

Par ailleurs, si χ appartient à $(G/H)\widehat{}$, alors, pour tout x de H,

$$\hat{p}(\chi)(x) = \langle p(x), \chi \rangle = \langle 0, \chi \rangle = 0$$

et donc $\hat{p}(\chi)$ appartient à $H^\perp$. Réciproquement, si χ appartient à $H^\perp$, il est constant sur chaque classe modulo H et par conséquent $\chi' : p(x) \mapsto \chi(x)$ est un caractère de G/H dont l'image par $\hat{p}$ est χ.

Il suffit maintenant de montrer que la restriction de $\hat{p}$ à son image est ouverte. Soit un compact K' de G/H, c'est l'image par $\hat{p}$ d'un compact K de G et

$$\hat{p}(\Omega(K', V)) = \Omega(K, V) \cap H^\perp$$

est un ouvert de $H^\perp$. □

On rappelle que :

Proposition 9. *Un groupe abélien divisible G est injectif. Autrement dit, si pour tout x dans G et tout entier n, il existe y dans G tel que $ny = x$, alors pour tout groupe G_2 et tout sous-groupe G_1 de G_2, tout morphisme f de G_1 dans G se prolonge en un morphisme $\tilde{f}$ de G_2 dans G.*

Démonstration. Soit x dans G_2 privé de G_1. S'il n'existe pas d'entier d tel que dx soit dans G_1, alors f se prolonge trivialement à $G_1 + \mathbb{N}x$. Sinon, choisissons d minimal. Par hypothèse, il existe un élément u dans G tel que $du = f(dx)$. On prolonge alors f en posant $\tilde{f}(z + nx) = f(z) + nu$ pour tout entier n et tout z de G_1. $\tilde{f}$ est bien défini par minimalité de d et par principalité de $\mathbb{Z}$. On conclut par le lemme de Zorn. □

Proposition 10. *Soit G un objet de $\mathfrak{C}$ et H un sous-groupe ouvert de G. La transposée $\hat{\imath}$ de l'injection canonique $i : H \to G$ induit un isomorphisme entre $\hat{G}/H^\perp$ et $\hat{H}$.*

Démonstration. $\hat{\imath}$ est clairement de noyau $H^\perp$.

Par ailleurs, il est surjectif. En effet, $\mathbb{T}$ est injectif car c'est un groupe abélien divisible, donc tout caractère χ de $\hat{H}$ s'étend en un caractère χ' de $\hat{G}$, la continuité du prolongement étant assurée par le fait que H est ouvert dans G. D'où $\hat{\imath}(\chi') = \chi$.

Enfin, on montre qu'il est strict en utilisant le lemme suivant :

Lemme 2. *Un morphisme continu de groupes topologiques $f : G \to G'$ qui envoie un voisinage compact de l'unité U sur un voisinage de l'unité est ouvert.*

Démonstration. Soit V un voisinage de l'unité. Donnons-nous un voisinage symétrique de l'unité W tel que $W^2 \subset V$. $\{u.W\}_{u \in U}$ est alors un recouvrement de U dont l'image par f recouvre le compact $f(U)$. On en extrait un sous-recouvrement fini $\{u'_i.f(W)\}_{i \in I}$. Comme $f(U)$ est un voisinage de l'unité dans G', $\{u'_i.f(W)\}_{i \in I}$ est d'intérieur non vide et par conséquent $f(W)$ aussi. Alors e' est intérieur à $f(V)$ car si x est un point intérieur à $f(W)$ alors, par symétrie de $f(W)$, x^{-1} est intérieur à $f(W)$; d'où e' appartient au carré de l'intérieur de $f(W)$, lui-même contenu dans l'intérieur de $f(V)$. Ainsi $f(V)$ est un voisinage de l'unité dans G' : f est ouvert. □

Alors, si on prend pour K un voisinage compact de l'unité dans H (donc dans G puisque H est ouvert) on a, d'après le lemme 1 que $\Omega_G(K,V)$ est relativement compact pour V assez petit, donc il est inclus dans un compact $\hat{K}$. Or $\hat{i}(\Omega_G(K,V)) = \Omega_H(K,V)$. Donc $\hat{i}(\hat{K})$ contient $\Omega_H(K,V)$: $\hat{K}$ est un voisinage compact de l'unité envoyé sur un voisinage de l'unité. □

On peut maintenant montrer que le théorème de Pontryagin est compatible avec les extensions de groupes :

Corollaire 1. *Soit G un objet de $\mathfrak{C}$ et H un sous-groupe ouvert compact de G. Si H et G/H vérifient le théorème de Pontryagin alors G le vérifie également.*

Démonstration. On a une suite exacte

$$1 \longrightarrow H \xrightarrow{i} G \xrightarrow{p} G/H \longrightarrow 1$$

où les morphismes sont stricts. D'après les deux propositions précédentes, la suite duale

$$1 \longrightarrow (G/H)\hat{}\xrightarrow{\hat{p}} \hat{G} \xrightarrow{\hat{i}} \hat{H} \longrightarrow 1$$

est également exacte avec des morphismes stricts. Pour appliquer ceci une deuxième fois nous avons besoin du lemme suivant.

Lemme 3. *Soit G un objet de $\mathfrak{C}$ et H un sous-groupe de G. Si H est compact (respectivement ouvert) alors $H^{\perp}$ est ouvert (respectivement compact).*

Démonstration. En effet, quitte à prendre V un voisinage de 1 dans $\mathbb{T}$ qui ne contient pas de sous-groupes propres, on a $H^{\perp} = \Omega(H,V)$. Donc si H est compact, $H^{\perp}$ est bien ouvert.

On suppose maintenant H ouvert. Comme G est localement compact, il existe un voisinage compact de l'unité K inclus dans H. D'après le lemme 1, on peut choisir V assez petit pour que $\Omega(K,V)$ soit relativement compact : il reste donc à montrer que $\Omega(H,V)$ est fermé puisque $\Omega(H,V) \subset \Omega(K,V)$.

On peut supposer V fermé (quitte à prendre $\overline{W} \subset V$). Soit $\chi \notin \Omega(H,V)$, il existe h dans H tel que $\chi(h) \notin V$. Puisque V est fermé, il existe un ouvert U de $\mathbb{T}$ disjoint de V tel que $\chi(h) \in U$; par continuité de χ et compacité locale de G, il existe alors un voisinage compact K' de h qui vérifie $\chi(K') \subset U$. Ainsi, $\Omega(K',U)$ est un voisinage de χ disjoint de $\Omega(H,V)$ qui est donc bien fermé. $\square$

Nous allons maintenant utiliser le premier point du lemme. Le deuxième point n'est pas nécessaire ici mais servira par la suite, notamment pour la proposition 14.

Ainsi $(G/H)\widehat{\ } \simeq H^{\perp}$ est ouvert puisque H est compact et on peut prendre le dual de la suite précédente et on obtient par fonctorialité le diagramme commutatif à lignes exactes

$$\begin{tikzcd} 1 \arrow[r] & H \arrow[r, "i"] \arrow[d, "\varphi_H"] & G \arrow[r, "p"] \arrow[d, "\varphi_G"] & G/H \arrow[r] \arrow[d, "\varphi_{G/H}"] & 1 \\ 1 \arrow[r] & \hat{\hat{H}} \arrow[r, "\hat{\hat{i}}"] & \hat{\hat{G}} \arrow[r, "\hat{\hat{p}}"] & (G/H)\widehat{\widehat{\ }} \arrow[r] & 1 \end{tikzcd}$$

où φ_H et $\varphi_{G/H}$ sont des isomorphismes. On en déduit que φ_G est un isomorphisme. $\square$

4 Limites projectives et inductives

Le but de ce paragraphe est de montrer que le théorème de Pontryagin est compatible avec les limites projectives et inductives. Pour cela, on commence par énoncer les deux résultats suivants sur les limites projectives de groupes :

Proposition 11. *Soit $(G_i, u_{ij})_I$ un système projectif de groupes topologiques. Si les u_{ij} sont des morphismes stricts, surjectifs, à noyaux compacts, alors les projections canoniques $f_i : \varprojlim G_j \to G_i$ le sont également.*

Proposition 12. *Soit G un groupe localement compact et $(H_i)_I$ une famille filtrante de sous-groupes compacts de G, dont l'intersection ne contient que l'élément neutre. Alors l'application canonique de G dans $\varprojlim(G/H_i)$ est un isomorphisme de groupes topologiques.*

On peut maintenant en déduire les relations entre les limites d'objets de $\mathfrak{C}$ et les limites de leurs duaux :

Proposition 13. *Soit I un ensemble d'indices filtrant. Soit $(G_i, u_{ij})_I$ un système projectif de $\mathfrak{C}$ tel que les u_{ij} soit des morphismes stricts, surjectifs, à noyaux compacts et que $G = \varprojlim G_i$ soit un objet de $\mathfrak{C}$.*

Alors $(\hat{G}_i, \hat{u}_{ij})_I$ est un système inductif, $\hat{G}$ est isomorphe à $\varprojlim \hat{G}_i$, les $\hat{G}_i$ sont isomorphes à des sous-groupes ouverts de $\hat{G}$ et les applications canoniques des $\hat{G}_i$ dans $\hat{G}$ sont les transposées des projections canoniques $f_i : G \to G_i$.

Démonstration. Pour tout $i \leqslant j \leqslant k$, le diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd} G_j \arrow[r, "u_{ij}"] \arrow[d, "u_{kj}"'] & G_i \\ G_k \arrow[ur, "u_{ik}"'] & \end{tikzcd}$$

induit le diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd} \hat{G}_j & \hat{G}_i \arrow[l, "\hat{u}_{ij}"'] \arrow[dl, "\hat{u}_{ik}"] \\ \hat{G}_k \arrow[u, "\hat{u}_{kj}"] & \end{tikzcd}$$

par transposition. Le premier point en résulte.

D'après la proposition 11, les f_i sont stricts, surjectifs et à noyaux H_i compacts. On peut alors appliquer la proposition 8 à G_i : $\hat{G}_i \simeq H_i^{\perp}$ est ouvert dans $\hat{G}$.

De plus, $\hat{G} = \bigcup_I H_i^{\perp}$. En effet, soit $\chi \in \hat{G}$ et V un voisinage de 1 dans $\mathbb{T}$ sans sous-groupes propres. Il existe alors un voisinage U de l'unité dans G vérifiant $\chi(U) \subset V$. On peut supposer que U est de la forme ${f_i}^{-1}(V_i)$ où V_i est un voisinage de l'unité dans G_i, par conséquent U contient $H_i = {f_i}^{-1}(e_i)$. Ainsi $\chi(H_i)$ est inclus dans V et est donc réduit à $\{1\}$, d'où $\chi \in {H_i}^{\perp}$.

On en déduit que $\hat{G}$ s'identifie à la limite inductive des ${H_i}^{\perp}$ pour les morphismes d'inclusion et il est donc isomorphe à $\varinjlim \hat{G}_i$.

On vérifie enfin que $\hat{f}_i$ est un morphisme inductif de $(\hat{G}_i, \hat{u}_{ij})$ dans $(\hat{G}, 1)$. □

Proposition 14. *Soit G un objet de $\mathfrak{C}$. Si $(G_i)_I$ est une famille filtrante de sous-groupes ouverts de G telle que $G = \bigcup_I G_i$ alors $\hat{G}$ est isomorphe à la limite projective des $\hat{G}_i$ pour les transposées des injections canoniques. Celles-ci sont strictes, surjectives et à noyaux compacts.*

Démonstration. D'après le lemme 3, $({G_i}^{\perp})_I$ est une famille filtrante de sous-groupes compacts de $\hat{G}$. Comme $\bigcap_I G_i^{\perp} = G^{\perp} = \{\hat{e}\}$, la proposition 12 donne l'isomorphisme :

$$\hat{G} \simeq \varprojlim(\hat{G}/{G_i}^{\perp})$$

Or, d'après la proposition 10, les transposées des injections $f_i : G_i \to G$ induisent des isomorphismes entre $\hat{G}/{G_i}^\perp$ et $\hat{G}_i$. $\hat{G}$ est donc isomorphe à la limite projective des $\hat{G}_i$ pour les transposées des injections $u_{ij} : G_i \to G_j$.

Enfin, les $\hat{u}_{ij}$ sont strictes, surjectives et de noyaux ${G_i}^\perp$, compacts, d'après la proposition 11. $\square$

On en déduit la compatibilité recherchée :

Corollaire 2. *Soit $(G_i, u_{ij})_I$ un système projectif (respectivement inductif) vérifiant les hypothèses de la proposition 13 (respectivement 14). Si les G_i vérifient le théorème de Pontryagin, alors $G = \varprojlim G_i$ (respectivement $\varinjlim G_i$) également.*

Démonstration. Cas projectif : on a vu que, avec les notations précédentes, $\hat{G} = \bigcup_I {H_i}^\perp$ avec ${H_i}^\perp$ ouvert. On est donc dans les conditions de la proposition 14 d'où :

$$\hat{\hat{G}} \simeq \varprojlim \widehat{({H_i}^\perp)} \simeq \varprojlim \hat{\hat{G}}_i$$

$$\begin{tikzcd} G_i \arrow[r, "f_i"] \arrow[d, "\varphi_i"'] & G \arrow[d, dashed, "\varphi"] \\ \hat{\hat{G}}_i \arrow[r, "\hat{\hat{f}}_i"'] & \hat{\hat{G}} \end{tikzcd}$$

Or φ est la limite projective du morphisme projectif $(\varphi_i)_I$. Comme les φ_i sont des isomorphismes, φ en est également un.

On procède de même pour le cas inductif. $\square$

5 Groupes élémentaires

On introduit maintenant la notion de groupe élémentaire. On montrera au paragraphe 7 que tout objet de $\mathfrak{C}$ peut-être obtenu à partir de limites projectives et inductives de groupes élémentaires. Il nous suffit donc vérifier que les groupes élémentaires vérifient le théorème de Pontryagin pour prouver le théorème de Pontryagin.

Définition 4. Un groupe élémentaire est un groupe localement compact de type $\mathbb{R}^p\mathbb{T}^q\mathbb{Z}^rF$ où F est un groupe abélien fini.

Nous allons donner différentes caractérisations des groupes élémentaires. Pour cela, nous avons besoin des définitions suivantes :

Définition 5. Soit G et G' deux groupes topologiques. Un isomorphisme local f entre G et G' est un homéomorphisme d'un voisinage V de l'unité de G sur un voisinage V' de l'unité de G' tel que, si x et y sont des points de V

tels que xy appartienne à V alors $f(xy) = f(x)f(y)$, et si x' et y' sont des points de V' tels que $x'y'$ appartienne à V alors $f^{-1}(x'y') = f^{-1}(x')f^{-1}(y')$.

Définition 6. Un groupe topologique est dit de type compact s'il admet un voisinage compact de l'unité qui l'engendre.

Proposition 15. *Soit G un groupe abélien localement compact. Les propositions suivantes sont équivalentes :*

(i) G est élémentaire ;

(ii) G est le quotient de deux sous-groupes fermés d'un $\mathbb{R}^n$;

(iii) G est de type compact et localement isomorphe à un $\mathbb{R}^m$.

Démonstration. Nous utiliserons les résultats de structure suivants :

Lemme 4.

(i) Les sous-groupes fermés de $\mathbb{R}^n$ sont de type $\mathbb{R}^m \times a_1\mathbb{Z} \times \cdots \times a_q\mathbb{Z}$.

(ii) Les groupes connexes localement isomorphes à $\mathbb{R}^n$ sont de type $\mathbb{R}^p\mathbb{T}^q$.

Démonstration. Voir le paragraphe 7.5 du chapitre 7 de [3] pour les sous-groupes fermés de $\mathbb{R}^n$ et le corollaire 1 du paragraphe 13.2 du chapitre 7 de [3] pour les groupes connexes localement isomorphes à $\mathbb{R}^n$. □

(i) $\Rightarrow$ (ii) Soit $G = \mathbb{R}^p\mathbb{T}^q\mathbb{Z}^rF$ où F est un groupe abélien fini. On a $\mathbb{T}^q \simeq \mathbb{R}^q/\mathbb{Z}^q$ et $F \simeq \mathbb{Z}^s/(a_1\mathbb{Z} \times \cdots \times a_s\mathbb{Z})$ par le théorème de structure des groupes finis. D'où G est isomorphe à $(\mathbb{R}^{p+q}\mathbb{Z}^{r+s})/(Z^q \times a_1\mathbb{Z} \times \cdots \times a_s\mathbb{Z})$.

(ii) $\Rightarrow$ (iii) D'après la proposition 4, les quotients de groupes fermés de $\mathbb{R}^n$ sont de la forme $(\mathbb{R}^p \times a_1\mathbb{Z} \times \cdots \times a_q\mathbb{Z})/(\mathbb{R}^r \times b_1\mathbb{Z} \times \cdots \times b_s\mathbb{Z})$, c'est-à-dire de la forme $\mathbb{R}^s \times \mathbb{T}^t \times D$ où D est discret. Ainsi, la composante connexe de l'unité dans G est homéomorphe à $\mathbb{R}^s \times \mathbb{T}^t$ qui est localement isomorphe à $\mathbb{R}^m$.

Par ailleurs, les sous-groupes fermés de $\mathbb{R}^n$ étant de type compact, G est de type compact.

(iii) $\Rightarrow$ (i) La composante connexe de l'unité G' de G est isomorphe à $\mathbb{R}^p\mathbb{T}^q$ par la proposition 4. Ainsi G admet une base de voisinages de l'unité connexes et est par conséquent localement connexes. On en déduit que G' est ouvert et donc que G/G' est discret. De plus, si K est un voisinage de l'unité compact qui engendre G, alors l'image de K dans G/G' est compacte et discrète et donc finie. D'où G/G' est de type fini. Par le théorème de structure des groupes de type fini, G/G' est de type $\mathbb{Z}^rF$ où F est un groupe fini abélien. Par ailleurs, G' étant divisible, la suite exacte

$$1 \longrightarrow G' \xrightarrow{i} G \xrightarrow{p} G/G' \longrightarrow 1$$

qui est isomorphe à la suite

$$1 \longrightarrow \mathbb{R}^p\mathbb{T}^q \xrightarrow{i} G \xrightarrow{p} \mathbb{Z}^r F \longrightarrow 1$$

se scinde et G est isomorphe à $\mathbb{R}^p\mathbb{T}^q\mathbb{Z}^r F$. □

Proposition 16. *Tout groupe élémentaire vérifie le théorème de Pontryagin.*

Démonstration. D'après la proposition 7, il suffit de montrer le résultat pour les groupes abéliens finis, $\mathbb{R}$, $\mathbb{T}$ et $\mathbb{Z}$.

Si F est un groupe abélien fini, par le théorème de structure des groupes abéliens finis et la proposition 7, il suffit de montrer le résultat pour $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$. Un caractère de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ est déterminé par l'image de 1 qui est une racine n-ième de l'unité. Les caractères sont donc les $k \mapsto \exp(2i\pi ks/n)$ où s est compris entre 0 et $n-1$ et $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})\widehat{}$ est cyclique d'ordre n. L'injectivité de l'application canonique φ de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ dans son bidual est claire et par un argument de cardinalité c'est un isomorphisme.

Les caractères de $\mathbb{R}$ sont également déterminés par l'image de 1. Ce sont les $\tau_s = r \mapsto \exp(2i\pi rs)$ où s est un réel. Dans l'identification $s \mapsto \tau_s$ entre $\mathbb{R}$ et son dual, l'application canonique de $\mathbb{R}$ dans son bidual devient $r \mapsto (s \mapsto \exp(2i\pi rs))$ qui est un isomorphisme (c'est précisément notre identification entre $\mathbb{R}$ et son dual).

Montrons que les duaux de $\mathbb{Z}$ et $\mathbb{T}$ sont respectivement $\mathbb{T}$ et $\mathbb{Z}$. Les caractères de $\mathbb{Z}$ sont déterminés par l'image de 1. Le morphisme de $\mathbb{R}$ sur $\hat{\mathbb{Z}}$ qui a x associe τ_x est surjectif et a pour noyau $\mathbb{Z}$. Ainsi $\hat{\mathbb{Z}}$ est isomorphe à $\mathbb{R}/\mathbb{Z} \simeq \mathbb{T}$. Par ailleurs, $\mathbb{T}$ étant isomorphe à $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$, on a $\hat{\mathbb{T}} \simeq \mathbb{Z}^\perp \simeq \mathbb{Z}$. Dans cet isomorphisme, 1 est envoyé sur l'identité $\mathrm{id}_\mathbb{T}$ sur $\mathbb{T}$ qui engendre donc $\hat{\mathbb{T}}$. Ainsi l'application canonique φ de $\mathbb{T}$ dans son bidual $\mathbb{T}$ est injective. En effet, si $\varphi(x) = \hat{e}$, alors $\langle \mathrm{id}_\mathbb{T}, \varphi(x)\rangle = 1$. Mais $\langle \mathrm{id}_T, \varphi(x)\rangle = \langle x, \mathrm{id}_T\rangle = x$. D'où $\ker\varphi = 1$. De plus, elle est surjective car si $\alpha \in \hat{\hat{\mathbb{T}}}$, $\alpha = \varphi(\langle \mathrm{id}_T, \alpha\rangle)$. En effet, $\langle \mathrm{id}_T, \varphi(\langle \mathrm{id}_T, \alpha\rangle)\rangle = \langle\langle \mathrm{id}_T, \alpha\rangle, \mathrm{id}_T\rangle = \langle \mathrm{id}_T, \alpha\rangle$. φ est donc bijective continue, et puisque $\mathbb{T}$ est compact, φ est un isomorphisme. Ainsi $\mathbb{T}$ vérifie le théorème de Pontryagin. Or :

Lemme 5. *Si G est un groupe abélien localement compact qui vérifie le théorème de Pontryagin, alors son dual $\hat{G}$ vérifie également le théorème de Pontryagin.*

Démonstration. Si φ désigne l'application canonique de G dans son bidual et ψ celle de $\hat{G}$ dans son bidual (c'est-à-dire le tridual de G), on a pour x dans G et $\hat{x}$ dans $\hat{G}$

$$\langle \varphi(x), \psi(\hat{x})\rangle = \langle \hat{x}, \varphi(x)\rangle = \langle x, \hat{x}\rangle$$

et par conséquent ψ est l'inverse de la transposée de φ. □

D'où $\mathbb{Z} \simeq \hat{\mathbb{T}}$ vérifie théorème de Pontryagin. $\square$

Cette propriété justifie le choix du codomaine $\mathbb{T}$ de nos caractères. En effet, cette proposition serait fausse si l'on avait choisi par exemple $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ à la place de $\mathbb{T} \simeq \mathbb{R}/\mathbb{Z}$. Nous y reviendrons dans le dernier paragraphe.

On démontre maintenant un cas particulier du théorème de Pontryagin sur lequel on s'appuiera pour la démonstration du cas général.

Proposition 17. *Tout objet de $\mathfrak{C}$ discret vérifie le théorème de Pontryagin.*

Démonstration. Un groupe abélien discret est limite inductive de ses sous-groupes ouverts de type fini qui sont des groupes élémentaires. Il vérifie donc le théorème de Pontryagin d'après les propositions 14 et 16. $\square$

6 Groupes compacts

Dans ce paragraphe, nous montrons que si G est compact, alors pour tout élément x de G différent de l'unité, il existe un caractère χ de G vérifiant $\chi(x) \neq 1$. Grâce à ce résultat, nous prouvons l'injectivité de φ, au moins pour les groupes compacts pour lesquels on en déduit le théorème de Pontryagin. Pour cela, admettons les deux résultats classiques suivants (voir l'annexe du chapitre 11 de [2]) :

Proposition 18. *Soit G un groupe compact. Il existe une unique mesure signée sur G, invariante à gauche et de masse totale 1. On l'appelle mesure de Haar.*

Proposition 19. *Un opérateur hermitien compact positif non nul sur un espace de Hilbert admet une valeur propre non nulle. De plus l'espace propre associé est de dimension finie.*

On suppose maintenant que G est un groupe compact. On note $L^2(G)$ l'espace des fonctions complexes sur G dont le carré du module est intégrable pour la mesure de Haar, et $(.|.)$ son produit scalaire usuel.

Si $a \in G$, T_a est alors l'opérateur sur $L^2(G)$ défini par $T_a f : y \mapsto f(ay)$. Si $f \in L^2(G)$, posons $\tilde{f} : x \mapsto \overline{f(x^{-1})}$.

Avec ces notations, on définit le produit de convolution de deux fonctions f et g de $L^2(G)$, noté $f * g$, par :

$$f * g(x) = (T_x f | \tilde{g})$$

On montre alors la totalité des caractères de G :

Proposition 20. *Soit G un groupe compact. L'ensemble des caractères de G est total dans $L^2(G)$ (c'est-à-dire, $\hat{G}$ est dense dans $L^2(G)$).*

Démonstration. Soit f une fonction de $L^2(G)$ non nulle. On pose $F = f * \tilde{f}$. L'opérateur linéaire $U : \phi \mapsto F * \phi$ est alors un opérateur continu, hermitien positif non nul et compact. Montrons la compacité : $\{F * \phi : \|\phi\| \leqslant 1\}$ est équicontinu et borné dans L^∞, donc est relativement compact dans L^∞ et a fortiori dans L^2.

Alors, soit E_λ l'espace propre associé à une valeur propre $\lambda \neq 0$ de U. C'est un espace hermitien stable par tous les opérateurs T_a puisque ceux-ci commutent à U. Or on peut démontrer par récurrence le lemme suivant :

Lemme 6. *Soit $\mathcal{T}$ une famille d'opérateurs unitaires d'un espace hermitien H qui commutent deux à deux. Il existe une base orthonormale de H dont les éléments sont des vecteurs propres de chacun des opérateurs de $\mathcal{T}$.*

Ainsi on peut choisir une telle base $(\phi_1, ..., \phi_n)$ de E_λ relativement à la famille d'opérateurs $(T_a)_{a \in G}$. Pour tout $a \in G$, on a

$$T_a \phi_i = \chi_i(a) \phi_i$$

ce qui définit une fonction χ de G dans $\mathbb{T}$. On vérifie que c'est un morphisme de groupes et la relation

$$\chi_i(a) = (T_a \phi_i | \phi_i) = \phi_i * \tilde{\phi}_i(a)$$

nous donne la continuité de χ_i qui est donc un caractère de G. Or ϕ_i est aussi un vecteur propre de U associé à λ, donc $(f * \tilde{f} * \phi_i) * \tilde{\phi}_i = (\lambda \phi_i) * \tilde{\phi}_i$ c'est-à-dire $f * \tilde{f} * \chi_i = \lambda \chi_i \neq 0$ d'où $f * \chi_i \neq 0$. Par ailleurs, $f * \chi_i = (f|\chi_i)\chi_i$ et on a $(f|\chi_i) \neq 0$. Comme ceci est vrai pour toute fonction f de L^2, on en déduit que $\mathrm{Hom}(G, \mathbb{T})^\perp$ est vide et que les caractères de G forment une partie dense de l'espace de Hilbert $L^2(G)$. □

On a aussi le résultat de densité suivant :

Proposition 21. *Soit G un groupe compact. Toute fonction complexe continue sur G peut être uniformément approchée par une combinaison linéaire de caractères de G.*

Démonstration. Soit f une telle fonction et soit $\varepsilon > 0$. Si V est un voisinage de l'unité dans G tel que $|f(x) - f(y)| \leqslant \varepsilon$ pour $xy^{-1} \in V$ et si u est une fonction de $L^2(G)$ à support dans V d'intégrale égale à 1, on a :

$$\|f * u - f\|_\infty \leqslant \varepsilon$$

De plus, f est dans $L^2(G)$ et donc, il existe des $c_i \in \mathbb{C}$ et des $\chi_i \in \mathrm{Hom}(G, \mathbb{T})$ tels que :

$$\|f - \sum_{i=1}^{m} c_i \chi_i\|_2 \leqslant \frac{\varepsilon}{\|u\|_2}$$

et

$$\|f * u - \sum_{i=1}^{m} c_i \chi_i * u\|_\infty \leqslant \varepsilon$$

En sommant les deux expressions et en remplaçant $\chi_i * u$ par $(u|\chi_i)\chi_i$, on obtient :

$$\|f - \sum_{i=1}^{m} c_i (u|\chi_i)\chi_i\|_\infty \leqslant 2\varepsilon$$

□

On en tire la propriété annoncée :

Proposition 22. *Soit G un groupe compact. Si x est un élément de G différent de l'unité, il existe un caractère χ de G vérifiant $\chi(x) \neq 1$.*

Démonstration. Sinon, d'après la propriété précédente, toute fonction complexe f continue sur G vérifierait $f(x) = f(e)$. Or un espace compact est normal (proposition 1 du paragraphe 4.1 du chapitre 9 de [4]), c'est-à-dire que si on se donne deux fermés disjoints, il existe une fonction continue de l'espace dans $[0;1]$ qui vaut 1 sur un fermé et 0 sur l'autre.

□

On peut alors établir le théorème de Pontryagin pour les objets compacts de $\mathfrak{C}$.

Proposition 23. *Tout objet de $\mathfrak{C}$ compact vérifie le théorème de Pontryagin.*

Démonstration. Soit G un groupe abélien compact. L'application canonique φ de G dans son bidual est injective d'après la proposition précédente.

Par ailleurs, le dual de G est discret et donc isomorphe à son bidual (proposition 17). Il vient que $\varphi(G)^\perp = \{e\}$ où e est l'unité du tridual. En effet, si $y \in \varphi(G)^\perp$, alors il existe z dans le dual de G qui est envoyé sur y par l'application canonique ψ du dual de G dans le tridual et on a pour tout x dans G, $\langle \varphi(x), y\rangle = \langle \varphi(x), \psi(z)\rangle = \langle z, \varphi(x)\rangle = \langle x, z\rangle = 1$: z est le caractère constant égal à 1 et $\psi(z) = e$.

Par la proposition 8, $\widehat{(\hat{\hat{G}}/\varphi(G))} \simeq \varphi(G)^\perp = \{e\}$. Or si le dual d'un objet compact de $\mathfrak{C}$ est réduit à $\{e\}$, on sait par la proposition précédente que celui-ci est lui-même trivial : $\hat{\hat{G}}/\varphi(G)$ étant lui-même compact, $\hat{\hat{G}} = \varphi(G)$ et φ est donc surjective.

Par conséquent, φ est un morphisme de groupes continu bijectif et par compacité de G, φ est un isomorphisme. □

7 Théorème de Pontryagin

Nous démontrons dans un premier temps que les objets de $\mathfrak{C}$ de type compact vérifient le théorème de Pontryagin. Pour cela, nous établissons qu'ils sont limites projectives de groupes élémentaires. Commençons par quelques lemmes :

Lemme 7. *Tout sous-groupe cyclique H d'un objet de $\mathfrak{C}$ est discret ou relativement compact.*

Démonstration. Soit g un générateur de H. Si H n'est pas discret, $F = \{g^k\}_{k \geqslant 1}$ est dense dans $\bar{H}$ car e est un point d'accumulation de F. Soit V un voisinage symétrique compact de l'unité dans G. La famille $(g^k V)_{k \geqslant 1}$ recouvre $\bar{H}$ et donc $V \cap \bar{H}$. Par compacité, il existe m tel que $(g^k V)_{1 \leqslant k \leqslant m}$ recouvre $V \cap \bar{H}$. Montrons que cette famille recouvre également $\bar{H}$. En effet, si $x \in \bar{H}$, alors il existe un $l \geqslant 1$ minimal tel que $x \in g^l V$. Par symétrie de V, $g^l x^{-1}$ appartient à $V \cap \bar{H}$ et donc à un $g^k V$. Par symétrie de V, x appartient alors $g^{l-k} V$ et par minimalité de l, il vient $l \leqslant k \leqslant m$. $\bar{H}$ est donc relativement compact. □

Lemme 8. *Tout objet G de $\mathfrak{C}$ de type compact admet un sous-groupe discret D tel que G/D soit compact.*

Démonstration. Soit V un voisinage compact de l'unité engendrant G. Par compacité, il existe un recouvrement de $(a_k V)_{1 \leqslant k \leqslant m}$ de V^2. Si H est le sous-groupe engendré par les a_i, on montre par récurrence que $G = HV$. Par le théorème de structure des groupes abéliens de types finis, H est produit de groupes cycliques et par le lemme 7 est produit d'un groupe discret D et d'un groupe relativement compact K. On a alors $G = D\bar{K}V$ et $G/D \simeq (\bar{K}V)/D$ est compact. □

Lemme 9. *Tout objet de $\mathfrak{C}$ compact est limite projective de groupes élémentaires et G est isomorphe à $\varprojlim G/{H_i}^{\perp}$ où les H_i sont les sous-groupes ouverts de type fini du dual de G.*

Démonstration. Soit G un tel groupe. Par la proposition 23, G est dual d'un groupe abélien discret. Or un groupe abélien discret est limite inductive de ses sous-groupes ouverts de type fini H_i. Ainsi, par les proposition 14 puis 8, on a

$$G \simeq \varprojlim \hat{H}_i \simeq \varprojlim G/{H_i}^{\perp}$$

Or les H_i sont élémentaires et le dual d'un groupe élémentaire est élémentaire. □

Proposition 24. *Tout objet de $\mathfrak{C}$ de type compact est limite projective de groupes élémentaires.*

Démonstration. Soit G un tel objet, D un sous-groupe discret de G tel que $Q = G/D$ soit compact, p la surjection canonique de G sur Q, V un voisinage compact symétrique de l'unité dans G tel que $V^3 \cap D = \{e\}$. Il résulte de la preuve du lemme 8 que Q est limite projective des $\hat{N}_n \simeq Q/{N_n}^\perp$ où les N_n sont les sous-groupes ouverts de type finis de $\hat{Q}$. Quitte à se restreindre à un système cofinal, on peut supposer que les N_n contiennent $(V/D)^\perp$. Alors les ${N_n}^\perp$ sont contenus dans V/D.

Posons $H_n = p^{-1}({N_n}^\perp)$. $K_n = H_n \cap V$ est clairement compact. De plus, c'est un groupe. En effet, H_n est contenu dans DV et par conséquent K_n^2 est contenu dans $DV \cap V^2$ et même dans $V \cap V^2 = V$ car $V^3 \cap D = \{e\}$. Ainsi K_n est stable par multiplication. Or K_n est stable par inverse car V est symétrique et K_n est donc bien un groupe.

D'autre part, $Q/{N_n}^\perp$ est isomorphe à G/H_n et donc à $(G/K_n)/(H_n/K_n)$. Or H_n/K_n est discret. En effet, si h appartient à H_n il s'écrit $h = vd$ où v appartient à V et d appartient à D clairement inclus dans H_n. On en déduit que v appartient en fait à $V \cap H_n = K_n$. H_n est alors inclus dans $K_n D$ et on en tire l'existence d'une surjection continue de D dans H_n/K_n qui est donc discret. Or, si un groupe est isomorphe à un groupe quotient A/B où B est discret, alors il est localement isomorphe à A (proposition 19 du paragraphe 2.9 du chapitre 3 de [3]). Ainsi G/K_n est localement isomorphe à $Q/{N_n}^\perp$ et est donc élémentaire par la proposition 15.

Enfin, $\bigcap K_n = p^{-1}(\bigcap {N_n}^\perp) \cap V = \{e\}$ car $\bigcap {N_n}^\perp = G^\perp = \{e\}$, et par la proposition 12, G est isomorphe à $\varprojlim G/K_n$. □

Ainsi, les groupes de type compact vérifient le théorème de Pontryagin. Nous pouvons maintenant démontrer le théorème de Pontryagin dans toute sa généralité.

Théorème. *Tout objet de $\mathfrak{C}$ vérifie le théorème de Pontryagin.*

Démonstration. Soit G un objet de $\mathfrak{C}$. Fixons un voisinage V compact de l'unité dans G. Si S est une partie finie de G, on note G_S le sous-groupe de G engendré par $V \cup S$. Il est de type compact et G est isomorphe à $\varinjlim G_S$. D'où G vérifie le théorème de Pontryagin. □

Grâce à ce théorème, nous élargissons certains résultats précédents au cadre plus général des objets de $\mathfrak{C}$.

Corollaire 3. *Soit G un objet de $\mathfrak{C}$ et x un point de G distinct de l'unité. Il existe un caractère χ de G vérifiant $\chi(x) \neq 1$.*

Démonstration. Ceci découle de l'injectivité de φ. En effet, si $x \neq e$ alors $\varphi(x) \neq \varphi(e)$, donc il existe $\chi \in \hat{G}$ tel que $\chi(x) \neq \chi(e) = 1$. □

Corollaire 4. *Soit G un objet de $\mathfrak{C}$ et H un sous-objet de G. On a $H^{\perp\perp} \simeq H$.*

Démonstration. En effet, $H^\perp$ est un sous-groupe de $\hat{G}$, donc son orthogonal est un sous-groupe de $\hat{\hat{G}}$ identifié à G. Par définition, l'ensemble des éléments x de G tels que $H^\perp(x) = 1$ contient H. Montrons que ce sont exactement eux : si $x \notin H$ alors il existe $\chi \in (G/H)\widehat{}$ tel que $\chi(xH) \neq 1$ et la transposée de la projection $G \to G/H$ nous donne l'existence d'un caractère de $H^\perp$ ne valant pas 1 en x, d'après la proposition 8. D'où $H^{\perp\perp} \simeq H$. $\square$

Corollaire 5. *La dualité de Pontryagin conserve l'exactitude des suites de $\mathfrak{C}$ à morphismes stricts. En d'autres termes, le foncteur* $\mathrm{Hom}(-, \mathbb{T})$ *de la sous-catégorie de $\mathfrak{C}$ dont les morphismes sont stricts est exact.*

Démonstration. Pour cela, on utilise la propriété 8 et la généralisation suivante de la propriété 10 :

Lemme 10. *Soit G un objet de $\mathfrak{C}$ et H un sous-objet de G. La transposée $\hat{\imath}$ de l'injection canonique $i : H \to G$ induit un isomorphisme entre $\hat{G}/H^\perp$ et $\hat{H}$.*

Démonstration. D'après la proposition 8, $(\hat{G}/H^\perp)\widehat{} \simeq H^{\perp\perp} \simeq H$. D'après le théorème de Pontryagin, lorsqu'on passe au dual, on obtient $\hat{G}/H^\perp \simeq \hat{H}$.

De plus, dans cet isomorphisme, on a bien identifié les éléments de $\hat{H}$ à des restrictions à H de caractères de G : il s'agit bien de $\hat{\imath}$. $\square$

Alors, si on a une suite exacte d'objets de $\mathfrak{C}$ à morphismes stricts

$$1 \longrightarrow H \xrightarrow{i} G \xrightarrow{p} L \longrightarrow 1$$

on obtient la suite exacte duale à morphismes stricts suivante

$$1 \longrightarrow \hat{L} \xrightarrow{\hat{p}} \hat{G} \xrightarrow{\hat{\imath}} \hat{H} \longrightarrow 1$$

$\square$

Corollaire 6. *Le foncteur contravariant* $\mathrm{Hom}(-, \mathbb{T})$ *établit une antiéquivalence de catégories entre $\mathfrak{C}$ et elle-même.*

8 Applications

8.1 Dualité entre groupes d'automorphismes

Désormais, on identifie le bidual d'un objet G de $\mathfrak{C}$ à lui-même, et une base de voisinages de l'unité dans G est donc donnée par les

$$\Omega'(\hat{K}, V) = \{x ; \hat{K}(x) \subset V\}$$

où $\hat{K}$ est un compact de $\hat{G}$ et V un voisinage de 1 dans $\mathbb{T}$.

On note $\Sigma(G)$ le groupe des automorphismes de G muni de la topologie définie par la base de voisinages de l'unité

$$\mathcal{U}(K,U) = \{\tau ; \forall x \in K,\ \tau(x) \in Ux \text{ et } \tau^{-1}(x) \in Ux\}$$

où K parcourt les compacts de G et U les voisinages de l'unité dans G.

En posant $U = \Omega'(K,V)$, on remarque alors que les ensembles de la forme

$$\mathcal{V}(K,\hat{K},V) = \{\tau ; \forall x \in K,\ \hat{K}(\tau(x).x^{-1}) \subset U \text{ et } \hat{K}(\tau^{-1}(x).x^{-1}) \subset U\}$$

forment eux-mêmes une base de voisinages de l'unité de $\Sigma(G)$ quand K est un compact de G, $\hat{K}$ un compact de $\hat{G}$ et V un voisinage de 1 dans $\mathbb{T}$.

On a alors une dualité entre $\Sigma(G)$ et $\Sigma(\hat{G})$:

Proposition 25. *La transposition définie au paragraphe 3 établit un anti-isomorphisme bicontinu entre $\Sigma(G)$ et $\Sigma(\hat{G})$ (ou encore, $\Upsilon : \tau \mapsto \hat{\tau}$ est un homéomorphisme tel que $\Upsilon(\tau_1 \circ \tau_2) = \Upsilon(\tau_2) \circ \Upsilon(\tau_1)$ pour τ_1 et τ_2 dans $\Sigma(G)$).*

Démonstration. D'après la proposition 22, $\hat{G}$ sépare les points de G donc $\Upsilon : \tau \mapsto \hat{\tau}$ est injective. En outre, si $\sigma \in \Sigma(\hat{G})$, on peut voir $\hat{\sigma}$ comme un automorphisme de G et $\hat{\hat{\sigma}} = \sigma$ d'où Υ est surjective.

Montrons la propriété de morphisme de groupes. Soit τ_1 et τ_2 dans $\Sigma(G)$ et χ dans $\hat{G}$:

$$(\tau_1 \circ \tau_2)\widehat{\ } \circ \chi = \chi \circ (\tau_1 \circ \tau_2) = \hat{\tau}_1(\chi) \circ \tau_2 = (\hat{\tau}_2 \circ \hat{\tau}_1) \circ \chi$$

Donc Υ est un anti-isomorphisme.

Enfin, il reste à voir la continuité de Υ (en effet, il est son propre inverse et la bicontinuité en découle). Or, soit τ dans $\Sigma(G)$, χ dans $\hat{G}$ et x dans G, on a :

$$\chi(\tau(x).x^{-1}) = (\hat{\tau}(\chi).\chi^{-1})(x)$$

et

$$\chi(\tau^{-1}(x).x^{-1}) = (\hat{\tau}^{-1}(\chi).\chi^{-1})(x)$$

donc $\mathcal{V}(K,\hat{K},V)$ et son image par Υ sont exactement du même type, l'un dans $\Sigma(G)$ et l'autre dans $\Sigma(\hat{G})$: Υ est un homéomorphisme. $\square$

8.2 Dualité $\mathrm{Hom}(-,\mathbb{Q}/\mathbb{Z})$

La dualité la plus couramment utilisée en algèbre, et notamment en cohomologie galoisienne des corps p-adiques et des corps de nombres (traitée dans [2]), n'est pas celle exposée ici, mais plutôt la dualité consistant à associer à un groupe G le groupe $\mathrm{Hom}(G,\mathbb{Q}/\mathbb{Z})$ des morphismes continus de G

dans $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ où $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ est muni de la topologie discrète et $\mathrm{Hom}(G, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$ de la topologie de la convergence compacte.

Néanmoins, ces deux dualités coïncident dans certains cas et en particulier pour les groupes profinis et les groupes discrets de torsion.

Montrons le tout d'abord pour les groupes discrets de torsion. On peut voir $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ comme un sous-groupe de $\mathbb{T}$ et donc $\mathrm{Hom}(G, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$ comme un sous-groupe de $\mathrm{Hom}(G, \mathbb{T})$. Mais si G est discret de torsion, alors tout morphisme de G dans $\mathbb{T}$ est en fait un morphisme de G dans $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ car les éléments de G sont d'ordres finis, la continuité étant assurée par la topologie discrète de G, et on a $\mathrm{Hom}(G, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}) = \mathrm{Hom}(G, \mathbb{T})$.

De plus, les propositions concernant le dual d'un produit, d'un quotient et d'une limite projective (7, 8 et 13) sont également vérifiées par la dualité $\mathrm{Hom}(-, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$. Les démonstrations peuvent être reprises telles quelles.

Il vient que le dual d'un groupe profini est le même au sens de $\mathbb{T}$ ou de $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ par passage à la limite projective. De plus, un tel dual est limite inductive de duaux de groupes finis et est donc discret de torsion.

De même, les groupes discrets de torsion sont limites inductives de leurs sous-groupes ouverts de type fini. Comme le dual au sens de $\mathrm{Hom}(-, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$ d'un groupe discret de torsion s'identifie à celui de Pontryagin, il est limite projective de duaux de groupes de torsion de type fini, c'est-à-dire fini, et est donc profini.

Comme les deux dualités coïncident, le théorème de Pontryagin affirme que :

Proposition 26. *Le foncteur contravariant* $\mathrm{Hom}(-, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$ *établit une anti-équivalence de catégories entre la catégorie des groupes abéliens profinis et celle des groupes abéliens discrets de torsion.*

Ce résultat n'est plus vrai en général. Ainsi pour $\mathbb{Z}$, on a $\mathrm{Hom}(\mathbb{Z}, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}) = \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ et $\mathrm{Hom}(\mathbb{Q}/\mathbb{Z}, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}) = \prod_{p\in\mathbb{P}} \mathbb{Z}_p$ où $\mathbb{P}$ est l'ensemble des nombres premiers et $\mathbb{Z}_p$ l'anneau des entiers p-adiques. Le bidual de $\mathbb{Z}$ est alors le complété $\tilde{\mathbb{Z}}$ de $\mathbb{Z}$, c'est-à-dire la limite projective des quotients de $\mathbb{Z}$ par ses sous-groupes ouverts de type fini. En effet, $\tilde{\mathbb{Z}} = \varprojlim_{\mathbb{N}} \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} = \prod_p \mathbb{Z}_p$ car par définition $\mathbb{Z}_p = \varprojlim_{\mathbb{N}} \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}$.

Or les entiers p-adiques contiennent strictement les entiers. En effet, on peut voir les entiers p-adiques comme des sommes infinies $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n p^n$, les a_n étant des entiers prenant leurs valeurs entre 0 et $p-1$. La projection de l'entier p-adique dans un $\mathbb{Z}/p^N\mathbb{Z}$ est alors la somme tronquée en $n = N-1$, et un nombre p-adique est un entier si et seulement si la somme est finie (ou encore, les a_n sont tous nuls sauf un nombre fini d'entre eux).

Ainsi $\mathbb{Z}$ est strictement inclus dans son bidual au sens de $\mathrm{Hom}(-, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$.

L'exemple de $\mathbb{Z}$ se généralise de la façon suivante grâce au théorème de classification des groupes de type compact établi dans [1] (théorème 9.8) :

Proposition 27. *Si G est un objet de $\mathfrak{C}$ de type compact, totalement discontinu et σ-compact, alors son bidual au sens de* $\mathrm{Hom}(-, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$ *est isomorphe à son complété $\tilde{G}$.*

Ces hypothèses sur G sont nécessaires. En effet, le bidual de $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ est $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ puisque $\mathrm{Hom}(\tilde{\mathbb{Z}}, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}) = \mathrm{Hom}(\mathbb{Z}, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}) = \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$, tandis que le complété de $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ est le groupe trivial.

Références

[1] Edwin Hewitt et Kenneth A. Ross, *Abstract harmonic analysis 1*, Springer-Verlag, 1963

[2] G. Poitou, *Cohomologie galoisienne des modules finis*, Dunod, 1967

[3] N. Bourbaki, *Topologie générale, chapitre 1 à 4*, Hermann, 1971

[4] N. Bourbaki, *Topologie générale, chapitre 5 à 10*, Hermann, 1974