

Introduction à la contrôlabilité exacte à zéro des équations paraboliques

Armand KOENIG

11 Septembre 2015

Table des matières

1	Contrôlabilité exacte à zéro pour l'équation de la chaleur	2
1.1	Formulation du problème	2
1.2	Bref historique	2
2	Observabilité	3
2.1	Observabilité pour l'équation de la chaleur	3
2.2	Observabilité pour l'équation de la chaleur « basses fréquences »	3
2.3	Construction du contrôle à partir de la contrôlabilité des basses fréquences	4
3	Calcul pseudo-différentiel semi-classique	5
3.1	Opérateurs pseudo-différentiels semi-classiques	5
3.2	Inégalités sur les opérateurs pseudo-différentiels semi-classiques	6
4	Inégalités de Carleman	6
4.1	Inégalité de Carleman pour le laplacien	7
4.2	Inégalité d'interpolation	7
4.3	Inégalité spectrale	9
5	Autre stratégie de démonstration	9
6	Cas des équations paraboliques dégénérées	9

1 Contrôlabilité exacte à zéro pour l'équation de la chaleur

1.1 Formulation du problème

Le problème de la contrôlabilité exacte à zéro de l'équation de la chaleur consiste à savoir si, de tout état initial d'un solide, en chauffant ou refroidissant une partie prescrite de ce solide, il est possible de l'amener à une température nulle en temps fini.

Plus précisément, on se donne un ouvert borné régulier Ω de \mathbb{R}^n , un ouvert ω inclu dans Ω , une condition initiale y_0 et un instant T strictement positif. La question est de savoir s'il existe une fonction u dans $L^2([0, T] \times \omega)$ telle que la solution de l'équation de la chaleur avec second membre¹

$$\begin{aligned}\partial_t y - \Delta y &= u \mathbb{1}_\omega \\ y(0, \cdot) &= y_0 \\ y|_{\partial\Omega} &= 0\end{aligned}\tag{1}$$

vérifie $y(T) = 0$.

La réponse à ce problème est affirmative, et nous allons donner quelques éléments de la démonstration de ce fait.

Théorème 1 : *Soit Ω un ouvert borné régulier de \mathbb{R}^n . On se donne un ouvert non vide ω de Ω et un temps T strictement positif. Alors l'équation de la chaleur (1) est contrôlable en temps T sur ω , c.-à-d. que pour tout f_0 dans $L^2(\Omega)$ il existe un u dans $L^2([0, T] \times \omega)$ telle que la solution de :*

$$\begin{aligned}\partial_t y - \Delta y &= u \mathbb{1}_\omega \\ y(0, \cdot) &= y_0 \\ y|_{\partial\Omega} &= 0\end{aligned}$$

vérifie $y(T) = 0$. De plus, il existe une constante C telle qu'on puisse choisir u tel que $\|u\|_{L^2([0, T] \times \omega)} \leq C \|f_0\|_{L^2(\Omega)}$.

1.2 Bref historique

Les questions de contrôlabilité sont bien sûr inspirées par des problèmes concrets : comment agir sur un système physique ? Des résultats de contrôlabilité exacte

1. Il est possible, avec très peu de changement dans les démonstrations, de remplacer $-\Delta$ par n'importe quel opérateur elliptique $Py = -\sum a_{ij}(x)\partial_{ij}y + \sum b_i(x)\partial_i y + c(x)y$ avec $a_{ij} = a_{ji}$, a_{ij} à valeur réelles et pour tout x et ξ , $\sum a_{ij}(x)\xi_i\xi_j \geq k|\xi|^2$. Afin de ne pas alourdir l'exposé, nous ne le faisons pas.

existent depuis longtemps pour d'autres équations, comme par exemple les équations différentielles linéaires en dimension finie, des systèmes linéaires symétriques hyperboliques ou l'équation des ondes. Pour voir les résultats connus sur ce sujet il y a quelques années, on pourra lire l'article de D. L. Russell [5] de 1978 et le livre de J. L. Lions [4] de 1988.

Les démonstrations de la contrôlabilité exacte à zéro de l'équation de la chaleur datent de 1995, par G. Lebeau et L. Robbiano [3] et de 1996 par A. V. Fursikov et O. Yu. Imanuvilov [2].

2 Observabilité

2.1 Observabilité pour l'équation de la chaleur

Nous définissons ici l'observabilité, qui est une propriété équivalente à la contrôlabilité exacte à zéro :

Définition 2 : On dit l'équation de la chaleur sur le domaine Ω est observable sur ω en temps T s'il existe une constante C telle que pour toute condition initiale y_0 , la solution de l'équation de la chaleur :

$$\begin{aligned}\partial_t y - \Delta y &= 0 \\ y(0, \cdot) &= y_0 \\ y|_{\partial\Omega} &= 0\end{aligned}\tag{2}$$

vérifie

$$\int_{\Omega} |y(T, \cdot)|^2 \leq C \int_{[0, T] \times \omega} |y|^2$$

L'équivalence entre l'observabilité et la contrôlabilité exacte à zéro se démontre par dualité, en fait par théorème de Riesz sur les bons espaces L^2 . Comme la démonstration fait intervenir une intégration par partie, l'observabilité apparaît plutôt comme une propriété du système adjoint, qui est l'équation de la chaleur rétrograde, et où on fixe la condition finale et non la condition initiale. À renversement du temps près, on peut donc la voir comme l'équation de la chaleur.

2.2 Observabilité pour l'équation de la chaleur « basses fréquences »

Cette équivalence entre observabilité et contrôlabilité exacte est un phénomène général, et non spécifique à l'équation de la chaleur. Par exemple, on peut définir une notion d'observabilité « basses fréquences », associée à un problème de

contrôlabilité « basse fréquences » pour l'équation de la chaleur. Si on note E_k le sous-espace de L^2 engendré par les fonctions propres associées aux valeurs propres du laplacien dans Ω inférieures à k , on considère le problème de contrôlabilité exacte à zéro suivant ² :

$$\begin{aligned} \partial_t y - \Delta y &= \Pi_{E_k}(u \mathbb{1}_\omega) \\ y(0, \cdot) &= y_0 \in E_k \\ y|_{\partial\Omega} &= 0 \end{aligned} \quad (3)$$

Alors, on peut démontrer l'inégalité d'observabilité :

$$\|y(T)\|_{L^2}^2 \leq \frac{1}{T} B e^{K\sqrt{\lambda_k}} \int_0^T \int_\omega |y(t, x)|^2 dx dt \quad (4)$$

sur les solutions de l'équation de la chaleur basses fréquences (équation (3) avec $u = 0$). Cette inégalité d'observabilité implique la contrôlabilité à zéro de l'équation de la chaleur basses fréquences.

2.3 Construction du contrôle à partir de la contrôlabilité des basses fréquences

On peut construire un contrôle pour l'équation de la chaleur (complète, pas seulement basses fréquences) de la manière suivante : on découpe l'intervalle $[0, T]$ en des intervalles $[t_j, t_j + a_{j+1}]$ et $[t_j + a_{j+1}, t_j + 2a_{j+1}]$, où $t_{j+1} = t_j + 2a_{j+1}$. Sur $[t_j, t_j + a_{j+1}]$, on applique un contrôle amenant à zéro l'amplitude des fréquences inférieures à 2^j de la solution ; puis, sur $[t_j + a_{j+1}, t_{j+1}]$, on n'applique aucun contrôle, et on profite de la dispersion de l'équation de la chaleur.

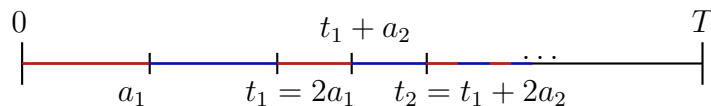


Fig. 1 – Construction du contrôle : sur les intervalles rouge, on applique un contrôle pour annuler l'amplitude des basses fréquences ; sur les intervalles bleus, on n'applique aucun contrôle, laissant ainsi la dispersion agir.

Pour chacune des étapes sur $[t_j, t_j + a_{j+1}]$, l'inégalité d'observabilité basse fréquence nous indique qu'on peut choisir un contrôle de norme $L^2([t_j, t_j + a_{j+1}] \times \omega)$ au plus $a_{j+1}^{-\frac{1}{2}} B e^{K2^j}$, auquel cas la norme L^2 de la solution y vérifie $\|y(t_j + a_{j+1})\|_{L^2} \leq$

2. Π_{E_k} désigne la projection orthogonale sur E_k

$(1 + Be^{K2^j})\|y(t_j)\|_{L^2}$. Lors de l'étape suivante, comme toutes les fréquences inférieures à 2^j ne sont plus présentes³, la norme de la solution vérifie $\|y(t_{j+1})\|_{L^2} \leq e^{-a_{j+1}2^{2j}}\|y(t_j + a_{j+1})\|$. En définitive, sur $[t_j, t_{j+1}]$, on a fait diminuer la norme de y d'un facteur de l'ordre de $\exp(K2^j - a_{j+1}2^{2j})$, comme 2^{2j} croit suffisamment plus vite que 2^j , on peut choisir les a_j de telle manière à ce que leur somme soit finie et que la norme de y tende vers 0 lorsque t tend vers 0, par exemple, on peut les prendre de la forme $a_j = c2^{-j\rho}$ pour tout ρ strictement entre 0 et 1. Dans le même temps, le contrôle ainsi construit à une norme L^2 qui est bien finie.

3 Calcul pseudo-différentiel semi-classique

La démonstration de l'observabilité de l'équation de la chaleur basse fréquence fait intervenir une inégalité dite « de Carleman », dont la démonstration se fait grâce à des outils de calcul pseudo-différentiel semi-classique, que nous présentons brièvement dans cette section.

3.1 Opérateurs pseudo-différentiels semi-classiques

Définition 3 : Soient m un réel. Un symbole d'ordre m est une famille $a = (a_h)_{0 < h < 1}$ de fonctions de classe C^∞ de $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ dans \mathbb{C} telle que, pour une certaine constante C indépendante de h , x et ξ (mais pouvant dépendre de α et β), on ait⁴ :

$$\left| \partial_x^\alpha \partial_\xi^\beta a_h(x, \xi) \right| \leq C \langle \xi \rangle^{m-|\alpha|}$$

Définition 4 : Soit m un réel. Un opérateur pseudo-différentiel d'ordre m est un opérateur sur l'espace de Schwartz, de la forme⁵ :

$$\text{Op}_h(a)(u)(x) = \frac{1}{(2\pi h)^n} \int_{\mathbb{R}^n} e^{ih^{-1}x \cdot \xi} a_h(x, \xi) \hat{u}(\xi/h) d\xi$$

où a est un symbole d'ordre m .

Théorème 5 : *L'adjoint formel d'un opérateur pseudo-différentiel d'ordre m $\text{Op}_h(a)$ ⁶ est encore un opérateur pseudo-différentiel semi-classique dont le symbole a^* est tel que⁷ $\frac{1}{h}(a^* - \bar{a})$ est un symbole d'ordre $m - 1$.*

3. C.-à-d. qu'en décomposant y sur les vecteurs propres du laplacien, la plus petite valeur propre intervenant est 2^{2j} .

4. On note $\langle x \rangle = (1 + x \cdot x)^{1/2}$

5. \hat{u} désigne la transformée de Fourier : $\hat{u}(\xi) = \int e^{-i\xi \cdot x} u(x) dx$

6. C.-à-d. l'opérateur $\text{Op}_h(a)^*$ tel que pour u et v dans l'espace de Schwartz, $(\text{Op}_h(a)(u)|v) = (u|\text{Op}_h(a)^*(v))$.

7. \bar{a} est le conjugué complexe de a .

De manière informelle, à un terme petit en fonction de h près, $\text{Op}_h(\bar{a})$ est l'adjoint formel de $\text{Op}_h(a)$.

Théorème 6 (de composition des opérateurs pseudo-différentiels) : *La composition de deux opérateurs pseudo-différentiels d'ordre m et m' respectivement est un opérateur pseudo-différentiel d'ordre $m + m'$. De plus, le symbole $a\sharp b$ de $\text{Op}_h(a) \circ \text{Op}_h(b)$ est asymptotiquement équivalent à la somme des $\frac{h^{|\alpha|}}{i^{|\alpha|}\alpha!} \partial_x^\alpha a \partial_\xi^\alpha b$, c'est-à-dire que*

$$\frac{1}{h^{n+1}} \left(a\sharp b - \sum_{|\alpha| \leq N} \frac{h^{|\alpha|}}{i^{|\alpha|}\alpha!} \partial_x^\alpha a \partial_\xi^\alpha b \right)$$

est un symbole d'ordre $m + m' - N - 1$.

3.2 Inégalités sur les opérateurs pseudo-différentiels semi-classiques

Nous donnons ici les inégalités sur les opérateurs pseudo-différentiels semi-classiques qui sont utilisées dans la démonstration de l'inégalité de Carleman.

Théorème 7 (de Calderon-Vaillancourt) : *Tout opérateur pseudo-différentiel d'ordre 0 s'étend en un opérateur continu de L^2 dans L^2 , dont la norme opérateur est majorée par une constante indépendante de h .*

Ce résultat s'étend aux opérateurs pseudo différentiels d'ordre m quelconque : un tel opérateur envoie H^{s-m} dans H^s , lorsqu'on muni ces espaces d'une norme dépendant de h , adaptée au cadre des opérateurs pseudo-différentiels semi-classiques, à savoir $\|u\|_s = \|\text{Op}_h(\langle \xi \rangle^s)(u)\|_{L^2}$. En particulier, si s est un entier, cette norme est équivalente à $\sum_{|\alpha| \leq s} h^{|\alpha|} \|\partial^\alpha u\|_{L^2}$. Dans la proposition suivante, ce sont également ces normes que nous considérons.

Propriété 8 (inégalité de Gårding semi-classique) : Soit K un compact de \mathbb{R}^n et a un symbole d'ordre m vérifiant pour une constante $C > 0$, $a_h(x, \xi) \geq C \langle \xi \rangle^m$, alors, pour tout $C' < C$, il existe $h_1 > 0$ tel que pour tout $h \leq h_1$, u fonction C^∞ à support de K , on a :

$$(\text{Op}_h(a)(u) | u)_{L^2} \geq C' \|u\|_{m/2}^2$$

4 Inégalités de Carleman

Nous énonçons ici les inégalités de Carleman que nous avons évoquées en introduction, et donnons quelques éléments sur leur utilisation dans la démonstration de l'inégalité d'observabilité basse fréquence discutée à la section 2.2.

4.1 Inégalité de Carleman pour le laplacien

L'inégalité de Carleman pour le laplacien nous dit que pour toute fonction ϕ dans une certaine classe de fonctions⁸, on a pour une certaine constante C pour h assez petit, et pour u à support dans un compact prédéfini :

$$h\|e^{\phi/h}u\|_{L^2}^2 + h^3\|e^{\phi/h}\nabla u\|_{L^2}^2 \leq Ch^4\|e^{\phi/h}\Delta u\|_{L^2}^2$$

Donnons les grandes idées de la démonstration. Montrer cette inégalité revient à montrer l'estimation sur l'opérateur conjugué P_ϕ défini par $P_\phi u = h^2 e^{\phi/h} \nabla(e^{-f/h} u)$ suivante :

$$h(\|v\|_{L^2}^2 + \|h\nabla v\|_{L^2}^2) \leq C\|P_\phi v\|_{L^2}^2$$

Pour ce faire, on écrit $P_\phi = P_2 + iP_1$, où P_1 et P_2 sont autoadjoints, à savoir $P_2 = \frac{1}{2}(P_\phi + P_\phi^*)$ et $P_1 = \frac{1}{2i}(P_\phi - P_\phi^*)$. Avec ces notations :

$$\|P_\phi v\|_{L^2}^2 = \|P_2 v\|_{L^2}^2 + \|P_1 v\|_{L^2}^2 + h \left(\frac{i}{h} ([P_2, P_1]v|v) \right)$$

où $[P_2, P_1]$ désigne le commutateur $P_2 P_1 - P_1 P_2$ des opérateurs P_2 et P_1 .

L'hypothèse que l'on fait sur ϕ indique en substance que si les normes $\|P_2 v\|$ et $\|P_1 v\|$ sont petites, alors le produit scalaire $\frac{i}{h} ([P_2, P_1]v|v)$ est positif et grand. Alors l'inégalité de Gårding nous donne l'estimation recherchée sur P_ϕ .

Pour démontrer l'inégalité d'observabilité, il nous faut également une version « au bord » de cette inégalité, où, en particulier, on autorise la dérivée normale de u au bord à être non nulle. Soit V un ouvert borné de la forme $] -r, r[\times V'$ et K un compact de V' . Alors si u est à support compact dans $[0, r'] \times K$, avec $u(0, \cdot) = 0$, alors, avec ∂_{x_0} la dérivée par rapport à la première variable :

$$h\|e^{\phi/h}u\|_{L^2}^2 + h^3\|e^{\phi/h}\nabla u\|_{L^2}^2 \leq C \left(h^4\|e^{\phi/h}\Delta u\|_{L^2}^2 + h^3 \int |e^{\phi(0,x')/h} \partial_{x_0} u(0, x')|^2 dx' \right)$$

La démonstration de cette inégalité est assez semblable à la démonstration de l'inégalité de Carleman précédente, mais la dérivée normale n'étant pas un opérateur pseudo-différentiel, il faut la traiter à part. En dehors de ce détail propre à compliquer les calculs, la démonstration suit le même plan.

4.2 Inégalité d'interpolation

Considérons u une fonction dans $H^2(]0, 1[\times \Omega)$ nulle au bord. On cherche à démontrer l'inégalité d'interpolation suivante : il existe $C > 0$, δ dans $]0, 1[$ indé-

8. Nous ne la détaillerons pas, mais elle contient en particulier les fonctions de la forme $e^{C\psi}$, où ψ est de classe C^∞ , dont le gradient ne s'annule pas, et pour C suffisamment grand.

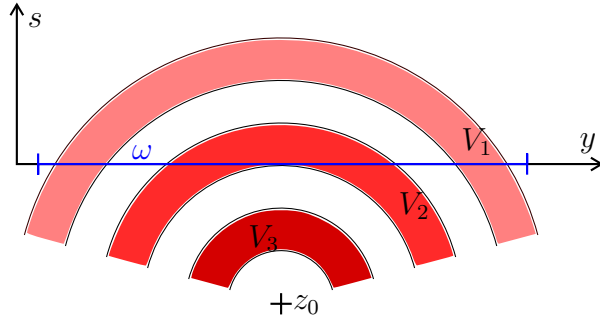


Fig. 2 – Ensembles V_j pour la démonstration de l’inégalité d’interpolation. Le support de $\nabla\chi$ est inclu dans $V_1 \cup V_3$.

pendant de u tels que⁹ :

$$\|u\|_{H^1(]0,1[\times\Omega)} \leq C \|u\|_{H^1(]1/3, 2/3[\times\Omega)}^{1-\delta} \left(\|(\partial_s^2 + \Delta)u\|_{L^2(]0,1[\times\Omega)} + \|\partial_s u(0, \cdot)\|_{L^2(\omega)} \right)^\delta$$

Choisissons un y dans ω et posons $z_0 = (-1, y)$. Posons également $\psi(z) = \frac{1}{|z-z_0|}$, ainsi que $0 < c_1 < c'_1 < c_2 < c'_2 = 1 < c_3 < c'_3$ et posons $V_j = \{c_j < \psi < c'_j\}$ (voir figure 2). Choisissons enfin χ une fonction plateau à support dans $\{c_1 < \psi < c'_3\}$ et valant 1 sur $\{c'_1 < \psi < c_3\}$.

On peut montrer que pour D assez grand, la fonction $\phi(s, y) = e^{D\psi(s, y)}$ satisfait les hypothèses nécessaires pour appliquer les inégalités de Carleman avec ϕ comme fonction de poids. Alors, en remarquant que $e^{Dc_j} < \psi < e^{Dc'_j}$ sur V_j , l’inégalité de Carleman au bord appliquée à χu implique que, pour tout $0 < h \leq h_1$:

$$e^{\frac{1}{h}e^{Dc_2}} \|u\|_{H^1(V_2)} \leq C' \left(e^{\frac{1}{h}e^{Dc'_1}} \|u\|_{H^1(]0,1[\times\Omega)} + e^{\frac{1}{h}e^{Dc'_3}} \left(\|(\partial_s^2 + \Delta)u\|_{L^2(]0,1[\times\Omega)} + \|\partial_s u(0, \cdot)\|_{L^2(\omega)} \right) \right)$$

En optimisant en h on obtient une version locale de l’inégalité recherchée :

$$\|u\|_{H^1(V_2)} \leq C \|u\|_{H^1(]1/3, 2/3[\times\Omega)}^{1-\delta} \left(\|(\partial_s^2 + \Delta)u\|_{L^2(]0,1[\times\Omega)} + \|\partial_s u(0, \cdot)\|_{L^2(\omega)} \right)^\delta$$

Cette inégalité peut alors être propagée en une version locale au voisinage de n’importe quel point de $]0, 1[\times\bar{\Omega}$. La compacité de $]1/3, 2/3[\times \bar{\Omega}$ nous permet d’en déduire la version globale recherchée.

9. On peut remplacer l’intervalle $]1/3, 2/3[$ par $] \alpha, 1-\alpha[$ pour un α fixé dans $]0, 1/2[$. Les constantes C et δ dépendent alors de α .

4.3 Inégalité spectrale

En appliquant l'inégalité d'interpolation décrite la section précédente à des combinaisons linéaires de fonctions de la forme $\frac{1}{\sqrt{\mu_j}} \text{sh}(s\sqrt{\mu_j})\Phi_j(x)$ (où Φ_j est vecteur propre du laplacien associé à la valeur propre μ_j), on obtient l'inégalité suivante : pour ω un ouvert de Ω , si u est combinaison linéaire de fonctions propres du laplacien, de valeurs propres inférieures à μ , alors :

$$\|u\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq B e^{K\sqrt{\mu}} \|u\|_{L^2(\omega)}^2 \quad (5)$$

C'est cette dernière inégalité qui permet d'obtenir l'inégalité d'observabilité pour l'équation de la chaleur basse fréquence (4) en contrôlant les constantes en fonctions de T et de la fréquence maximum, et donc de construire un contrôle pour l'équation de la chaleur, comme décrit dans la section 2.3.

5 Autre stratégie de démonstration

La stratégie de démonstration que nous avons brièvement exposé est due à Lebeau et Robbiano [3]. La démonstration de Fursikov et Imanuvilov [2], que nous avons mentionnée, repose sur une autre inégalité de Carleman, directement sur l'opérateur $\partial_t - \Delta$ plutôt que sur l'opérateur Δ . Une telle inégalité de Carleman, qui a une forme différente que celles dont nous avons discuté¹⁰, est de démonstration un peu plus complexe, mais il est possible de la faire sans calcul pseudo-différentiel. On peut alors en déduire directement l'inégalité d'observabilité pour l'équation de la chaleur (et pas seulement pour l'équation de la chaleur basses fréquences).

6 Cas des équations paraboliques dégénérées

En ce qui concerne les équations paraboliques dégénérées, les résultats sont plus récents. Certaines équations sont contrôlables en temps quelconque, pour d'autres il faut un temps minimum, et d'autres équations encore ne sont contrôlables même en temps arbitrairement grand.

Par exemple, pour l'équation $\partial_t u - \partial_x^2 u - x^2 \partial_y^2 u = 0$ sur $\Omega =]-1, 1[\times]0, 1[$, d'après l'article [1] de Beauchard, Cannarsa et Guglielmi, selon la forme de ω , on peut avoir contrôlabilité en temps arbitrairement petit ou contrôlabilité uniquement en temps assez grand (et pour certaines formes de ω , c'est encore un problème ouvert). En ce qui concerne cet article, les auteurs considèrent les coefficients de Fourier suivant la seconde variable, et regardent les équations qu'ils

10. En particulier, h devient la fonction du temps $h(t) = \epsilon t(T - t)$ où ϵ est une constante suffisamment petite.

vérifient ; il s'agit d'équations paraboliques non dégénérées, et ils se ramènent donc à la contrôlabilité uniforme d'une famille d'équations.

De façon informelle, cela leur donne une estimation suivant une variable, qu'ils combinent avec une estimation semblable suivant l'autre variable pour obtenir une inégalité d'observabilité pour l'équation de départ.

Contrairement au cas des équations paraboliques non dégénérées, pour lesquelles on dispose de résultats assez généraux, les équations paraboliques dégénérées sont regardées au cas par cas. Des théorèmes généraux sont encore à inventer.

Références

- [1] Karine BEAUCHARD, Piermarco CANNARSA et Roberto GUGLIELMI : Null controllability of grushin-type operators in dimension two. *arXiv preprint arXiv :1105.5430*, 2011.
- [2] A.V. FURSIKOV et O.Y. IMANUVILOV : *Controllability of evolution equations*. Suhak kangūirok. Seoul National University, 1996.
- [3] G. LEBEAU et L. ROBBIANO : Contrôle exact de l'équation de la chaleur. *Séminaire Équations aux dérivées partielles (dit "Goulaouic-Schwartz")*, pages 1–11, 1994-1995.
- [4] J.L. LIONS : *Contrôlabilité exacte, perturbations et stabilisation de systèmes distribués : Perturbations*. Recherches en Mathématiques Appliquées. Masson, 1988.
- [5] David L RUSSELL : Controllability and stabilizability theory for linear partial differential equations : recent progress and open questions. *Siam Review*, 20(4): 639–739, 1978.