Plongements d'ordres dénombrables et propriété bqo

Arnaud ETEVE, Robin LEMAIRE
Sous la direction de Noé de Rancourt

La conjecture de Fraïssé

Le but de ce mémoire est d'exposer la preuve de Laver de la conjecture de Fraïssé comme a fait Simpson [6], ainsi que certains résultats analogues. Commençons par énoncer cette conjecture.

Définition 1. Soient $(L, \leqslant_L)$ et $(M, \leqslant_M)$ deux ensembles totalement ordonnés. Un morphisme de L dans M est une application croissante f de L dans M, c'est à dire que si $x, y \in L, x \leqslant_L y \implies f(x) \leqslant_M f(y)$.

L et M sont dits isomorphes s'il existe un isomorphisme : une bijection croissante entre L et M.

Définition 2. Soient L et M deux ensembles totalement ordonnés. On notera $L \leqslant M$ si L se plonge dans M, c'est à dire qu'il existe un sous-ensemble de M isomorphe à L. L'ordre $\leqslant$ est appelé l'ordre de plongement.

Notation. On notera également $L \equiv M$ si $L \leqslant M$ et $M \leqslant L$, et $L < M$ si $L \leqslant M$ et $M \nleqslant L$. On notera enfin $L \perp M$ si L et M sont incomparables, c'est à dire $L \nleqslant M$ et $M \nleqslant L$.

Théorème 3 (Conjecture de Fraïssé)**.** *La conjecture de Fraïssé est l'assertion selon laquelle parmi les ensembles totalement ordonnés dénombrables, il n'y a pas de suite décroissante infinie*

$$L_0 > L_1 > \cdots > L_n > \ldots, \ (n \in \omega)$$

ni d'antichaîne infinie (suite d'éléments deux à deux incomparables)

$$L_i \perp L_j \ (i, j \in \omega, i \neq j).$$

Afin d'arriver à ce résultat nous allons dans la partie 1 rappeler le théorème de Ramsey.

Puis dans la partie 2 nous allons étudier les wqo, et montrer que la conjecture de Fraïssé correspond à montrer qu'une certaine classe d'ordres est wqo. Mais on montrera que Q^{Ord} n'est pas forcément wqo si Q l'est, ce qui est un obstacle à cette preuve. Cela nous amènera donc à étudier les bqo, une notion plus forte, dans les parties suivantes.

De la même manière que l'on utilisait le théorème de Ramsey pour étudier les wqo, nous utiliserons un théorème de Ramsey généralisé, le théorème de Galvin et Prikry que nous montrerons dans la partie 3.

Nous montrerons alors dans la partie 4 des propriétés des bqo et notamment le théorème de Nash-Williams :Q bqo si, et seulement si Q^{Ord} bqo.

Ensuite, nous montrerons effectivement la conjecture de Fraïssé dans la partie 5 en définissant la classe $\mathcal{S}$ des ordres dispersés dont on montrera qu'elle est bqo.

La partie 6 présentera le contre-exemple de Dushnik, Miller et Sierpinski qui montre que la classe des ordres totaux n'est pas wqo.

Les parties suivantes serviront à généraliser la conjecture de Fraïssé à la classe $\mathcal{M}$ des ensembles σ-dispersés.

Définition 4 (Quasi-ordre)**.** $(Q, \leqslant)$ est un quasi-ordre (qo) si $\leqslant$ est une relation binaire réflexive et transitive sur Q.

Notation. Si $x \leqslant y$ et $y \leqslant x$, on notera $x \equiv y$.

Si $x \leqslant y$ et $y \nleqslant x$, on notera $x < y$.

Si $x \nleqslant y$ et $y \nleqslant x$, on note $x \perp y$.

Remarque 5. $\equiv$ est une relation d'équivalence. La relation $\leqslant$ passe au quotient pour $\equiv$ et la relation induite est un ordre partiel.

Notation. Dans tout le mémoire on notera $Q, Q', Q_q, \dots$ des ensembles quasi-ordonnés ou partiellement ordonnés.

Définition 6 (Somme d'ordres)**.** Si $(Q_0, \leqslant_0)$ et $(Q_q, \leqslant_q)_{q \in Q_0}$ sont des ordres, alors on définit la somme $Q = \sum_{Q_0} Q_q$ comme l'ensemble $\bigsqcup Q_q$ ordonné par

Si $x \in Q_q$ et $y \in Q_{q'}$,

$x \leqslant y$ ssi $q <_0 q'$ ou $q = q'$ et $x \leqslant_q y$

Définition 7 (Produit d'ordres)**.** Si $(Q_1, \leqslant_1)$ et $(Q_2, \leqslant_2)$ sont des ordres, on définit leur produit $Q = Q_1 \times Q_2$ par l'ensemble $Q_1 \times Q_2$ ordonné par l'ordre lexicographique.

1 Théorème de Ramsey

Pour la preuve de Fraïssé, nous allons avoir besoin d'introduire les notions de wqo et de bqo, qui seront liées au théorème de Ramsey. Nous allons donc le rappeler.

Notation. On notera, pour A un ensemble et κ un cardinal, $[A]^\kappa$ l'ensemble des parties de A de cardinal κ. On notera en particulier $[A]^\omega$ l'ensemble des parties dénombrables de A, et de même $[A]^{<\omega}$ l'ensemble des parties finies de A.

Théorème 8 (Ramsey)**.** *Soient $k, d > 0$ des entiers et $C : [\omega]^d \longrightarrow k$ un coloriage en k couleurs des parties à d éléments de ω. Alors il existe A une partie infinie de ω telle que C est constante sur $[A]^d$.*

Démonstration. On prouve le théorème par récurrence sur d, à k fixé.

Initialisation :

Si $d = 1$, le principe de Dirichlet assure l'existence d'une partie infinie monochrome.

Hérédité :

On suppose le théorème de Ramsey vrai pour tout $n \leqslant d$.

Soit C une coloration de $[\omega]^{d+1}$, a_0 un entier, et notons $M = \omega \setminus \{a_0\}$. Alors C induit une coloration C' de $[M]^d$ définie par

$$\forall N \in \omega, C'(N) = C(N \cup \{a_0\})$$

Par hypothèse de récurrence, comme toute partie infinie de ω est isomorphe à ω, on peut appliquer le théorème de Ramsey à $[M]^d$, et on obtient une partie N_0 infinie de M telle que C' est constante sur $[N_0]^d$. Ainsi C est constante sur $\{a_0\} \cup N_0$.

On peut ensuite construire de la même manière $a_1 \in N_0$ et une partie infinie N_1 de N_0 ayant la même propriété, et ainsi par récurrence on obtient une suite $(a_i)_{i\in\omega}$ telle que tout ensemble à $d+1$ éléments de la forme $\{a_{i_1}, \dots a_{i_{d+1}}\}$ avec $i_1 < \cdots < i_{d+1}$ a une couleur par C qui dépend uniquement de i_1.

De plus, par le cas $d = 1$, il existe une infinité de n tels que cette couleur est la même pour les i_n.

Par construction, l'ensemble de ces a_{i_n} a la propriété voulue, ce qui prouve l'hérédité. □

2 Well Quasi Orderings

La propriété que Fraïssé attribue à l'ensemble des ordres dénombrables n'est pas propre à cet ensemble. C'est même la définition des well quasi-orderings qui suit. Nous allons donc étudier les propriétés de ces objets pour comprendre comment montrer la conjecture.

Définition 9 (Quasi-ordre bien fondé)**.** Si $(Q, \leqslant)$ est un qo, $\leqslant$ est bien fondé s'il n'y a pas de suite infinie strictement décroissante, c'est à dire de suite infinie $x_1 > x_2 > \cdots > x_n \ldots$

Définition 10 (Antichaîne)**.** Une partie $A \subseteq Q$ est une antichaîne si $\forall x, y \in A, x \neq y \implies x \perp y$.

Théorème Définition 11 (Well quasi-ordering)**.** Soit $(Q, \leqslant)$. Les affirmations suivantes sont équivalentes :

- (i). $(Q, \leqslant)$ n'a pas d'antichaîne infinie, et $\leqslant$ est bien fondée.
- (ii). $\forall f : \omega \longrightarrow Q, \exists i < j,\ f(i) \leqslant f(j)$
- (iii). $\forall f : \omega \longrightarrow Q, \exists (i_0 < i_1 < \dots), f(i_0) \leqslant f(i_1) \leqslant \dots$
- (iv). $\forall X \subseteq Q, \exists F \subseteq X$ fini tel que $\forall q \in X,\ \exists r \in F,\ r \leqslant q$
- (v). Tout ordre total sur $Q/\equiv$ compatible avec $\leqslant$ est un bon ordre. (Un ordre total $\preceq$ sur $Q/\equiv$ est compatible avec $\leqslant$ si, et seulement si $\forall x, y \in Q, x \leqslant y \implies x \preceq y$)

Si elles sont vérifiées, on dit que $(Q, \leqslant)$ est un well quasi-ordering (wqo)

Démonstration. Montrons maintenant l'équivalence entre les cinq définitions précédentes. $(i) \implies (iii)$: Soit $f : \omega \longrightarrow Q$. On en déduit un coloriage de

$$[\omega]^2 : C(\{i, j\}) = \begin{cases} 0 \text{ si } i < j \text{ et } f(i) \leqslant f(j) \\ 1 \text{ si } i < j \text{ et } f(i) > f(j) \\ 2 \text{ si } i < j \text{ et } f(i) \perp f(j) \end{cases}$$

Alors par le théorème de Ramsey, il existe une partie $H \in [\omega]^\omega$ telle que C soit monochrome sur $[H]^2$. Comme $\leqslant$ est bien fondé et Q n'a pas d'antichaîne infinie, cette couleur ne peut être ni 1 ni 2. Il existe donc une suite croissante.

$(iii) \implies (ii)$ est immédiat.

$(ii) \implies (i)$: Supposons une suite infinie $(x_i, i < \omega)$ telle que $\forall i < j,\ x_i \nleqslant x_j$, alors $f : i \longmapsto x_i$ ne satisfait pas à (ii).

$(ii) \implies (iv)$: Supposons qu'il existe $X \subseteq Q$ tel que $\forall F \subseteq X$ fini, $\exists q \in X, \forall r \in F,\ r \nleqslant q$. En partant d'un $q_0 \in X$, on construit alors une suite $(q_i)_{i<\omega}$ telle que $\forall i < j,\ q_i \nleqslant q_j$, en prenant des $F_n = \{q_0, \dots q_n\}$ et par hypothèse il existe $q_i \nleqslant q_{n+1}$ pour tout $i \leqslant n$ Ce qui contredit (ii)

$(iv) \implies (ii)$: Soient $f : \omega \longrightarrow Q$ et $X = \{f(i), i < \omega\}$ Il existe alors $F \subseteq X$ fini tel que $\forall y \in X, \exists x \in F, x \leqslant y$ Alors $F = \{f(i_1), \dots, f(i_n)\}$ avec $i_1 < \dots < i_n$ donc $\exists j < n, f(i_j) \leqslant f(i_n + 1)$ et Q est un wqo.

$(i) \implies (v)$: Soit $\preceq$ un ordre total sur $Q/\equiv$ compatible avec $\leqslant$. Soit alors (x_i) une suite. Alors il existe $i < j, f(i) = x_i \leqslant x_j$ donc $\bar{x}_i \preceq \bar{x}_j$, donc $(\bar{x}_i)$ n'est pas strictement décroissante et $\preceq$ est un bon ordre.

$(v) \implies (i)$: On utilisera le lemme suivant : Tout ordre partiel $\leqslant$ se prolonge en un ordre total. En effet si on considère l'ensemble des ordres $\preceq$ tels que $\leqslant$ est inclus dans $\preceq$, cet ensemble aura un élément maximal pour l'inclusion qui sera un ordre total.

Montrons que $\leqslant$ est bien fondé : Supposons $(x_i) \in Q^\omega$ telle que $x_1 > x_2 > \dots > x_n > \dots$

Soit $\preceq$ un ordre total sur $Q/\equiv$ compatible avec $\leqslant$. ($\leqslant$ se restreint en un ordre partiel sur $Q/\equiv$, lequel se prolonge par le lemme.)

Alors $(\bar{x}_i) \in Q/\equiv$ est strictement décroissante pour $\preceq$, ce qui est impossible par par (v), $\preceq$ est un bon ordre. Donc $\leqslant$ est un bon ordre.

Si maintenant $(x_i) \in Q^\omega$ est une antichaîne, si (r_i) est une énumération bijective de $\mathbb{Q}$, on prolonge l'ordre sur $Q/\equiv$ par $\bar{x}_i < \bar{x}_j \Leftrightarrow r_i < r_j$; en effet les $\bar{x}_i$ étant incomparables deux à deux, les ordonner deux à deux conserve le caractère d'ordre de $\leqslant$ car l'ordre sur $\mathbb{Q}$ est bien un ordre.

On prolonge ensuite cet ordre en $\leqslant^*$ total, mais $\leqslant^*$ possède une partie isomorphe à Q donc il n'est pas bien ordonné. Ainsi $(Q, \leqslant)$ n'a pas d'antichaîne infinie, donc on conclut que Q est wqo. □

Propriété 12. *(i). Si $(Q, \leqslant)$ est wqo et $(Q', \leqslant')$ est qo, si $f : (Q, \leqslant) \longrightarrow (Q', \leqslant')$ est un morphisme alors $f(Q)$ est wqo*

(ii). Si $n \in \mathbb{N}$, $(Q_i, \leqslant_i)_{i \leqslant n}$ sont wqo, alors $\prod_{i=1}^n Q_i$ est wqo pour l'ordre produit $(x_1, \dots, x_n) \leqslant (y_1, \dots, y_n) \Leftrightarrow \forall i,\ x_i \leqslant_i y_i$

Démonstration. (i) Soit $f : Q \longrightarrow Q'$. Soit $g : \omega \longrightarrow f(Q)$. On prend des $(q_i \in Q)$ tels que $g(i) = f(q_i)$. Alors il existe $i < j$ tels que $q_i \leqslant q_j$ car Q est wqo. Alors comme f est un morphisme, $f(q_i) \leqslant f(q_j)$ donc $g(i) \leqslant g(j)$ Cela étant vrai pour tout tel g, $f(Q)$ est wqo par la définition équivalente (ii).

(ii) Si $Q = \prod_{i=1}^{n} Q_i$, Soit $f : \omega \longrightarrow \prod_{i=1}^{n} Q_i$ une application. On note $p_i : \prod_{i=1}^{n} Q_i \longrightarrow Q_i$ la i-ème projection. Alors comme Q_1 est wqo, par la définition (iii), il existe $H_1 \in [\omega]^{\omega}$ telle que $p_1 \circ f_{|H_1}$ soit croissante. Puis si l'on a H_k, on trouve comme Q_{k+1} est wqo un $H_{k+1} \subseteq H_k$ infini tel que $p_{k+1} \circ f_{|H_{k+1}}$ soit croissante. Ainsi on obtient H_n, et $f_{|H_n}$ est croissante, et finalement, $\prod Q_i$ est wqo. □

Définition 13. Soit $(Q, \leqslant)$ un qo. On dit que $f : \omega \longrightarrow Q$ est mauvaise si $\forall i, j,\ i < j \implies f(i) \nleqslant f(j)$.

Et f est dite mauvaise minimale si

Pour toute fonction $g : \omega \longrightarrow Q$, telle que l'on a $\begin{cases} \forall i \exists k\ g(i) \leqslant f(k) \\ \exists i, k\ g(i) < f(k) \end{cases}$

g n'est pas mauvaise.

Remarque 14. $(Q, \leqslant)$ est wqo si, et seulement aucune suite de Q n'est mauvaise.

Propriété 15. *Soit $(Q, \leqslant)$ bien fondé, mais pas wqo. Alors il existe une suite mauvaise minimale.*

Démonstration. Soit $f(0)$ minimal tel que $f(0)$ est le premier terme d'une mauvaise suite (un tel élément minimal existe car Q est bien quasi-ordonné). Soit $f(1)$ minimal tel que $f(0), f(1)$ sont les premiers termes d'une mauvaise suite. On construit ainsi f par récurrence, et par construction f est une mauvaise suite. Soit alors $g : \omega \longrightarrow Q$ telle que $\forall i, \exists k, g(i) \leqslant f(k)$
et $\exists i, k, g(i) < f(k)$. On suppose g mauvaise. Montrons que quitte à prendre une sous-suite de g, on peut supposer qu'il existe j tel que $g(0) < f(j)$ et que $\forall i \geqslant 0, \exists k \geqslant j, g(i) \leqslant f(k)$.

Prenons j_0 le plus petit entier tel qu'il existe i_0, $g(i_0) < f(j_0)$. Supposons alors que pour une infinité de $i_1 > i_2 > j_0$, $g(i_1), g(i_2) \leqslant f(j_1)$, où $j_1 < j_0$. Alors par minimalité de j_0,$g(i_1)) \equiv g(i_2)$, ce qui est impossible car g est mauvaise. On a donc pour une infinité de i, $\exists k \geqslant j_0, g(i) \leqslant f(k)$, et on extrait cette sous-suite, commençant à i_0.

Alors soit i tel que $\forall k \geqslant j,\ g(i) \nleqslant f(k)$. Or il existe un $l < j$ tel que $g(i) \leqslant f(l)$ par construction de g donc comme f est une mauvaise suite, $g(i) \ngeqslant f(k)$. (sinon on aurait $f(k) \leqslant f(l)$).

Donc montrons que la suite $(f(0), \dots f(j-1), g(0), g(1), \dots)$ est mauvaise : On a déjà g et f mauvaises, et de plus, si $k < j$, on a vu que $\forall i, f(k) \nleqslant g(i)$, sinon comme il existe $l < j, g(i) \leqslant f(l)$, ça contredirait le fait que f est mauvaise. Or $g(0) < f(j)$, ce qui contredit la minimalité du choix de $f(j)$. Ainsi g n'est pas mauvaise et f est bien minimale. $\square$

Propriété 16. *Soit $(Q, \leqslant)$ bien fondé mais pas wqo, et $f : \omega \longrightarrow Q$ une suite mauvaise minimale. Alors $\{q \mid \exists i, q < f(i)\}$ est wqo.*

Démonstration. Supposons que non. Par le théorème précédent, il existe une mauvaise suite dans $\{q \mid \exists i, q < f(i)\}$, ce qui contredit la minimalité de f dans Q. $\square$

Propriété 17. *Toute somme wqo de wqo est wqo.*

Démonstration. Supposons que f est une mauvaise suite de $Q = \sum_{q \in Q_0} Q_q$.

Alors pour tout $q \in Q_0$, $\{n \in \omega \mid f(n) \in Q_q\}$ est finie car chaque Q_q est wqo donc n'a pas de mauvaise suite.

Ainsi $\{q \in Q_0 \mid \exists n \in \omega, f(n) \in Q_q\}$ est infini, ce qui est impossible car on aurait alors une mauvaise suite de Q_0, qui est wqo. $\square$

Définition 18. Si Q est un ensemble, on note $Q^{<\omega} = \{f : n \longrightarrow Q,\ n < \omega\}$.

Si Q est muni de $\leqslant$, on munit $Q^{<\omega}$ de l'ordre suivant :

$s \leqslant t \Leftrightarrow \exists H : \operatorname{dom} s \longrightarrow \operatorname{dom} t$ strictement croissante telle que $\forall i \in \operatorname{dom} s,\ s(i) \leqslant t(H(i))$

On définit également $Q^{\omega} = \{f : \omega \longrightarrow Q\}$ muni de l'ordre

$s \leqslant t \Leftrightarrow \exists H : \omega \longrightarrow \omega$ strictement croissante telle que $\forall i \in \omega,\ s(i) \leqslant t(H(i))$

Théorème 19. *Si Q est wqo alors $Q^{<\omega}$ est wqo.*

Démonstration. Montrons dans un premier lieu que $Q^{<\omega}$ est bien fondé. Soit $s_1 \geqslant s_2 \geqslant \dots \geqslant s_n \geqslant \dots$ Alors $\operatorname{dom} s_1 \geqslant \operatorname{dom} s_2 \geqslant \dots \geqslant \operatorname{dom} s_n \geqslant \dots$ Or ces domaines sont des ordinaux, donc la suite des domaines de s_k stationne. On a alors à partir d'un certain rang (supposons 0) les s_i de domaine n, et donc pour tout $k < n, s_0(k) \geqslant s_1(k) \geqslant \dots$, donc comme Q est wqo, $\leqslant$ est bien fondé et les $(s_i(k))_{i \in \omega}$ stationnent pour tout $k < n$.

Finalement, les s_k stationnent et $Q^{<\omega}$ est bien fondé.

S'il n'est pas wqo, il existe une suite $f : \omega \longrightarrow Q$ mauvaise minimale. On prend pour tout entier i, $s_i = f(i)$. On a pour tout i, $|s_i| > 0$ car f est mauvaise. Étudions alors la suite (s'_i) où la suite s' est la suite s de laquelle on a enlevé le dernier élément (en effet toutes les suites s_i sont finies). On a pour tout i, $s'_i{}^\frown x_i = s_i$. Or pour tout i, $s'_i < s_i$, donc par minimalité de s_i, on peut trouver une extractrice ϕ telle que $s'_{\phi(j)}$ soit croissante. Or Q est wqo donc $\exists i < j,\ x_{\phi(i)} \leqslant x_{\phi(j)}$ et alors $s_{\phi(i)} \leqslant s_{\phi(j)}$ donc (s_i) n'est pas mauvaise, donc finalement $Q^{<\omega}$ est wqo. $\square$

Si la propriété wqo passe aux suites finies,elle n'est pas vraie en général si l'on considère les suites infinies sur un wqo comme nous allons le voir dans l'exemple suivant (l'exemple de Rado). Il faudra pour cela définir des conditions plus fortes : les ensembles bqo.

Exemple 20. On définit $Q_1 = \{(i,j),\ i < j < \omega\}$ muni de l'ordre suivant : $(i,j) \leqslant (k,l) \Leftrightarrow (i = k \text{ et } j \leqslant l)$ ou $j < k$.

Alors Q_1 est wqo et Q_1^ω ne l'est pas. Montrons que Q_1 est wqo. Supposons que l'on ait une suite $(x_1,y_1) \nleqslant (x_2,y_2) \nleqslant \dots$ de Q_1. Alors $\forall i \in \mathbb{N},\ y_1 \geqslant x_i$, donc on peut trouver une sous-suite dont la première composante est constante, donc sa deuxième composante est strictement décroissante, ce qui est impossible. Donc Q_1 est wqo. Montrons alors que Q_1^ω ne l'est pas. Posons

$$\begin{aligned} f : \omega &\longrightarrow Q_1^\omega \\ i &\longmapsto (j \longmapsto (i, j+i+1)) \end{aligned}$$

Soient $i \neq k \in \omega$, alors pour $j > i$ et $l > k$, $(i,j) \leqslant (k,l) \Leftrightarrow j < k$ donc j ne peut prendre qu'un nombre fini de valeurs, ce qui rend donne $f(i) \nleqslant f(k)$, et par symétrie on obtient $f(i) \perp f(k)$ et donc Q_1^ω n'est pas wqo.

Remarque 21. On peut cependant montrer que si Q wqo alors Q^ω est bien fondé. Et que si Q^ω n'est pas wqo et Q est wqo alors Q a un sous ensemble isomorphe à Q_1 (voir [3]).

3 Théorème de Galvin et Prikry

Le théorème de Galvin et Prikry est une généralisation du théorème de Ramsey sur les parties des parties infinies de ω. Cela ne marchera pas directement, il nous faudra se restreindre aux boréliens d'une topologie.

Notation. Notons $[\omega]^{<\omega}$ l'ensemble des parties finies de ω.

Pour $s \in [\omega]^{<\omega}$ et $U \in [\omega]^{\omega}$, on note $U/s = \{n \in U : \forall i \in s : n > i\}$ et $[s, U] = \{V \in [\omega]^{\omega} : s \subseteq V \subseteq s \cup U\}$.

On donne à $[\omega]^{\omega}$ la topologie dont une base d'ouverts est formé des ensembles de la forme $[s, \omega/s]$.

Ainsi un ouvert de cette base est l'ensemble des suites dont les $|s|$ premiers termes forment la même suite finie s

Théorème 22. *Soit O un ouvert de $[\omega]^{\omega}$. Alors il existe un $U \in [\omega]^{\omega}$ tel que soit $[U]^{\omega} \subseteq O$, soit $[U]^{\omega} \cap O = \emptyset$.*

Notation. On définira les notions de bon et très bon ensemble : $[s, U]$ est bon s'il n'y a pas de $V \in [U]^{\omega}$ tel que $[s, V] \subseteq O$. $[s, U]$ est très bon s'il est bon et si pour tout $n \in U$, $[s \cup \{n\}, U/\{n\}]$ est bon également.

Lemme 23. *Si $[s, U]$ est bon, il existe un $V \in [U]^{\omega}$ tel que $[s, V]$ est très bon.*

Démonstration du Lemme. Supposons le contraire : soit $W_0 = U/s$. On va construire par récurrence des suites (n_i) et (W_i) qui amèneront une contradiction.

On suppose qu'on a $n_0 < \cdots < n_{i-1} < \min W_i$, avec $W_i \subseteq U$. Par hypothèse, $[s, W_i]$ est bon mais pas très bon , donc on peut choisir $n_i \in W_i$ tel que $[s \cup n_i, W_i/n_i]$ n'est pas bon. On peut donc choisir un $W_{i+1} \subseteq W_i/n_i$ tel que $[s \cup n_i, W_{i+1}] \subseteq O$

Enfin on pose $V = \{n_i : i \in \omega\}$. Ainsi on a $[s, V] \subseteq O$ par construction, ce qui contredit le fait que $[s, U]$ est bon.

□

Démonstration du Théorème. S'il existe $U \in [\omega]^{\omega}$ tel que $[U]^{\omega} \subseteq O$, le théorème est vérifié.

Supposons alors qu'il n'existe pas de tel U, et on a donc $[\emptyset, \omega]$ est bon. Posons alors $U_0 = \omega$ et construisons le U du théorème par récurrence.

Supposons construits $n_0 < \cdots < n_{i-1} < \min U_i$ tel que si $s \subseteq \{n_0, \dots, n_{i-1}\}$ alors $[s, U_i]$ est bon. On remarque que la propriété d'être très bon est conservée quand on remplace U par un sous-ensemble, donc on peut appliquer le lemme à des $[s, W_{i,j}]$ pour tout s pour obtenir un $V_i \subseteq U_i$ tel que pour tout $s \subseteq \{n_0, \dots, n_{i-1}\}$, $[s, V_i]$ est très bon, avec $W_{i,j} \subseteq \cdots \subseteq W_{i,0} \subseteq U_i$. Posons alors $n_i = \min V_i$, et $U_{i+1} = V_i/\{n_i\}$.

On prend enfin $X = \{n_i : i \in \omega\}$, montrons que ce X vérifie $[X]^\omega \cap O = \emptyset$.

Sinon, soit Y un élément de $[X]^\omega \cap O$. Comme O est ouvert, on peut trouver un élément $[s, \omega/s]$ de la base tel que $Y \in [s, \omega/s] \subseteq O$. $U_i \cap \omega/s$ est infini , et $[s, U_i \cap W] \subseteq O$, ce qui contredit que $[s, U_i]$ est bon. □

Remarque 24. La même preuve se généralise facilement à la topologie d'Ellentuck sur $[\omega]^\omega$, dont une base d'ouverts est formée des ensembles de la forme $[s, U]$.

Théorème 25 (Galvin-Prikry)**.** *Soient $U \in [\omega]^\omega$ et un ensemble borélien $B \in [U]^\omega$. Alors il existe $V \in [U]^\omega$ tel que soit $[V]^\omega \subseteq B$, soit $[V]^\omega \cap B = \emptyset$.*

Démonstration. Montrons la propriété plus forte : B est telle que pour tout $[s, U]$, il existe $V \subseteq U/s$ avec soit $[s, V] \subseteq B$, soit $[s, V] \cap B = \emptyset$. Cette propriété est vraie si B est de la forme $[t, \omega/t]$, et le reste si B est seulement ouvert. De plus on remarque immédiatement qu'elle est préservée par passage au complémentaire.

Montrons qu'elle est préservée par union dénombrable.

Soit $(B_i)_{i\in\omega}$ une suite d'ensembles sur lesquels Galvin-Prikry s'applique, et $B = \bigcup B_i$. Construisons V par induction.

On pose $U_0 = U$. Si l'on a défini U_i et $n_0 < \cdots < n_{i-1} < \min U_i$, on pose $n_i = \min U_i$, et comme on a le théorème sur les B_i, on l'applique avec chaque $s \subseteq \{n_0, \dots, n_i\}$, pour trouver un $U_{i+1} \subseteq U_i/\{n_i\}$ tel que pour tout tel s, soit $[s, U_{i+1}] \subseteq B_i$, soit $[s, U_{i+1}] \cap B_i = \emptyset$.

Enfin on pose $N = \{n_i : i \in \omega\}$. Alors si $W \in [N]^\omega$, on a par construction $W \in B_i$ si, et seulement si $[W \cap \{n_0, \dots, n_i\}, U_{i+1}] \subseteq B_i$. C'est une condition portant sur un sous-ensemble fini de W, donc une condition ouverte. Ainsi pour tout i, $B_i \cap [N]^\omega$ est ouvert dans $[N]^\omega$. On a donc $B \cap [N]^\omega$ ouvert dans $[N]^\omega$ également. On peut donc utiliser le cas particulier pour un ouvert, et on a finalement un $V \in [N]^\omega \subseteq [U]^\omega$ tel que $[V]^\omega \subseteq B$ ou $[V]^\omega \cap B = \emptyset$.

On trouve le théorème lorsque $s = \emptyset$ □

On utilisera dans la suite la conséquence suivante du théorème.

Théorème 26. *Si* $U \in [\omega]^\omega$, *et si* $f : [U]^\omega \longrightarrow X$ *borélienne d'image séparable où* X *est un espace métrique, il existe un* $V \in [U]^\omega$ *tel que la restriction de* f *à* $[V]^\omega$ *est continue.*

Démonstration. Soit $\{O_i : i \in \omega\}$ une base d'ouverts de $im(f)$ (qui existe car elle est séparable). Posons $U_0 = U$. Si $n_0 < \cdots < n_{i-1} < \min U_i$ sont définis, on pose $n_i = \min U_i$, et on applique le théorème de Galvin et Prikry pour chaque $s \subseteq \{n_0, \ldots, n_i\}$ afin d'avoir $U_{i+1} \subseteq U_i/\{n_i\}$ tel que pour tout tel s, $[s, U_{i+1}] \subseteq f^{-1}(O_i)$ ou bien $[s, U_{i+1}] \cap f^{-1}(O_i) = \emptyset$.

Posons enfin $V = \{n_i : i \in \omega\}$. Alors pour tout $W \in [V]^\omega$, on a $W \in f^{-1}(O_i)$ si, et seulement si $[W \cap n_0, \ldots, n_i, U_{i+1}] \subseteq f^{-1}(O_i)$. Ainsi on obtient que $f^{-1}(O_i) \cap [V]^\omega$ est ouvert dans $[V]^\omega$, et donc f est continue sur $[V]^\omega$. $\square$

4 Better Quasi Orderings

Définition 27. Soit $X \in [\omega]^\omega$, on note $X^+ = X - \{\min(X)\}$.

Définition 28. Soit Q un quasi ordre. On met sur Q la topologie discrète. Un Q-tableau est une application $f : [U]^\omega \mapsto Q$ borélienne d'image dénombrable, où $U \in [\omega]^\omega$. Un Q-tableau est mauvais si il n'y a pas de $X \in [U]^\omega$ tel que $f(X) \leqslant f(X^+)$. On dit que Q est bqo s'il n'y a pas de mauvais tableau.

Théorème 29. *Q bqo $\Rightarrow$ Q wqo.*

Démonstration. Soit $f : \omega \mapsto Q$, on définit un tableau $g : [\omega]^\omega \mapsto Q$ par $g(X) = f(min(X))$, comme Q est bqo la suite f n'est pas mauvaise. Ainsi Q est wqo. $\square$

Propriété 30. *Soit Q un bqo et $f : [U]^\omega \to Q$ un tableau, alors il existe $V \in [U]^\omega$ telle que $\forall X \in [V]^\omega, f(X) \leqslant f(X^+)$. On dit également que g est un très bon tableau.*

Démonstration. On définit $B \subseteq [U]^\omega$ par $X \in B$ ssi $f(X) \leqslant f(X^+)$. Par le théorème de Galvin et Prikry, il existe $V \in [U]^\omega$ tel que $[V]^\omega \subseteq B$, et on ne peut pas avoir $[V]^\omega \cap B = \emptyset$ car on obtiendrait alors un mauvais tableau sur Q.

Ainsi sur $\forall X \in [V]^\omega, f(X) \leqslant f(X^+)$. $\square$

Propriété 31. *Les trois propositions suivantes sont équivalentes :*

- (i). *Q est bqo.*
- (ii). *Il n'y a pas de mauvais tableau continu.*
- (iii). *Pour tout Q-tableau $f : [U]^\omega \mapsto Q$, $\exists V \in [U]^\omega, \forall X \in [V]^\omega, f(X) \leqslant f(X^+)$.*

Démonstration. Comme tout application borélienne sur $[U]^\omega$ peut être restreinte en une application continue, l'équivalence entre (i) et (ii) est immédiate. Par la propriété des très bons tableaux, on obtient immédiatement l'équivalence (i) et (iii). $\square$

Propriété 32. *On a les propriétés suivantes :*

- (i). *Tout bon ordre est bqo.*
- (ii). *Si Q est l'union de deux bqo alors Q est bqo.*

(iii). Si Q_1 et Q_2 sont bqo alors $Q_1 \times Q_2$ est bqo.

(iv). Toute somme bqo de bqos est bqo.

Démonstration. (i). Si $f : [\omega]^\omega \mapsto \alpha$ est un tableau et α un ordinal. Comme α est bien ordonné on ne peut pas avoir $f(\omega) > f(\omega^+) > \dots > f(\omega^{+\dots+}) > \dots$ donc f n'est pas mauvais et α est bqo.

(ii). Soit $f : [\omega]^\omega \mapsto Q_1 \cup Q_2$, où Q_1 et Q_2 sont bqo, par le théorème de Galvin et Prikry, on peut restreindre f telle que $f : [U]^\omega \mapsto Q_1$ (ou Q_2). Alors f n'est pas mauvaise, donc Q est bqo.

(iii). Soit $f : [\omega]^\omega \mapsto Q_1 \times Q_2$, en restreignant f et en notant p_1 la première projection, on a $p_1 \circ f : [U]^\omega \mapsto Q_1$ telle que $\forall X \in [\omega]^\omega U, p_1 \circ f(X) \leqslant p_1 \circ f(X^+)$. Comme Q_2 est bqo il existe $X \in [U]^\omega$ tel que $p_2 \circ f(X) \leqslant p_2 \circ f(X^+)$, alors $f(X) \leqslant f(X^+)$, et $Q_1 \times Q_2$ est bqo.

(iv). Soit Q_0 un ordre partiel bqo, on considère $Q = \sum_{q \in Q_0} Q_q$, soit $f[\omega]^\omega \mapsto Q$ un tableau, il y a deux cas : soit il existe $U \in [\omega]^\omega$ tel que $f([U]^\omega) \subseteq Q_q$ pour un certain $q \in Q_0$, alors f n'est pas mauvaise. Sinon on note $p : Q \to Q_0$ la projection sur la base.

Par Galvin et Prikry, il existe $U \in [\omega]^\omega$ tel que $\forall X \in [U]^\omega, p(f(X)) = p(f(X^+))$ ou $\forall X \in [U]^\omega, p(f(X)) \neq p(f(X^+))$. Par hypothèse, on se trouve dans le deuxième cas, ainsi comme Q_0 est bqo, il existe $X \in [U]^\omega$ telle que $p(f(X)) \neq p(f(X^+))$ et $p(f(X)) \leqslant p(f(X^+))$, donc $f(X) \leqslant f(X^+)$, et Q est bqo.

□

Définition 33. Soit Q un quasi ordre, on notera la relation $\leqslant$. Un rang partiel sur Q, est un ordre bien fondé $\leqslant'$ tel que $x \leqslant' y \Rightarrow x \leqslant y$.

Définition 34. Soit Q un qo qui n'est pas bqo, et on suppose que l'on dispose d'un rang partiel $\leqslant'$ sur Q, on note $x <' y$ si $x \leqslant' y$ et $x \neq y$.

Soit $f; [U]^\omega \to Q$ et $g : [U]^\omega \to Q$ deux mauvais tableaux, on note $g \leqslant' f$ si $V \subseteq U$ et $g(X) \leqslant' f(X)$ pour tout $X \in [V]^\omega$. On note de plus $g <' f$ si $V \subseteq A$ et pour tout $X \in [V]^\omega, g(X) <' f(X)$.

Enfin on dit que f est minimal mauvais si il n'y a pas de mauvais tableau g tel que $g <' f$.

Théorème 35. *Soit Q un qo qui n'est pas bqo, on suppose Q equipé d'un rang partiel. Soit $f_0 : [U_0]^\omega \to Q$ un mauvais tableau, alors il existe un tableau minimal mauvais $f \leqslant' f_0$.*

Démonstration. Supposons que le théorème est faux. Nous allons ainsi définir une suite de mauvais tableaux $f_\xi : [U_\xi]^\omega \to Q$ tel que $f_\eta \leqslant' f_\xi$ et $U_\eta \subsetneq U_\xi$ pour tous les ordinaux $\xi < \eta < \aleph_1$. Ce qui est impossible car on obtiendrait une suite strictement décroissante de cardinal $\aleph_1$ de parties de ω.

Supposons donc qu'il y ait $f_0 : [U_0]^\omega \to Q$ un mauvais tableau tel qu'il n'y ait pas de tableau minimal mauvais $f \leqslant' f_0$.

Soit ξ un ordinal dénombrable, on suppose que l'on a défini $f_\xi \leqslant' f_\gamma$ des mauvais tableau pour tout $\gamma < \xi$, on a en particulier $f_\xi \leqslant' f_0$ donc f_ξ n'est pas minimale mauvaise. Soit $g_\xi : [V_\xi]^\omega \mapsto Q$ un mauvais tableau tel que $g_\xi <' f_\xi$, quite à restreindre V_ξ on peut supposer g_ξ continue et $U_\xi - V_\xi$ infini.

Par continuité il existe s_ξ un segment initial de V_ξ tel que $[s_\xi, V_\xi] \subseteq g_\xi^{-1}(\{g(V_\xi)\})$. Ainsi pour tout $X \in [s_\xi, V_\xi], g_\xi(X) = g_\xi(V_\xi)$. On pose alors

$$U_{\xi+1} = V_\xi \cup \{n \in U_\xi, n \leqslant \max(s_\xi)\} \tag{1}$$

et

$$f_{\xi+1}(X) = \begin{cases} g_\xi(X) \text{ si } X \in [V_\xi]^\omega \\ f_\xi(X) \text{ si } X \in [U_{\xi+1}]^\omega - [V_\xi]^\omega \end{cases} \tag{2}$$

Alors $f_{\xi+1}$ est borélienne donc est un tableau.

Soit $X \in [U_{\xi+1}]^\omega$, si $X \in [V_\xi]^\omega$ alors $X^+ \in [V_\xi]^\omega$, donc $f_{\xi+1}(X) \nleqslant f_{\xi+1}(X^+)$. Si $X, X^+ \in [U_{\xi+1}]^\omega - [V_\xi]^\omega$ alors $f_{\xi+1}(X) \nleqslant f_{\xi+1}(X^+)$, et si $X \in [U_{\xi+1}]^\omega$ et $X^+ \in [V_\xi]^\omega$ alors $f_{\xi+1}(X) \nleqslant f_{\xi+1}(X^+)$ sinon on aurait $f_\xi(X) \leqslant g_\xi(X^+) \leqslant f_\xi(X^+)$, ce qui est impossible donc $f_{\xi+1}$ est mauvaise.

Enfin comme $g_\xi \leqslant' f_\xi$, on a $f_{\xi+1} \leqslant' f_\xi$ et $U_{\xi+1} \subsetneq U_\xi$ car $U_\xi - V_\xi$ est infini.

Passons maintenant au cas limite, soit δ un ordinal limite dénombrable, on suppose que tous les f_ξ pour $\xi < \delta$ sont définis. On pose $U_\delta = \cap\{U_\xi, \xi < \delta\}$.

Montrons que U_δ est infini.

Dans le cas contraire il existe $m \in \omega$, $U_\delta \subseteq m$. On définit alors $\forall \xi < \delta, n_\xi$ comme le plus petit entier $n \geqslant m$ tel que $n \in U_\xi$.

Il y a une infinité de ξ tel que $n_\xi \notin U_{\xi+1}$. Supposons qu'il n'y en ait qu'un nombre fini, soit ξ leur max, montrons alors que pour tout $\eta > \xi, n_{\xi+1} \in U_\eta$.

Clairement pour $\xi + 1$ ceci est vérifié par définition, remarquons que par inclusion la suite (n_ξ) est croissante et toujours par inclusion on a $\forall \theta \leqslant \xi, n_{\xi+1} \in U_\theta$. Maintenant si $\lambda < \delta$ est limite et que $\forall \xi < \eta < \lambda, n_{\xi+1} \in U_\eta$, comme $U_\lambda = \cap\{U_\theta, \theta < \lambda\}$, on a $n_{\xi+1} \in U_\lambda$. Enfin si $\eta > \xi$ et $n_{\xi+1} \in U_\eta$, par croissance on a $n_\eta = n_{\xi+1}$ et comme $\eta > \xi, n_\eta \in U_{\eta+1}$ donc $n_{\xi+1} \in U_{\eta+1}$.

Finalement comme $U_\delta = \cap\{U_\xi, \xi < \delta\}$, on a $n_{\xi+1} \in U_\delta$, ce qui est absurde car $U_\delta \subseteq m$ et $n_{\xi+1} \geqslant m$.

Pour chaque ξ tel que $n_\xi \not\leqslant U_{\xi+1}$, on a $n_\xi > \max(s_\xi)$, en effet sinon on a $n_\xi \leqslant \max(s_\xi)$. Et comme $U_{\xi+1} = V_\xi \cup \{n \in U_\xi, n \leqslant \max(s_\xi)\}$, on a $n_\xi \in U_{\xi+1}$.

Donc pour un tel ξ, on a $m > \max(s_\xi)$. Sinon, si $m \leqslant \max(s_\xi)$, alors on a $\max(s_\xi) \in U_{\xi+1}$, d'où $n_{\xi+1} \leqslant \max(s_\xi) < n_\xi$ ce qui est impossible.

Donc il y a une infinité de s_ξ qui coincident, en effet pour une infinité de ξ, $m > \max(s_\xi)$ donc il y a au plus 2^m s_ξ possibles. Donc on a une partie infinie E de δ tel que pour tout $\xi < \eta$ dans E, $s_\xi = s_\eta$. Par construction on a alors $V_\eta \in [s_\xi, V_\xi]$, et donc

$$f_\eta(V_\eta) \leqslant' f_{\xi+1}(V_\eta) = g_\xi(V_\eta) = g_\xi(V_\xi) <' f_\xi(V_\xi) \tag{3}$$

Ce qui contredit le fait que l'ordre $\leqslant'$ est bien fondé, et donc U_δ est infini.

Soit maintenant $X \in [U_\delta]^\omega$, on pose $f_\delta(X) = \lim_{\xi<\delta} f_\xi(X)$, en effet $f_\xi(X)$ est bien défini pour $X \in [U_\delta]^\omega$ et est décroissante pour l'ordre bien fondé donc stationne et la limite existe. Par décroissance de la suite $f_\xi(X)$, on a clairement $f_\delta(X) \leqslant' f_\xi(X)$ pour tout $\xi < \delta$. Prouvons que f_δ est mauvaise, soit $X \in [U_\delta]^\omega$, comme $\leqslant'$ est bien fondé il existe deux ordinaux $\xi, \eta < \delta$ tels que les limtes $\lim_{\xi<\delta} f_\xi(X)$ et $\lim_{\xi<\delta} f_\xi(X^+)$ sont atteintes, on peut supposer $\xi = \eta$ ainsi $f_\delta(X) = f_\xi(X) \not\leqslant f_{\xi+1}(X^+) = f_\delta(X^+)$. Puis comme f_δ est la limite simple d'une suite de fonctions borélienne, elle est même borélienne. Finalement f_δ est un mauvais tableau. □

Définition 36. Soit Q un quasi-ordre et α un ordinal. Une suite transfinie est une application $s : \alpha \to Q$, où $\alpha = \mathrm{lh}(s)$ est la longeur de s. On note $s_{|\theta}$ la restriction de s à θ, c'est à dire l'unique s' de longeur θ tel que $s'(\xi) = s(\xi)$ pour tout $\xi < \theta$. La classe des suites transfinies de Q est notée $\tilde{Q}$ ou Q^{Ord}.

On quasi-ordonne Q^{Ord} par $s \leqslant t$ ssi il existe une application strictement croissante $h : \mathrm{lh}(s) \to \mathrm{lh}(t)$ telle que $s(\xi) \leqslant t(h(\xi)), \forall \xi < \mathrm{lh}(s)$.

Lemme 37. *Si $s, t \in Q^{\mathrm{Ord}}$ et $s \not\leqslant t$; alors il existe $\theta < \mathrm{lh}(s)$ telle que $s_{|\theta} \leqslant t$ et $s_{|\theta+1} \not\leqslant t$.*

Démonstration. Si $s \not\leqslant t$, on définit h par induction, soit $h(\xi)$ le plus petit $\eta < \mathrm{lh}(t)$ tel que $s(\xi) \leqslant t(\eta)$, et $\eta > h(\xi'), \forall \xi' < \xi$. Soit maintenant θ le plus petit ordinal ξ pour lequel $h(\xi)$ n'est pas défini. On a alors $s_{|\theta} \leqslant t$ et $s_{|\theta+1} \not\leqslant t$ comme demandé. □

Théorème 38 (Nash Williams)**.** *Soit un mauvais Q^{Ord}-tableau $(s_X, X \in [U]^\omega)$. Il existe $V \in [U]^\omega$ et un mauvais Q-tableau $(f(X), X \in [V]^\omega)$ tel que pour tout $X \in [V]^\omega, f(X)$ est un terme de la suite transfinie s_X.*

Démonstration. Pour $r, t \in Q^{\mathrm{Ord}}$ on définit un rang partiel $r \leqslant' t$ ssi r est un segment initial de t, i.e. il existe $\theta < \mathrm{lh}(r), t_{|\theta} = r$. Cet ordre est bien fondé car les ordinaux sont bien ordonnés. Remarquons que si $q \in Q$ est un terme de $r \leqslant' t$ alors c'est aussi un terme de t donc on peut supposer s minimal mauvais.

Etant donnés $X \in [A]^\omega$ et $Y = X^+$ on a $s_X \nleqslant s_Y$ donc par le lemme il existe θ_X tel que $(s_X)_{|\theta_X} \leqslant s_Y$ et $(s_X)_{|\theta_X+1} \nleqslant s_Y$, et ce θ_X ne dépend que de S_X et S_{X^+}. On remarque ensuite que $((s_X)_{|\theta_X}, X \in [A]^\omega) <' (s_X : X \in [A]^\omega)$.

Mais par minimalité de (s_X), $((s_X)_{|\theta_X}, X \in [A]^\omega)$ n'est pas mauvais, donc il existe, d'après la propriété 30, $B \in [A]^\omega$ tel que $\forall X \in [B]^\omega, (s_X)_{|\theta_X} \leqslant (s_{X^+})_{|\theta_{X^+}}$. Mais par définition de θ_X, on a $(s_X)_{|\theta_X+1} \nleqslant (s_Y)_{|\theta_Y+1}$ on a donc $s_X(\theta_X) \nleqslant s_Y(\theta_Y)$. Donc $(s_X(\theta_X))$ est un mauvais Q-tableau et vérifie les hypothèses du théorème. □

Théorème 39 (Nash Williams)**.** *Q bqo $\Leftrightarrow Q^{\mathrm{Ord}}$ bqo.*

Démonstration. Si Q^{Ord} n'est pas bqo, on peut trouver un mauvais tableau puis avec le théorème précédent on peut en extraire un mauvais Q-tableau donc Q n'est pas bqo. Réciproquement si Q^{Ord} est bqo tout sous-ensemble de Q^{Ord} est bqo, il suffit donc d'appliquer la définition aux suites transfinies de longueur 1. □

5 Preuve de la conjecture de Fraïssé

Définition 40. La classe des ordres dispersés est la classe des ordres totaux dans lesquels $\mathbb{Q}$ ne se plonge pas.

Définition 41. On définit pour tout ordinal ρ, S_ρ par induction par : S_0 est la classe des singletons ordonnés et pour tout ordinal $\rho > 0$, la classe S_ρ est la classe des ordres d'une des deux formes suivantes :

$$L = L_0 + L_1 + \cdots + L_\xi + \dots \ (\xi < \alpha)$$
$$L = \cdots + L_\xi + \cdots + L_1 + L_0 \ (\xi < \alpha)$$

pour α un ordinal et L_ξ des ordres dans $\cup\{S_\beta, \beta < \rho\}$.

Enfin on pose $\mathcal{S} = \cup\{S_\rho, \rho \in \mathrm{Ord}\}$.

Définition 42. On note le rang de $L \in \mathcal{S}$ comme le plus petit ordinal $\mathrm{rk}(L) = \rho$ tel que $L \in S_\rho$.

On montre maintenant que $\mathcal{S}$ est la classe des ordres dispersés et que S est bqo pour l'ordre de plongement.

Lemme 43. *Soit $L \in \mathcal{S}$ alors tout sous-ordre de $L' \subseteq L$ est dans $\mathcal{S}$*

Démonstration. On montre ce résultat par induction :

(I) Si L est un singleton alors $L' \in \mathcal{S}$.

(H)Supposons que pour tout $\xi < \alpha$, si $L \in S_\xi$ alors $L' \in \mathcal{S}$. On suppose $L \in S_\alpha$. De plus supposons que $L = L_0 + L_1 + \cdots + L_\xi + \dots \ (\xi < \rho)$ et $\forall \xi < \rho, \mathrm{rk}(L_\xi) < \alpha$, si L est un singleton le cas est déjà traité et l'autre cas est symétrique à celui-ci.

Si $L' \subseteq L_\xi$ pour un $\xi < \alpha$ alors par hypothèse d'induction $L' \in \mathcal{S}$, sinon quitte à supprimer des termes de (L_ξ) on suppose $L' \cap L_\xi \neq \emptyset$ pour tout $\xi < \alpha$, on pose alors $L'_\xi = L' \cap L_\xi$ alors par hypothèse pour tout $\xi < \alpha, L'_\xi \in \mathcal{S}$ et comme $L' = L'_0 + \cdots + L'_\xi + \dots$, on a $L' \in \mathcal{S}$.

□

Théorème 44 (Hausdorff)**.** *$\mathcal{S}$ est exactement la classe des ordres dispersés.*

Démonstration. On commence par montrer que tous les éléments de $\mathcal{S}$ sont dispersés,

Si $L \in \mathcal{S}$ est un singleton alors L est dispersé.

Si $L = L_0 + L_1 + \dots + L_\xi + \dots$ $(\xi < \rho)$ (l'autre cas est symétrique) avec $L \in S_\alpha$ et $\forall \xi < \rho, \mathrm{rk}(L_\xi) < \alpha$, alors par induction $\forall \xi < \rho, L_\xi$ est dispersé. Si $\mathbb{Q}$ se plonge dans L par f, comme $\mathbb{Q}$ ne se plonge pas dans α, il existe $\xi < \alpha$ et I un intervalle de $\mathbb{Q}$ tel que $\forall q \in I, f(q) \in L_\xi$, or $\mathbb{Q}$ se plonge dans I donc $\mathbb{Q}$ se plonge dans L_ξ ce qui est absurde. Donc $\mathbb{Q}$ ne se plonge pas dans L.

Soit L un ordre dispersé, nous montrons maintenant que $L \in \mathcal{S}$. On définit sur L la relation suivante : pour tout $x, y \in L, x \sim y$ si, et seulement si $[x, y] \in \mathcal{S}$ ou $[y, x] \in \mathcal{S}$. On remarque que $\sim$ est symétrique et réflexive, montrons sa transitivité. Si $x \sim y$ et $y \sim z$, on suppose $x \leqslant y \leqslant z$ alors $[x, y] \in \mathcal{S}$ et $[y, z] \in \mathcal{S}$ donc par le lemme $[x, y[\in \mathcal{S}$, ainsi $[x, z] = [x, y[+ [y, z] \in \mathcal{S}$ donc $\sim$ est une relation d'équivalence.

Nous montrons maintenant que les classes sont convexes. Soit $x < z < y$ tels que $x \sim y$ alors, $[x, y] \in \mathcal{S}$ et $[x, z] \subseteq [x, y]$ ainsi par le lemme $[x, z] \in \mathcal{S}$ donc $x \sim z$. Ainsi les classes sont compatibles avec l'ordre sur L et l'ordre passe au quotient.

Montrons maintenant que les classes sont des éléments de $\mathcal{S}$. Soit $C \subseteq L$ une classe d'équivalence, considérons $(x_\xi)_{\xi<\alpha}$ et $(y_\xi)_{\xi<\beta}$ des suites respectivement croissante cofinale et décroissante coinitiale dans C et telles que $x_0 = y_0$, alors si C n'a pas d'élément minimal, $C = \dots +]y_{k+1}, y_k] + \dots +]y_1, y_0] +]x_0, x_1] + \dots +]x_k, x_{k+1}] + \dots$, et sinon, C a comme élément minimal un y_m, et $C = [y_m, y_{m-1}] + \dots +]y_1, y_0] +]x_0, x_1] + \dots +]x_k, x_{k+1}] + \dots$. Comme chacun des termes est dans $\mathcal{S}$, $C \in \mathcal{S}$.

Nous montrons désormais que l'ordre induit sur $L/\sim$ est dense. S'il existe $[x], [y] \in L/\sim$ avec $[x] < [y]$ alors il existe $[x] < [z] < [y]$; sinon $[x, y] \in \mathcal{S}$ donc $[x] = [y]$, ce qui est impossible, donc l'ordre sur $L/\sim$ est dense. Ainsi s'il y a plus d'un seul élément, $\mathbb{Q}$ se plonge dans $L/\sim$, donc en relevant un élément dans chaque classe, $\mathbb{Q}$ se plonge dans L, ce qui est absurde donc il n'y a qu'une seule classe et $L \in \mathcal{S}$.

$\square$

Théorème 45. *La classe $\mathcal{S}$ des ordres totaux dispersés est bqo pour l'ordre de plongement.*

Démonstration. On définit un ordre bien fondé sur $\mathcal{S}$ par $M <' N$ ssi $\mathrm{rk}(M) < \mathrm{rk}(N)$ et $M \leqslant N$, et $M \leqslant' N$ ssi $M <' N$ où $M = N$. Supposons que $\mathcal{S}$ n'est pas bqo alors il existe $(L_X, X \in [A]^\omega)$ une suite mauvaise minimale. Alors pour tout $X \in [A]^\omega, L_X$ est soit de la forme $L_X = L_X^0 + L_X^1 + \dots + L_X^\xi + \dots$ ou $L_X = \dots + L_X^\xi + \dots + L_X^1 + L_X^0$ avec les

$\mathrm{rk}(L_X^\alpha) < rk(L_X)$ ou un point. Par le théorème de Galvin et Prikry une de ces trois formes est celle d'une infinité de L_X. Comme la suite est mauvaise, le troisième cas n'est pas possible. Les deux autres cas étant symétriques on suppose que $\forall X \in [A]^\omega, L_X = L_X^0 + L_X^1 + \cdots + L_X^\xi + \ldots (\xi < \alpha_X)$, et $\mathrm{rk}(L_X^\xi) < \mathrm{rk}(L_X)$. Ainsi pour tout $\xi < \alpha_X, L_X^\xi <' L_X$.

On définit alors P un mauvais $\mathcal{S}^{\mathrm{Ord}}$-tableau par $P(X) = (L_X^\xi, \xi < \alpha_X)$. Clairement si $P(X) < P(X^+)$ alors $L_X \leqslant L_{X^+}$ ce qui impliquerait que L ne soit pas mauvaise, donc P est mauvaise. Alors par le théorème sur les suites transfinies on peut extraire de P un mauvais $\mathcal{S}$-tableau $f : [B]^\omega \mapsto S$ tel que $\forall X \in [B]^\omega, f(X) = L_X^{\theta_X}$ et $(L_X^{\theta_X}, X \in [B]^\omega)$ est mauvaise, or on a clairement $(L_X^{\theta_X}, X \in [B]^\omega) <' (L_X, X \in [B]^\omega)$ ce qui contredit la minimalité de L. Ainsi $\mathcal{S}$ est bqo. □

Théorème 46. *La classe des ordres totaux dénombrables est wqo pour l'ordre de plongement.*

Démonstration. Notons L cette classe alors on a $L = \mathcal{S} \cap L + [\mathbb{Q}]$ où $[\mathbb{Q}]$ est l'ensemble des ordres totaux dénombrable équivalents à $\mathbb{Q}$ pour l'ordre de plongement. Par le théorème précédent le premier terme est bqo, le deuxième l'étant clairement aussi on a L bqo donc L est wqo. □

6 Un contre-exemple dans le cas indénombrable

Montrons que la classe des ordres totaux n'est pas wqo. Tout ce contre-exemple est dû à Sierpinski, Dushnik et Miller [1] [5] Dans cette partie nous allons construire deux parties de cardinal $2^{\aleph_0}$, $H, Z \subseteq \mathbb{R}$ telles que $Z \cap H = \emptyset$ et $\forall x \neq y \in Z, H \cup \{x\} \perp H \cup \{y\}$.

Dans toute cette partie nous notons F l'ensemble des fonctions $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ strictement croissantes différentes de l'identité.

Propriété 47. $\text{Card}(F) = 2^{\aleph_0}$

Lemme 48. *Soit $f \in F$, alors l'ensemble des points de discontinuité de f est dénombrable.*

Preuve du Lemme. Soit $f \in F$, étant donné x un point de discontinuité de f, on appelle $f(x^+) - f(x^-)$ la hauteur de cette discontinuité. On note $D(f,n)$ l'ensemble des points de discontinuité de f de hauteur $> \frac{1}{n}$ pour $n > 0$.

Montrons que $D(f,n)$ est discret. Sinon on peut trouver une suite (x_k) strictement croissante telle que $x_k < x, \forall k$ et $x, x_k \in D(f,n)$ et $x_k \to x$ alors la suite $f(x_k) \to f(x^-)$. Soit $\eta > 0$ tel que $\forall y < x, x-y < \eta \Rightarrow f(x^-)-f(y) < \frac{1}{n}$. Soit k_0 tel que $\forall k \geqslant k_0, x_k - x < \eta$. Alors $f(x_{k_0}) - f(x^-) < \frac{1}{n}$, mais $f(x_{k_0}) - f(x^-) > f(x^+_{k_0+1}) - f(x^-_{k_0+1}) > \frac{1}{n}$. Ce qui est absurde donc $D(f,n)$ est discret et donc dénombrable. Ainsi l'ensemble des points de discontinuité de f $D(f) = \cup_n D(f,n)$ est dénombrable. $\square$

Preuve de la Propriété. On pose sur F la relation d'équivalence suivante : $g \sim f \Leftrightarrow D(f) = D(g)$. Il y a clairement au plus $2^{\aleph_0}$ classes d'équivalence. Soit maintenant C une telle classe, $f_0 \in C$ et $X \subseteq \mathbb{R} - D(f)$ une partie dénombrable dense, enfin notons $h : C \to \mathbb{R}^X$, telle que $h(f_0)$ est la restriction de f_0 à $X \cup D(f_0)$. Alors par unicité du prolongement continu, h est injective. Donc $\text{Card}(C) \leqslant \text{Card}(\mathbb{R}^X) = (2^{\aleph_0})^{\aleph_0} = 2^{\aleph_0^2} = 2^{\aleph_0}$. Finalement $\text{Card}(F) \leqslant 2^{\aleph_0}.2^{\aleph_0}$.

Réciproquement pour tout $a \in \mathbb{R}_+^* - \{1\}$, on a $x \mapsto ax \in F$ donc $\text{Card}(F) = 2^{\aleph_0}$. $\square$

Construisons maintenant les ensembles H et Z. Soit $(f_\alpha)_{\alpha < 2^{\aleph_0}}$ une énumération de F telle que chacune des deux sous-suites correspondant aux indices pairs et impairs sont des énumérations de F.

Remarquons de plus que l'ensemble des points fixes de $f \in F$ n'est pas dense dans $\mathbb{R}$ (en effet sinon on aurait $f = id$). Ainsi il existe $]a_\alpha, b_\alpha[\subseteq \mathbb{R}$ tel que f_α ne fixe aucun point de cet intervalle.

Construisons alors par récurrence deux suites $(x_\alpha)_{\alpha<2^{\aleph_0}}$ et $(y_\alpha)_{\alpha<2^{\aleph_0}}$, notons de plus $S_\alpha = \{x_\beta, y_\beta, \beta < \alpha\}$ telles que $\forall \alpha < 2^{\aleph_0},\ x_\alpha \notin S_\alpha, f_\alpha(x_\alpha) \notin S_\alpha \cup \{x_\alpha\}$ et $y_\alpha = f_\alpha(x_\alpha)$.

L'initialisation et l'induction sont identiques, si tous les termes x_β, y_β pour $\beta < \alpha$ sont construits, on remarque que $\mathrm{Card}(S_\alpha) < 2^{\aleph_0}$ donc $]a_\alpha, b_\alpha[-S_\alpha - f_\alpha^{-1}(S_\alpha) \neq \emptyset$, on peut donc choisir x_α dedans et poser $y_\alpha = f_\alpha(x_\alpha)$. Ce qui conclut la récurrence.

On pose alors $H = \{x_{2\alpha}\}$ et $Z = \{x_{2\alpha+1}\}$

Propriété 49. *H est dense dans $\mathbb{R}$.*

Démonstration. Soit $]a, b[$ un intervalle non vide de $\mathbb{R}$, posons h la fonction telle que $h(x) = x$ si $x \notin]a, b[$ et $h(x) = (b-a)(\frac{x-a}{b-a})^2 + a$ sinon, alors h ne fixe aucun point de $]a, b[$ et est strictement croissante alors il existe α tel que $h = f_{2\alpha}$, comme $y_{2\alpha} \neq x_{2\alpha}$ on a $x_{2\alpha} \in]a, b[$ donc H est dense dans $\mathbb{R}$. $\square$

Définition 50. Étant donné $T \subseteq Z$ on pose $E_T = H \cup T$.

Propriété 51. *Soit $A, B \subseteq Z$ tels que $A - B \neq \emptyset$ alors $E_A \not\leqslant E_B$.*

Démonstration. Sinon soit $f : E_A \mapsto E_B$ une application strictement croissante. Comme H est dense E_A l'est aussi donc on peut étendre f en une application $g : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ strictement croissante. On a $g \neq id$ sinon f est l'identité donc $f(E_A) = E_A$, or $f(E_A) \subseteq E_B$ et $E_A - E_B \neq \emptyset$ ce qui est impossible donc g n'est pas l'identité sur $\mathbb{R}$, on a donc $g = f_{2\alpha}$ pour un certain α.

On alors $x_{2\alpha} \in H \subseteq E_A$ et $f_{2\alpha}(x_{2\alpha}) \notin E_B$ par construction on a $f(E_A) \not\subseteq E_B$, ainsi $E_A \not\leqslant E_B$. $\square$

On a alors le résultat suivant $E_A \leqslant E_B \Leftrightarrow A \subseteq B$.

On obtient maintenant une famille d'ordres $(E_A)_{A\in Z}$ isomorphe à $P(Z)$. En prenant les parties $Z_\alpha = \{x_{2\beta+1}, \beta \geqslant \alpha\}$, $T_\alpha = \{x_{2\beta+1}, \beta < \alpha\}$ et $Q_\alpha = \{x_{2\alpha+1}\}$, on obtient respectivement des suites strictement décroissante, croissante et incomparable de cardinal $2^{\aleph_0}$. Et en particulier la classe des ordres totaux de cardinal $2^{\aleph_0}$ ou $\leqslant 2^{\aleph_0}$ n'est pas wqo.

7 Théorème de structure des ordres σ-dispersés

A partir de cette partie nous allons faire la distinction entre les ensembles ordonnés (ou ordres) qui seront notés $L, M, N, \dots$, et les types d'ordres qui seront notés $\phi, \chi, \psi, \dots$.

Définition 52. Si L est un ordre on note $\phi = \mathrm{ot}(L)$ la classe d'isomorphisme de L, c'est le type d'ordre de L.

La classes des types d'ordre est naturellement ordonnée par l'ordre de plongement : $\phi \leqslant \psi \iff$ il existe L, M des ordres tel que $\mathrm{ot}(L) = \phi$ et $\mathrm{ot}(M) = \psi$ et $L \leqslant M$.

Les notions de wqo, bqo et cardinaux s'étendent naturellement aux types d'ordre.

Définition 53. On définit les sommes de types d'ordre (respectivement de quasi-ordre) :

Si L est un ordre de type d'ordre ϕ et $(\phi_x)_{x\in L}$ est une famille de types d'ordre et $(L_x)_{x\in L}$ tel que $\mathrm{ot}(L_x) = \phi_x, \forall x \in L$, alors on définit ψ comme $\psi = \mathrm{ot}(M)$ et $M = \sum\limits_{x\in L} L_x$.

On notera dans la suite abusivement $\psi = \sum\limits_{x\in\phi} \phi_x$.

On notera $\eta = \mathrm{ot}(\mathbb{Q})$. On peut alors redéfinir $\mathcal{S}$ comme la classe des types d'ordres $\ngeqslant \eta$, il est alors clair que le théorème de Hausdorff s'étend aux types d'ordres avec ces nouvelles définitions et que $\mathcal{S}$ est alors bqo.

Dans les parties qui suivent nous allons étendre le résultat de Fraïssé aux ordres σ-dispersés.

Définition 54. Un ordre total L est dit σ-dispersé si $L = \cup_{n\in\mathbb{N}} L_n$ où chaque L_n est un ordre dispersé pour l'ordre induit par L. On note dans toute la suite $\mathcal{M}$ la classe des ordres σ-dispersés.

Le but des trois parties suivantes est de montrer le résultat suivant :

Théorème 55. *La classe $\mathcal{M}$ est bqo.*

La démonstration suit un schéma similaire à celle de la conjecture de Fraïssé : on va montrer un théorème de structure sur les éléments de $\mathcal{M}$, puis on va utiliser le fait que la propriété bqo est stable par passage à certaines structures (on s'était servi de Q bqo implique Q^{Ord} bqo pour la conjecture de Fraïssé).

A partir de cette section on notera RC la classe des cardinaux réguliers. Si κ est un cardinal on notera $\mathrm{cf}(\kappa)$ sa cofinalité.

Définition 56. Si ϕ est un type d'ordre, on note ϕ^* l'ordre renversé, c'est à dire, si $\phi = \mathrm{ot}(L,<)$ alors $\phi^* = \mathrm{ot}(L,>)$.

Montrons d'abord quelques propriétés :

Lemme 57. (i). *Une somme dispersée de types dispersés est dispersée.*

(ii). *Si* $\kappa \in \mathrm{RC}$ *et* $\kappa \leqslant \sum_{y\in\psi} \phi_y$ *alors* $\kappa \leqslant \psi$ *ou il existe* y *tel que* $\kappa \leqslant \phi_y$.

(iii). *Si* $\kappa \in \mathrm{RC}, \lambda < \kappa, L = \cup_{\gamma<\lambda} L_\gamma$ *et* $\kappa \leqslant L$ *alors pour un certain* γ *on a* $\kappa \leqslant L_\gamma$.

(iv). *Si* $\kappa \in \mathrm{RC}, \phi \in \mathcal{S}, \mathrm{Card}(\phi) \geqslant \kappa$ *alors* $\kappa \leqslant \phi$ *ou* $\kappa^* \leqslant \phi$.

Démonstration. Le (i) est clair d'après le théorème de Hausdorff

Pour le (ii), soit $f : \kappa \to \sum_{y\in\psi} \phi_y$ une application strictement croissante. Définissons $\alpha_y = \min f^{-1}(\sum_{x\in\psi, y<x} \phi_x)$. Cette suite est cofinale dans κ et de type d'ordre $\leqslant \psi$, donc si $\kappa \nleqslant \psi$ alors cette suite est constante à partir d'un certain rang donc pour un certain y on a $\kappa \leqslant \phi_y$.

De même, pour le (iii), soit $f : \kappa \to \cup_{\gamma<\lambda} L_\gamma$ une application strictement croissante. Soit $\alpha_\gamma = \min(f^{-1}(\cup_{\gamma<\delta<\lambda} L_\delta)$. Cette suite est de nouveau cofinale dans κ de type d'ordre $\leqslant \lambda$ donc constante à partir d'un certain rang, donc pour un certain γ, $\kappa \leqslant L_\gamma$.

Pour le (iv), soit $\phi \in \mathcal{S}$, alors il existe β, $\phi \in S_\beta$. Procédons par induction : si $\beta = 0$ alors le résultat est immédiat. Sinon, supposons $\phi = \phi_0 + \cdots + \phi_\xi + \ldots (\xi < \alpha)$ (l'autre cas étant symétrique). On a alors $\alpha \leqslant \mathrm{Card}(\phi)$ et pour tout $\xi \in \mathrm{RC}$, $\mathrm{Card}(\phi_\xi) \leqslant \mathrm{Card}(\phi)$, donc d'après le (ii), on a le résultat. □

Nous allons maintenant construire des types d'ordres particuliers dans $\mathcal{M}$, qui vont prendre en compte le fait que les ordres de $\mathcal{M}$ peuvent être denses.

Définition 58. Soit α, β un couple de cardinaux, on dit que (α, β) est admissible si :

(i). $\alpha, \beta \in \mathrm{RC}$ et sont indénombrables.

(ii). $\max\{\alpha, \beta\}$ est un cardinal successeur.

Définition 59. Soit (α, β) un couple admissible ; nous allons définir un type d'ordre $\sigma_{\alpha\beta}$ par :

(i). Si $\alpha = \gamma^+$ et $\beta = \delta^+$, on pose $\sigma_{\alpha\beta} = \gamma^* \delta$.

(ii). Si α n'est pas successeur et $\beta = \delta^+$, alors $\sigma_{\alpha\beta} = \sum_{x \in \delta} \phi_x$ ou pour tout $x \in \delta, \phi_x < \alpha^*$ et pour tout $\lambda < \alpha$ il existe x tel que $\phi_x \geqslant \lambda^*$.

(iii). Dans le dernier cas on pose : $\sigma_{\alpha\beta} = (\sigma_{\beta\alpha})^*$.

Définition 60. On peut enfin définir $\eta_{\alpha\beta} = \mathrm{ot}(L)$, où $L = \cup_{n \in \mathbb{N}} L_n$ et les L_n sont définis par :

(i). $\mathrm{ot}(L_0) = \sigma_{\alpha\beta}$,

(ii). L_{n+1} est obtenu à partir de L_n en insérant une copie de $\sigma_{\alpha\beta}$ dans chaque intervalle vide $]x, y[$ de L_n.

On pourra remarquer que c'est le moyen le plus simple de construire un type d'ordre qui est β dense dans le sens croissant et α dense dans le sens décroissant. On a de plus $\eta = \eta_{\omega_1 \omega_1}$.

Le théorème suivant décrit les propriétés de $\eta_{\alpha\beta}$:

Théorème 61. *Soit (α, β) admissible,*

(i). $\eta_{\alpha\beta} \in \mathcal{M}$

(ii). $\alpha^* \nleqslant \eta_{\alpha\beta}$ *et* $\beta \nleqslant \eta_{\alpha\beta}$

(iii). *Si $]x, y[$ est un intervalle de L (ou $\mathrm{ot}(L) = \eta_{\alpha\beta}$), alors $\mathrm{ot}(]x, y[) \geqslant \alpha_0^*$ pour tout $\alpha_0 < \alpha$ et $\mathrm{ot}(]x, y[) \geqslant \beta_0$ pour tout $\beta_0 < \beta$*

Réciproquement si ϕ est non trivial (ie $\phi \neq 0, 1$) et $\phi = \mathrm{ot}(M)$ et (ϕ, M) satisfont (i)-(iii) (en remplaçant $\eta_{\alpha\beta}$ par ϕ et L par M dans les propositions avec α, β des cardinaux fixés), alors (α, β) est admissible et $\phi \equiv \eta_{\alpha\beta}$.

Démonstration. (i) On reprend ici les notations de la définition 60 ; par définition $L_0 \in \mathcal{S}$ et par construction $\mathrm{ot}(L_{n+1}) = \sum_{x \in L_n} \phi_x$ où chaque $\phi_x \in \{1, 1 + \sigma_{\alpha\beta}\}$, comme $\sigma_{\alpha\beta} \in \mathcal{S}$ d'après le (i) du lemme $57_{n+1} \in \mathcal{S}$, donc $L \in \mathcal{M}$.

(ii) On ne traite que le cas de β car celui de α^* est symétrique. Par définition $\beta \nleqslant \sigma_{\alpha\beta}$ donc par la remarque et le point précédent, on a $\beta \nleqslant \mathrm{ot}(L_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, comme $\beta > \omega$ (car (α, β) admissible) d'après le (ii) du lemme 57, $\beta \nleqslant \mathrm{ot}(L) = \eta_{\alpha\beta}$.

(iii) Encore une fois on ne fera la démonstration pour β, la partie pour α étant symétrique. Soit $\gamma < \beta$; on suppose que pour tout $\delta < \gamma, (iii)$ est vérifié. Soit $]x, y[$ un intervalle de L.

Pour un certain $m \in \omega, x, y \in L_m$, et comme $\eta \nleqslant L_m$ (car $L_m \in \S$), il existe $u, v \in [x, y]$ tel que $]u, v[$ est vide. Ainsi dans $L_{m+1},]x, y[$ contient une copie de $\sigma_{\alpha\beta}$ donc tous les cardinaux $< \beta$ se plonge dans $]x, y[$ (dans L_{m+1}).

Donc $\mathrm{cf}(\gamma) \leqslant \mathrm{ot}(]x, y[)$ (dans L_{m+1}), si $\gamma = \mathrm{cf}(\gamma)$ le résultat est montré. Si $\gamma > \mathrm{cf}(\gamma)$ alors on peut écrire $\gamma = \sum_{x \in \mathrm{cf}(\gamma)} \xi_x$ où $\xi < \gamma$ est un ordinal. Ainsi on a une suite $(y_x)_{x \in \mathrm{cf}(\gamma)}$ d'éléments de L_{m+1} strictement croissante ; par l'hypothèse d'induction chaque $\xi_x \leqslant]y_x, y_{x+1}[$ (dans L) donc $\gamma \leqslant]x, y[$ dans L.

Pour la réciproque, on se donne ϕ et M vérifiant les hypothèse $(i) - (iii)$, ainsi $M \in \mathcal{M}$, soit $M = \cup_{n \in \omega} M_n$ où chaque $M_n \in \S$.

Montrons tout d'abord que (α, β) est admissible. Si β (de même pour α) n'était pas régulier alors on pourrait exprimer β comme la somme sur $\mathrm{cf}(\beta)$ d'ordinaux $< \beta$, ce qui, par un argument similaire au point précédent, par le (iii) entrainerait $\beta \leqslant \eta_{\alpha\beta}$, ce qui est contradictoire avec (ii).

Comme $\mathrm{Card}(M) > 1$, il y a donc au moins deux points $x < y \in M$ donc on peut trouver par $(iii), x < z < y$, puis en itérant cet argument on a $\omega \leqslant \phi$ et $\omega^* \leqslant \phi$. Donc α et β sont indénombrables.

Enfin supposons que $\max(\alpha, \beta) = \beta$ et β n'est pas successeur, alors comme (par (iii)) pour tout $\beta_0 < \beta, \beta_0 \leq \phi, \mathrm{Card}(M) \geqslant \beta_0$ donc $\mathrm{Card}(M) \geqslant \beta$, mais comme $\beta \in \mathrm{RC}$ et $\beta > \omega$ on a pour un certain $n < \omega, \mathrm{Card}(M_n) \geqslant \beta$. Mais par le lemme 57 (iv) on a $\mathrm{ot}(M_n) \geqslant \beta$ ou $\geqslant \beta^* \geqslant \alpha^*$, ce qui est impossible.

Donnons d'abord la définition suivante : si N est un ordre total, alors (N_1, N_2) est une coupure de Dedekind si $\forall x \in N_1, \forall y, y \leqslant x \Rightarrow y \in N_1$ (de même avec N_2 pour $\geqslant$) et $N_1 \cup N_2 = N$ et $N_1 \cap N_2 = \emptyset$.

Nous allons montrer que si $\mathrm{Card}(N) > 1$ et N satisfait (iii) alors $\phi \leq \mathrm{ot}(N)$, on aura alors par symétrie $\phi \equiv \eta_{\alpha\beta}$. Définissons le fait suivant, soit N_1 tel que $\mathrm{ot}(N_1) \in \mathcal{S}$ se plonge dans N par f en respectant les coupures si pour toute coupure de Dedekind (N_1^1, N_1^2) de N_1 il existe un intervalle $]x, u[$ de N tel que

$$z \in]x, y[, u \in N_1^1, v \in N_1^2 \to f(u) < z < f(v).$$

Montrons par induction sur $\mathcal{S}$ que si N_1 satisfait (ii) alors N_1 se plonge dans N en respectant les coupures. Si $\mathrm{ot}(N_1)$ est une δ (ou δ^*) somme de type d'ordre $< \mathrm{ot}(N_1)$ alors $\delta < \mathrm{ot}(N)$ et comme δ est un ordinal, il peut se plonger dans N en respectant les coupures alors, comme chaque intervalle de N vérifie (iii), on peut plonger (par induction) tout les termes de N_1 en respectant les coupures dans les intervalles définis par le plongement de δ. Le plongement ainsi obtenu respecte bien les coupures. Maintenant pour plonger M dans N, si $M = \cup_n M_n$ alors on peut plonger M_0 dans N en respectant les coupures, puis on étend le plongement (toujours en respectant les coupures) à $M_0 \cup M_1$, etc. On obtient alors un plongement de ϕ dans $\mathrm{ot}(N)$ ce qui complète la preuve.

$\square$

La démonstration précédente donne aussi le corollaire suivant :

Corollaire 62. *$\phi \in \mathcal{M}$ et $\alpha^* \not\leqslant \phi, \beta \not\leqslant \phi \Leftrightarrow \phi \leqslant \eta_{\alpha\beta}$.*

Avec ceci nous allons pouvoir partitionner $\mathcal{M}$ en sous-classes :

Notation. On note $\mathcal{D}_{\alpha\beta} = \{\phi, \phi < \eta_{\alpha\beta}\}$.

Remarque 63. Le corollaire précédent nous permet d'affirmer que

$$\mathcal{M} = \cup_{(\alpha,\beta)\ \text{admissible}} \mathcal{D}_{\alpha\beta}$$

Nous pouvons maintenant passer au théorème de structure de cette partie :

Théorème 64. *(i). Une somme $\mathcal{D}_{\alpha\beta}$ de types de $\mathcal{D}_{\alpha\beta}$, est encore dans $\mathcal{D}_{\alpha\beta}$.*

(ii). $\mathcal{D}_{\alpha\beta} = \cup_{\gamma < \max(\alpha,\beta)} (\mathcal{D}_{\alpha\beta})_\gamma$ où les $(\mathcal{D}_{\alpha\beta})_\gamma$ sont définis par induction :

(a) $(\mathcal{D}_{\alpha\beta})_0 = \{0, 1\}$,

(b) Pour $\delta > 0, \phi \in (\mathcal{D}_{\alpha\beta})_\delta \Leftrightarrow \phi$ est une α_0^* ou une β_0 ou une $\eta_{\alpha_0\beta_0}$ somme, pour $\alpha_0 < \alpha$ ou $\beta_0 < \beta$ ou $(\alpha_0, \beta_0) < (\alpha, \beta)$ (respectivement) des ordinaux, de membres de $\cup_{\gamma<\delta} (\mathcal{D}_{\alpha\beta})_\gamma$.

Démonstration. Pour le (i), le corollaire précédent assure que $\eta_{\alpha\beta}^2 \equiv \eta_{\alpha\beta}$. Soient maintenant $\psi \in \mathcal{D}_{\alpha\beta}$, et $\phi_x \in \mathcal{D}_{\alpha\beta}$ pour tout $x \in M$ et $\mathrm{ot}(M) = \psi$; on a alors $\sum_{x\in\psi} \phi_x \leqslant \eta_{\alpha\beta}$. Si $\eta_{\alpha\beta} \leqslant \sum_{x\in\psi} \phi_x$ alors soit $\eta_{\alpha\beta} \leqslant \psi$, soit un intervalle de $\eta_{\alpha\beta}$ (donc $\eta_{\alpha\beta}$) est $\leqslant \phi_x$ pour un certain x, ce qui est impossible, donc $\sum_{x\in\psi} \phi_x < \eta_{\alpha\beta}$.

La preuve du (ii) est semblable dans sa structure à celle du théorème de Hausdorff. Soit donc $\mathcal{C}_{\alpha\beta} = \cup_{\gamma<\max(\alpha,\beta)}(\mathcal{D}_{\alpha\beta})_\gamma$, si $\mathrm{ot}(L) \leqslant \eta_{\alpha\beta}$ alors $\mathrm{Card}(L) < \max(\alpha,\beta)$ ainsi une somme $\mathcal{C}_{\alpha\beta}$ d'éléments de $\mathcal{C}_{\alpha\beta}$ est encore dans $\mathcal{C}_{\alpha\beta}$. Enfin si $\alpha_0 < \alpha$ et $\beta_0 < \beta$ alors $\alpha_0 \in \mathcal{D}_{\alpha\beta}, \beta_0 \in \mathcal{D}_{\alpha\beta}$ et $\eta_{\alpha_0\beta_0} \in \mathcal{D}_{\alpha\beta}$ donc $\mathcal{C}_{\alpha\beta} \subset \mathcal{D}_{\alpha\beta}$.

Supposons qu'il existe L tel que $\mathrm{ot}(L) \in \mathcal{D}_{\alpha\beta} - \mathcal{C}_{\alpha\beta}$; on définit sur L la relation suivante : $x \sim y \Leftrightarrow \mathrm{ot}(]x,y[) \in \mathcal{C}_{\alpha\beta}$ ou $\mathrm{ot}(]y,x[) \in \mathcal{C}_{\alpha\beta}$, clairement $x \sim x$ et $x \sim y \leftrightarrow y \sim x$. Enfin si $x < y < z$ et $x \sim y, y \sim z$ alors $\mathrm{ot}(]x,y[), \mathrm{ot}(]y,z[) \in \mathcal{C}_{\alpha\beta}$ donc $\mathrm{ot}(]x,z[) = \mathrm{ot}(]x,y[) + 1 + \mathrm{ot}(]y,z[) \in \mathcal{C}_{\alpha\beta}$ donc $x \sim z$ et $\sim$ est une relation d'équivalence. Comme dans la preuve de Hausdorff, en considérant des suites coinitiale et cofinale, on montre que les classes sont des intervalles et sont des éléments de $\mathcal{C}_{\alpha\beta}$.

Soit maintenant $L' \subset L$ obtenu en choisissant un élément dans chaque classe. Chaque intervalle de $]u,v[$ de L' est dans $\mathcal{D}_{\alpha\beta} - \mathcal{C}_{\alpha\beta}$; en effet dans le cas contraire l'intervalle de L formé par $]u,v[$ serait dans $\mathcal{C}_{\alpha\beta}$, ce qui contredit le fait que $u \not\sim v$. Comme $\mathrm{ot}(L') \in \mathcal{D}_{\alpha\beta}, \mathrm{ot}(L') < \eta_{\alpha\beta}$ donc il existe un intervalle $]x_0,y_0[\subset L'$ et $\alpha_0 < \alpha$ ou $\beta_0 < \beta$ tel que $\alpha_0^* \not\leqslant L', \beta_0 \not\leqslant {}'$, supposons qu'il existe un tel β_0 (le cas pour α est symétrique) et que tout intervalle $]u,v[$ de L' vérifie, $\forall \beta_1 < \beta_0, \beta_1 \leqslant \mathrm{ot}(]u,v[)$.

Maintenant choisissons $\alpha_0 \leqslant \alpha$ le plus petit ordinal δ tel que pour un intervalle $]x_1,y_1[\subset]x_0,y_0[$ on ait $\delta \not\leqslant \mathrm{ot}(]x_1,y_1[)$. Maintenant $\mathrm{ot}(]x_1,y_1[), \alpha_0$ et β_0 vérifient les hypothèses de la réciproque du théorème 61, donc (α_0,β_0) est admissible et $\eta_{\alpha_0\beta_0} \equiv \mathrm{ot}(x,y_1)$. Mais comme $(\alpha_0,\beta_0) < (\alpha,\beta), \eta_{\alpha_0\beta_0} \in \mathcal{C}_{\alpha\beta}$. Ainsi $\mathrm{ot}(]x_1,y_1[) \in \mathcal{C}_{\alpha\beta}$ ce qui nous donne une contradiction et donc le théorème. $\square$

8 Un théorème sur les arbres

Ici nous allons utiliser le fait que Q bqo implique $\mathcal{T}_Q$, la classe des Q-arbres, est bqo ; ce sera l'objet de la prochaine partie. Elle est basée sur les travaux de Nash-Williams [4]

Définition 65. Soit Q un qo, nous allons mettre deux structures de qo sur $\mathscr{P}(Q)$:

Premier ordre : soient $X, Y \in \mathscr{P}(Q)$; on note $X \leqslant_m Y$ s'il existe une fonction $f : X \to Y$ telle que $\forall x \in X, x \leqslant f(x)$. On peut aussi le reformuler par $\forall x \in X, \exists y \in Y$ tel que $x \leqslant y$. Comme la composée de fonctions croissantes est croissante, c'est bien un quasi-ordre.

Deuxième ordre : on note $X \leqslant_1 Y$ si $X \leqslant_m Y$ et la fonction précédente est injective ; encore une fois c'est un quasi-ordre.

Propriété 66. *On a Q bqo $\Rightarrow (\mathscr{P}(Q), \leqslant_m)$ est bqo et $(\mathscr{P}(Q), \leqslant_1)$ est bqo.*

Démonstration. Commençons par $(\mathscr{P}(Q), \leqslant_m)$: Soit $f : [\omega]^\omega \to \mathscr{P}(Q)$ un mauvais tableau, alors pour tout $X \in [\omega]^\omega, Y = X^+$, on a $f(X) \nleqslant f(Y)$ donc il existe $x \in f(X)$ tel que pour tout $y \in f(Y), x \nleqslant y$. On définit $g(X)$ par un tel x, alors g est un mauvais tableau sur Q, ce qui est absurde car Q est bqo.

Ensuite pour $(\mathscr{P}(Q), \leqslant_1)$: Soit $f : [\omega]^\omega \to \mathscr{P}(Q)$ un mauvais tableau, alors pour tout $X \in [\omega]^\omega$, il existe une énumération de $f(X)$, $s_X : \mathrm{Card}(f(X)) \to f(X)$, alors $X \to s_X$ est un tableau sur Q^{Ord}.Comme c'est un ordre bqo, il existe X tel que $s_X \leqslant s_Y$. On obtient donc une fonction injective de $h : f(X) \to f(Y)$ telle que $h(x) \leqslant h(y)$.

Finalement $\mathscr{P}(Q)$ est bien bqo pour les deux ordres. □

Définition 67. Un arbre T est un ensemble partiellement ordonné par $\leqslant_T$, tel que chaque segment initial est bien ordonné. S'il existe $x \in T$ tel que pour tout $y \in T, x \leqslant_T y$ alors on dit que T est enraciné et que x est sa racine, dans un tel cas on note $x = \rho(T)$ la racine de T.

On note de plus $\mathcal{T}$ la classe des arbres T tels que : T est enraciné et il n'y a pas de chemin de longueur $> \omega$

Pour tout $T \in \mathcal{T}$ et $x, y \in T$ on note $x \cap y$ le plus grand ancêtre commun entre x et y (on remarquera que c'est toujours bien défini car il y a au moins la racine). On peut alors définir une relation d'ordre sur $\mathcal{T}$. Soit $T_1, T_2 \in \mathcal{T}$, on définit $T_1 \leqslant T_2$ ssi il existe une fonction $f : T_1 \to T_2$ telle que $f(x \cap y) = f(x) \cap f(y)$. On remarquera que pour montrer que f est un plongement, il suffit de vérifier que pour tout $x \in T_1$, et tout y, z deux successeurs distincts de x sont envoyés par f dans deux branches distinctes de racines deux successeurs distincts de $f(x)$.

Définition 68. On définit maintenant un Q-arbre comme un couple (T, l) ou T est un arbre et $l : T \to Q$ est une application qui sert à étiqueter les sommets de T. De la même manière on note $\mathcal{T}_Q$ la classe des Q-arbres (T, l) tel que $T \in \mathcal{T}$.

On quasi-ordonne $\mathcal{T}_Q$ par $(T_1, l_1) \leqslant (T_2, l_2)$ ssi $T_1 \leqslant T_2$ par une fonction f telle que pour tout $x \in T_1, l1(x) \leqslant l_2(f(x))$.

Le théorème que l'on cherche à montrer dans cette partie est :

Théorème 69. *Q bqo $\Longrightarrow \mathcal{T}_Q$ bqo.*

Dans toute la suite nous supposerons Q bqo. Pour la démonstration nous allons avoir besoin de trois lemmes et des définitions suivantes :

Définition 70. Soit $T \in \mathcal{T}$ et $x \in T$, on note $S(x)$ l'ensemble des successeurs immédiats de x.

Si $(T, l) \in \mathcal{T}_Q$ et $x \in T$ on note $\mathrm{br}_{(T,l)}(x)$ le Q-arbre formé par les noeuds $\geqslant x$, que l'on abrègera selon le contexte en $\mathrm{br}(x)$, on dit alors que $\mathrm{br}(x)$ est la branche de (T, l) de racine x.

Une branche X de (T, l) est dite stricte ssi $X < (T, l)$.

Le premier lemme va réduire le problème de montrer que $\mathcal{T}_Q$ est bqo à celui d'une classe plus petite.

Définition 71. Soit $(T, l) \in \mathcal{T}_Q$, on dit que (T, l) est infiniment descendant ssi il existe une suite de noeuds $x_1 <_T x_2 <_T \dots$ tels que $br(x_1) > br(x_2) > \dots$, dans le cas contraire on dit que (T, l) est finiment descendant.

On note $\mathcal{F}_Q$ la classe des Q-arbres finiment descendants de $\mathcal{T}_Q$ et $F(T, l)$ l'ensemble des branches finiment descendantes de (T, l).

Définition 72. Soit $(T, l) \in \mathcal{T}_Q$ et $x \in T$, on définit

$$L(x) = \{\mathrm{br}(y), y \in S(x), \mathrm{br}(y) \in F(T, l)\}$$

$$M(x) = \{y, y \in S(x), \mathrm{br}(y) \notin F(T, l)\}$$

Et
$$\Delta_{(T,l)}(x) = (L(x), \mathrm{Card}(M(x)), l(x))$$
Enfin
$$\Phi_{(T,l)}(x) = \{\Delta_{(T,l)}(y), y \geqslant_T x\}$$

De même selon le contexte on écrira : $\Delta(x)$ et $\Phi(x)$, on a $\Delta(x) \in \mathscr{P}(\mathcal{T}_Q) \times \mathrm{Card} \times Q$ que l'on quasi-ordonne par l'ordre produit et $\mathscr{P}(\mathcal{T}_Q)$ est quasi-ordonné par $\leqslant_1$. De plus $\Phi(x) \in \mathscr{P}(\mathscr{P}(\mathcal{T}_Q) \times \mathrm{Card} \times Q)$ que l'on quasi-ordonne par la relation $\leqslant_m$.

Lemme 73. *Si $(T,l) \in \mathcal{T}_Q$ et $F(T,l)$ est bqo alors $(T,l) \in \mathcal{F}_Q$.*

Remarque 74. Avec ce lemme, il suffit de montrer que $\mathcal{F}_Q$ est bqo, ce qui sera l'objet des lemmes suivants.

Démonstration. Il est clair d'après la définition que pour tout $x \in T$, $\Phi(x) \in \mathscr{P}(\mathscr{P}(F(T,l)) \times \mathrm{Card} \times Q)$ qui est alors bqo par hypothèse.

Supposons alors que $(T,l) \notin \mathcal{F}_Q$, il existe alors $x \in T$ tel que $\mathrm{br}(x) \notin \mathcal{F}_Q$, nous allons alors construire un $x_1 > x$ tel que $\Phi(x) > \Phi(x_1)$. C'est une opération que l'on peut réitérer et on obtient alors une suite strictement croissante $x < x_1 < x_2 < \ldots$ telle que $\Phi(x) > \Phi(x_1) > \Phi(x_2) \ldots$, ce qui contredit le fait que $\mathscr{P}(\mathscr{P}(\mathcal{T}_Q) \times \mathrm{Card} \times Q)$ est wqo donc bqo.

Supposons alors qu'il n'existe pas de tel x_1. Cela implique alors que pour tout $z \geqslant_T x, \Phi(z) \leqslant \Phi(x)$, et par hypothèse pour tout $u \geqslant_T x$ tel que $br(u) \notin \mathcal{F}_Q$ on a $\Phi(u) \equiv \Phi(x)$. Comme $\mathrm{br}(x) \notin \mathcal{F}_Q$, il existe $y >_T x$ tel que $\mathrm{br}(y) \notin \mathcal{F}_Q$ et $\mathrm{br}(x) > \mathrm{br}(y)$, nous allons maintenant montrer que $\mathrm{br}(y) \leqslant \mathrm{br}(x)$ et donc aboutir à une contradiction.

Nous allons construire un plongement f de $\mathrm{br}(x)$ dans $\mathrm{br}(y)$, comme $\Phi(x) \equiv \Phi(y)$, il existe $z \geqslant_T y$ tel que $\Delta(x) \leqslant \Delta(z)$, on définit $f(x) = z$, on a alors $l(x) \leqslant l(fx))$, comme $L(x) \leqslant L(z)$ pour l'ordre $\leqslant_1$ on peut trouver une application $g : L(x) \to L(z)$ injective telle que $b \leqslant g(b)$ pour tout $b \in L(x)$, alors on obtient des plongements $h_b : b \to g(b)$. Ces plongements permettent d'étendre f à toutes les branches de $L(x)$ en préservant le fait que f est un plongement.

Il reste donc à définir f sur les branches des éléments de $M(x)$, comme $\mathrm{Card}(M(x)) \leqslant \mathrm{Card}(M(z))$ on a une injection $M(x) \to M(z)$, on peut donc s'assurer que la construction suivante préserve le fait que f est un plongement. Soit donc $v \in M(x)$ et $w \in M(z)$, on a d'après le paragraphe précédent comme $v, w \geqslant_T x, \Phi(v) \equiv \Phi(x) \equiv \Phi(w)$, donc on peut réitérer la construction précédente, on conclut alors par induction. $\square$

Les deux prochains lemmes vont montrer que $\mathcal{F}_Q$ est bqo, ce qui suffira pour conclure.

Définition 75. Soit $(T, l) \in \mathcal{T}_Q$ et $x \in T$, on définit :

$$J(x) = \{\mathrm{br}(y), y \in S(x) \text{ et } \mathrm{br}(y) \text{ est stricte}\}$$
$$K(x) = \{y, y \in S(x) \text{ et } \mathrm{br}(y) \equiv (T, l)\}$$

De plus on définit :

$$\Gamma_{(T,l)}(x) = (J(x), \mathrm{Card}(K(x)), l(x))$$
$$\Theta((T, l)) = \{\Gamma_{(T,l)}(x), x \in T\}$$

On fera attention au fait que $\Gamma_{(T,l)}(x) \in \mathscr{P}(\mathcal{T}_Q) \times \mathrm{Card} \times Q$ et $\Theta((T, l)) \in \mathscr{P}(\mathscr{P}(\mathcal{T}_Q) \times \mathrm{Card} \times Q)$ que l'on quasi-ordonne comme précédemment.

Lemme 76. $\Theta((T_1, l_1)) \leqslant \Theta((T_2, l_2)) \Longrightarrow (T_1, l_1) \leqslant (T_2, l_2)$

Lemme 77. *$\mathcal{F}_Q$ est bqo.*

Démonstration. Voyons d'abord comment $\mathcal{F}_Q$ bqo se déduit du premier lemme. Sur $\mathcal{F}_Q$ on définit un quasi-ordre $(T_1, l_1) \leqslant^* (T_2, l_2)$ si (T_1, l_1) est une branche stricte de (T_2, l_2). Par définition de $\mathcal{F}_Q, \leqslant^*$ est bien fondé.

Soit donc $f : [\omega]^\omega \to \mathcal{F}_Q$ un tableau minimal mauvais pour $\leqslant^*$. On définit $g : [\omega]^\omega \to \mathscr{P}(\mathscr{P}(\mathcal{T}_Q) \times \mathrm{Card} \times Q)$ par $g(X) = \Theta(f(X))$. Comme f est mauvais, g l'est aussi par le premier lemme. Comme dans la démonstration du fait que $(\mathscr{P}(Q), \leqslant_m)$ est bqo, on peut extraire un tableau $h[\omega]^\omega \to \mathscr{P}(\mathcal{T}_Q) \times \mathrm{Card} \times Q$ tel que $h(X) \in g(X)$ pour tout $X \in [\omega]^\omega$.

On notera p_i la projection sur la i-ème coordonnée ; comme Q et Card sont bqo, quitte à extraire, on peut supposer que pour tout $X \in [\omega]^\omega, p_2(h(X)) \leqslant p_2(h(Y))$ et $p_3(h(X)) \leqslant p_3(h(Y))$ ou $Y = X^+$. Ainsi comme h est mauvais on a nécessairement $p_1 \circ h : [\omega]^\omega \to \mathscr{P}(\mathcal{F}_Q))$ est un mauvais tableau. Comme dans la démonstration du fait que $(\mathscr{P}(Q), \leqslant_1)$ est bqo, on peut trouver un mauvais tableau $\tilde{h} : [\omega]^\omega \to \mathcal{F}_Q^{\mathrm{Ord}}$ tel que $\tilde{h}(X)$ soit une énumeration de $p_1(h(X))$, mais alors par le théorème 38 on peut trouver un mauvais tableau $j : [A]^\omega \to \mathcal{F}_Q$ tel que $j(X)$ est un terme de $\tilde{h}(X)$ donc $j(X) \in p_1(h(X))$.

Finalement j est un mauvais $\mathcal{F}_Q$-tableau et $j(X) <^* f(X)$ par définition donc f n'est pas minimal mauvais, ce qui est absurde, ainsi $\mathcal{F}_Q$ est bqo. $\square$

Démonstration. Montrons maintenant le premier des deux lemmes, nous allons construire un plongement de (T_1, l_1) dans (T_2, l_2) par induction sur T_1.

Soit $v \in T_1$; supposons que pour tout $u \leqslant_T v$ dans T_1, f est définie et qu'on a défini deux ensembles $K_1(u)$ et $K_2(u)$ vérifiant :

(i). $K_1(u) \cup K_2(u) = K(f(u))$

(ii). $K_1(u) \cap K_2(u) = \emptyset$

(iii). $J(u) \leqslant_1 (J(f(u)) \cup \{\mathrm{br}(x), x \in K_1(u)\})$

(iv). $\mathrm{Card}(K(u)) \leqslant \mathrm{Card}(K_2(u))$

On peut comprendre $K_1(u)$ et $K_2(u)$ comme une partition de $K(f(u))$ qui décrit où s'envoient les branches de $K(u)$ et $J(u)$, c'est à dire que les branches de $J(u)$ s'envoient dans des branches de $J(f(u))$ et des branches de $K_1(u)$ alors que les branches de $K(u)$ s'envoient sur des branches de $K_2(u)$.

Il nous faut maintenant étendre f aux successeurs directs de v. Le point (iii) nous permet d'étendre f à toutes les branches de $J(v)$ dans des branches distinctes de $J(f(v)) \cup \{\mathrm{br}(x), x \in K_1(v)\}$. Il reste donc à définir f sur $K(v)$.

Comme $\mathrm{Card}(K(v)) \leqslant \mathrm{Card}(K_2(v))$, on peut trouver une injection de $K(v) \to K_2(v)$. Il suffit alors de montrer que pour tout $y \in K(v), z \in K_2(v)$, on peut définir $f(y) \in \mathrm{br}(z)$ qui satisfait l'hypothèse d'induction.

On a $z \in K(f(v))$ donc $\mathrm{br}(z) \equiv (T_2, l_2)$; choisissons donc un plongement de $j : (T_2, l_2) \to \mathrm{br}(z)$. Comme $\Theta((T_1, l_1)) \leqslant \Theta((T_2, l_2))$, il existe $w \in T_2$, tel que $\Gamma_{(T_1,l_1)}(y) \leqslant \Gamma_{(T_2,l_2)}(w)$.

On pose alors $f(y) = j(w)$, on peut remarquer que $l_1(y) \leqslant l_2(w) \leqslant l_2(f(y))$. On définit $V = \{x \in J(w), j(x) \in \mathrm{br}(t) \text{pour un certain } t \in K(j(w))\}$. (On fait ici un abus de notation car les éléments de $J(w)$ sont des branches et non des sommets, mais on considère dans cette définition $J(w)$ comme l'ensemble des successeurs de w vérifiant $\mathrm{br}(x)$ est stricte.)

On pose alors $K_1(y) = \{x \in S(f(y)), j(v) \geqslant_{T_2} x, \text{pour un certain } x \in V\}$, et $K_2(y) = K(f(y)) - K_1(y)$. Clairement (i) et (ii) sont vérifiés, comme $\Gamma_{(T_1,l_1)}(y) \leqslant \Gamma_{(T_2,l_2)}(w)$, on a $\mathrm{Card}(K(y)) \leqslant \mathrm{Card}(K(w)) \leqslant \mathrm{Card}(j(w))$ car j est un plongement, on obtient donc (iv). Par définition de $K_1(y)$ et comme j est un plongement, on a (iii). □

9 Le théorème sur les ordres σ-dispersés

Nous allons maintenant donner une suite de définitions. Dans toute la suite on fixe Q un quasi-ordre (a priori non bqo).

Définition 78. On appelle Q-ordre linéaire un couple, (L, l) où L est un ensemble linéairement ordonné et $l : L \to Q$ une application. Deux Q-ordres linéaires (L_1, l_1) et (L_2, l_2) sont isomorphes s'il existe une application bijective strictement croissante $f : L_1 \to L_2$ telle que $l_1(x) = l_2(f(x))$ pour tout $x \in L_1$. Un Q-type est la classe d'isomorphisme d'un Q-ordre linéaire.

On notera Φ, X, Ψ, Θ les Q-types.

La classe des Q-types est quasi-ordonnée par la relation de plongement suivante : $\Phi = \mathrm{ot}(L_1, l_1), \Psi = \mathrm{ot}(L_2, l_2)$, $\Phi \leqslant \Psi \iff$ s'il existe $f : L_1 \to L_2$ strictement croissante telle que $l_1(x) \leqslant l_2(f(x))$pour tout $x \in L_1$

Si $\Phi = \mathrm{ot}(L, l)$ est un Q-type alors on appelle $\mathrm{ot}(L)$ la base de Φ que l'on note $\mathrm{bs}(\Phi)$ et l son label. La somme ordonné de $\sum_{x \in \psi} \Phi_x$ est le Q-type naturel dont la base est $\sum_{x \in \psi} \mathrm{bs}(\Phi_x)$.

Le Q type de base 0 sera noté 0, pour $q \in Q$ on note $1_q = \mathrm{ot}(x, l)$ ou $l(x) = q$.

Définition 79. Soit ϕ un type d'ordre, alors $Q^\phi, (Q^{\leqslant\phi}, Q^{\equiv\phi})$ est la classe des Q-types Φ tel que $\mathrm{bs}(\Phi) = \phi$(resp $\leqslant \phi, \equiv \phi$). Si $\mathcal{R}$ est une classe de types d'ordres $Q^{\mathcal{R}}$ est la classe des Q-types Φ tels que $\mathrm{bs}(\Phi) \in \mathcal{R}$.

Remarque 80. On remarquera que les notations précédentes : $Q^{\mathrm{Ord}}, Q^\omega, \ldots$ ne sont pas exactement identiques, les anciennes notations désignaient des suites ; elle désignent ici des Q-types mais la notion est presque identique, en effet si $s : \alpha \to Q$ est un élément de Q^{Ord} alors $\mathrm{ot}((\alpha, s))$ est le Q-type qui lui est naturellement associé. On considèrera que les notations coïncident de cette manière.

L'objet de toute la suite est de montrer que Q bqo $\Rightarrow Q^{\mathcal{M}}$ bqo ; pour cela nous allons construire une classe $\mathcal{H}(Q)$ qui sera composée des éléments additivement indécomposables de $Q^{\mathcal{M}}$. Il nous suffira alors de montrer que $\mathcal{H}(Q)$ est bqo pour obtenir le résultat. Nous allons de plus montrer que les éléments de $\mathcal{H}(Q)$ se plonge dans $\mathcal{T}_{Q^+}$ pour un $Q \subset Q^+$ que nous allons définir. La classe $\mathcal{H}(Q)$ sera définie par induction. L'objet des prochaines définitions est de définir les constructeurs de $\mathcal{H}(Q)$.

Définition 81. Si Φ est un Q-type, $\mathcal{U}$ un ensemble de Q-type (on demande ici précisément à ce que $\mathcal{U}$ soit un ensemble et pas une classe) et κ un cardinal infini, on dit que Q une $(\mathcal{U},\kappa)$-somme non bornée ssi $\Phi = \sum\limits_{x\in\kappa} \Phi_x$ où $\{\Phi_x, x \in \kappa\} = \mathcal{U}$ et

$$\forall x \in \kappa, \exists Y \subset \kappa(\mathrm{Card}(Y) = \kappa \mathrm{et} \forall y \in Y, \Phi_x \leqslant \Phi_y).$$

De la même manière on définit les $(\mathcal{U},\kappa^*)$-sommes non bornées.

Lemme 82. *Soient* $\delta \in \mathrm{RC}, \kappa \leqslant \delta, \Phi$ *une* $(\mathcal{U},\kappa)$*-somme non bornée et* Ψ *une* $(\mathcal{V},\delta)$*-somme non bornée (respectivement des* $(\mathcal{U},\kappa^*), (\mathcal{V},\delta^*)$*-sommes non bornées) et* $\forall \Theta \in \mathcal{U}, \exists X \in \mathcal{V}, \Theta \leqslant X$. *Alors* $\Phi \leqslant \Psi$

Démonstration. Soient $\Phi = \sum\limits_{x\in\kappa} \Phi_x$ et $\Psi = \sum\limits_{y\in\delta} \Psi_y$; nous allons construire un plongement $h : \Phi \to \Psi$ par induction. Supposons que h est défini sur $\sum\limits_{x<x_0} \Phi_x$ et à valeur dans $\sum\limits_{y<y_0} \Psi_y$ un segment initial de Ψ, alors par hypothèse il existe $y_1 \in \delta$ tel que $\Phi_{x_0} \leqslant \Psi_{y_1}$. Comme Ψ est une somme non bornée, il existe $y_2 \geqslant y_0$ tel que $\Psi_{y_1} \leqslant \Psi_{y_2}$ alors on étend $h : \Phi_{x_0} \to \Psi_{y_2}$. Comme $\delta \in \mathrm{RC}$ et $\kappa \leqslant \delta$, une limite de $\gamma < \kappa$ segments initiaux propres de Ψ est encore un segment initial propre de Ψ donc on peut faire passer l'argument précédent aux limites, ce qui conclut l'induction. L'argument pour κ^* et δ^* est symétrique. $\square$

Définition 83. Soit $\mathcal{R}$ un ensemble de Q-types et $\Psi \in \mathcal{R}^\phi$ pour un type d'ordre ϕ, alors $\Psi = \mathrm{ot}(L,l)$ où $l : L \to \mathcal{R}$ et $\mathrm{ot}(L) = \phi$. On peut naturellement lui associer le Q-type $\overline{\Psi}$ défini par :

$$\overline{\Psi} = \sum_{x\in L} l(x).$$

On dit que Φ est (Q,α,β)-universel ssi $\Phi \in Q^{\equiv\eta_{\alpha\beta}}$ et pour tout $\Psi \in Q^{\leqslant\eta_{\alpha\beta}}, \Psi \leqslant \Phi$. Si $\mathcal{R} \subset Q^{\mathcal{M}}$ et Φ est (Q,α,β)-universel alors on dit que $\overline{\Phi}$ est un $(\mathcal{R},\alpha,\beta)$-mélange.

Lemme 84. *Si* Φ *est un* $(\mathcal{U},\alpha,\beta)$*-mélange et* Ψ *un* $(\mathcal{V},\gamma,\delta)$*-mélange,* $(\alpha,\beta) \leqslant (\gamma,\delta)$ *et* $\forall X \in \mathcal{U}, \exists \theta \in \mathcal{V}, X \leqslant \Theta$ *alors* $\Phi \leqslant \Psi$.

La preuve de ce lemme est similaire à la preuve du lemme précédent.

Remarque 85. Les propriétés que l'on demande pour les mélanges sont très fortes et dans la suite on ne donnera pas d'exemple de ceux-ci. Il se pourrait qu'il n'en existe pas mais on n'en demande jamais l'existence dans la suite.

Nous avons maintenant défini nos constructeurs, nous allons donc définir la classe $\mathcal{H}(Q)$:

Définition 86. (i). $\mathcal{H}_0(Q) = \{0\} \cup \{1_q, q \in Q\}$

(ii). Si $\alpha > 0$ alors $\Phi \in \mathcal{H}_\alpha(Q) \leftrightarrow$ pour un certain $\mathcal{U} \subset \cup_{\beta<\alpha}\mathcal{H}_\beta(Q)$

(a) Φ est une $(\mathcal{U}, \kappa)$ ou $(\mathcal{U}, \kappa^*)$-somme non bornée pour $\kappa \in \mathrm{RC}$, ou

(b) Φ est un $(\mathcal{U}, \gamma, \delta)$-mélange pour un couple (γ, δ) admissible.

On pose alors $\mathcal{H}(Q) = \cup_{\alpha\in\mathrm{Ord}}H_\alpha(Q)$.

Nous allons maintenant montrer que $\mathcal{H}(Q)$ est bqo (si Q l'est), pour cela nous allons plonger $\mathcal{H}(Q)$ dans $\mathcal{T}_{Q^+}$; définissons maintenant Q^+ :

Définition 87. Nous définissons Q^+ en rajoutant à Q des éléments a_κ et b_κ pour tous $\kappa \in \mathrm{RC}$, et des éléments $c_{\alpha\beta}$ pour tout couple (α, β) admissible. On quasi-ordonne Q^+ de la manière suivante : $a_\kappa \leqslant a_\lambda \leftrightarrow b_\kappa \leqslant b_\lambda \leftrightarrow \kappa \leqslant \lambda$. Et $c_{\alpha\beta} \leqslant c_{\gamma\delta} \leftrightarrow (\alpha, \beta) \leqslant (\gamma, \delta)$, sur Q l'ordre reste identique.

Définissons maintenant un plongement de $\mathcal{H}(Q) \to T_{Q^+}$:

Définition 88. Soit $q \in Q$ et $\mathcal{B} \subset \mathcal{T}_Q$, on définit $[q, \mathcal{B}]$ comme le Q-arbre (T, l) tel que $l(\rho(T)) = q$ et $\{\mathrm{br}(x), x \in S(\rho(T))\} = \mathcal{B}$. Et on note 1^q le Q-arbre réduit à un sommet étiqueté par q.

A chaque $\Phi \in \mathcal{H}(Q)$, on associe un $T(\Phi) \in \mathcal{T}_{Q^+}$ défini par induction :

(i). $T(0)$ est le Q^+ arbre vide, et $T(1_q) = 1^q$.

(ii). Supposons que $T(\Psi)$ est défini pour tout $\Psi \in \cup_{\beta<\alpha}\mathcal{H}_\beta(Q)$ et supposons $\Phi \in \mathcal{H}_\alpha(Q) - \cup_{\beta<\alpha}\mathcal{H}_\beta(Q)$. Par définition on a un ensemble $\mathcal{U} \subset \cup_{\beta<\alpha}\mathcal{H}_\beta(Q)$ tel que

(a) Pour un certain $\lambda \in \mathrm{RC}, \Phi$ est une $(\mathcal{U}, \lambda)$-somme non bornée, alors on pose $T(\Phi) = [a_\lambda, \mathcal{U}]$

(b) Pour un certain $\lambda \in \mathrm{RC}, \Phi$ est une $(\mathcal{U}, \lambda^*)$-somme non bornée, alors on pose $T(\Phi) = [b_\lambda, \mathcal{U}]$

(c) Pour un couple (γ, δ) admissible, Φ est un $(\mathcal{U}, \gamma, \delta)$-mélange, alors on pose $T(\Phi) = [c_{\gamma\delta}, \mathcal{U}]$.

Théorème 89. *Si* $\Phi, \Psi \in \mathcal{H}(Q)$ *et* $T(\Phi) \leqslant T(\Psi)$ *alors* $\Phi \leqslant \Psi$.

Corollaire 90. Q *bqo* $\Rightarrow \mathcal{H}(Q)$ *bqo*

Démonstration. La démonstration du corollaire est immédiate : par le théorème, si s est un mauvais tableau sur $\mathcal{H}(Q)$ alors $T \circ s$ est un mauvais tableau sur $\mathcal{T}_{Q^+}$ qui est bqo car Q^+ est bqo, ce qui est impossible. Donc $\mathcal{H}(Q)$ est bqo. $\square$

Démonstration. Montrons maintenant le théorème, pour un certain $(\alpha, \beta), \Phi \in \mathcal{H}_\alpha(Q)$ et $\Psi \in \mathcal{H}_\beta(Q)$ supposons par induction que pour tout $(\alpha_0, \beta_0) < (\alpha, \beta)$ ou $(\alpha_0, \beta_0) \in \mathrm{Ord} \times \mathrm{Ord}$. Soit $T(\Phi) = (T_1, l_1)$ et $T(\Psi) = (L_2, l_2)$ et $f : T_1 \to T_2$ un plongement de $T(\Phi)$ dans $T(\Psi)$; quitte à appliquer l'hypothèse d'induction, on peut supposer que $f(\rho(T_1)) = \rho(T_2)$. Nous avons maintenant plusieurs cas :

- (i). Si $T(\Phi)$ est l'arbre vide alors $\Phi \leqslant \Psi$.
- (ii). Si pour un certain $q \in Q, l_1(\rho(T_1)) = q$, alors comme $l_1(\rho(T_1))$ et $l_2(\rho(T_2))$ sont comparable on a $l_2(\rho(T_2)) = r \in Q$ donc $\Phi = 1_q$ et $\Psi = 1_r$ et le théorème est vérifié.
- (iii). Si $l_1(\rho(T_1)) = a_\kappa$ pour un certain $\kappa \in \mathrm{RC}$, par le même argument que précédemment, $l_2(\rho(T_2)) = a_\lambda$ pour un $\lambda \in \mathrm{RC}, \lambda \geqslant \kappa$. Alors Φ est une $(\mathcal{U}, \kappa)$ somme non bornée et Ψ est une $(\mathcal{V}, \delta)$-somme non bornée où $\mathcal{U} = \{\Theta, \text{pour un } x \in S(\rho(T_1)), T(\Theta) = \mathrm{br}(x)\}$ et $\mathcal{V} = \{\Theta, \text{pour un } x \in S(\rho(T_2)), T(\Theta) = \mathrm{br}(x)\}$, alors comme f est un plongement de Q arbre pour toute branche $\mathrm{br}(x)$ pour $x \in S(\rho(T_1))$ il existe $y \in S(\rho(T_2))$. Par hypothèse d'induction $\forall \Theta \in \mathcal{U}, \exists X \in \mathcal{V}, \Theta \leqslant X$. Par le lemme 9 $\Phi \leqslant \Psi$.
- (iv). Le cas où $l_1(\rho(T_1)) = b_\kappa$ est symétrique.
- (v). Enfin si $l_1(\rho(T_1)) = c_{\alpha\beta}$ pour (α, β) admissible, alors $l_2(\rho(T_2)) = c_{\gamma\delta}$ pour (γ, δ) admissible. Donc Φ est un $(\mathcal{U}, \alpha, \beta)$-mélange et Ψ est un $(\mathcal{V}, \gamma, \delta)$-mélange ou $\mathcal{U}, \mathcal{V}$ sont définis comme précédemment, alors par hypothèse $\forall \Theta \in \mathcal{U}, \exists X \in \mathcal{V}, \Theta \leqslant X$. Par le lemme 84, $\Phi \leqslant \Psi$.

$\square$

Les trois prochains résultats vont montrer que $\mathcal{H}(Q)$ bqo $\Rightarrow Q^{\mathcal{M}}$ bqo.

Théorème 91. *Soit Q wqo et $\Phi \in Q^{\leqslant \eta_{\alpha\beta}}$; alors Φ est une $\mathcal{D}_{\alpha\beta}$ somme de 1_q ou $q \in Q$ et de types (R, α_0, β_0)-universels, ou $R \subset Q$ et $(\alpha_0, \beta_0) \leqslant (\alpha, \beta)$.*

Démonstration. Encore une fois cette preuve cherche à montrer l'égalité entre deux classes de types d'ordre, on va donc utiliser une stratégie similaire à la démonstration de Hausdorff.

Par induction sur Q (car Q est wqo) nous allons supposer que le théorème reste vrai si l'on remplace Q par Q_q où $q \in Q$ et $Q_q = \{r \in Q, q \nleqslant r\}$. Soit $\Phi \in Q^{\leqslant \eta_{\alpha\beta}}, \Phi = \mathrm{ot}((L,l))$. Pour $y < z \in L$ on définit une relation $y \sim z \leftrightarrow$ tout sous-intervalle $]u,v[$ de $]y,z[$ est une $\mathcal{D}_{\alpha\beta}$ somme de 1_q où $q \in Q$ et de types (R,α_0,β_0)-universels. On peut aussi ajouter $y \sim y$ et $y \sim z \leftrightarrow z \sim y$ et $\sim$ est une relation d'équivalence, encore une fois les classes sont des intervalles de L. Si $x \in L$, on notera $|x|$ la classe de x. En considérant des suites coinitiales et cofinales de $|x|$, il est clair que x est une $\mathcal{D}_{\alpha\beta}$ somme de 1_q ou $q \in Q$ et de types (R,α_0,β_0)-universel. Il suffit alors de montrer que L est réduit à une classe d'équivalence.

Supposons que non, soient $x, y \in L$ tels que $x \not\sim y$, alors l'ensemble quotient (que l'on notera $|L|$) est ordonné par $|x| \leqslant |y| \leftrightarrow x \leqslant y$. Si $]|x|,|y|[$ est un intervalle non vide de $|L|$ alors :

- (i). $\mathrm{ot}(]|x|,|y|[) \equiv \eta_{\alpha\beta}$
- (ii). $\forall q \in Q, \exists z \in L, |z| \in]|x|,|y|[$ et $l(z) \geqslant q$.

Le (i) est clair $\mathrm{ot}(]|x|,|y|[) \leqslant \eta_{\alpha\beta}$ donc si $\mathrm{ot}(]|x|,|y|[) \in \mathcal{D}_{\alpha\beta}$ alors $x \sim y$ et l'intervalle est vide donc $\mathrm{ot}(]|x|,|y|[) \equiv \eta_{\alpha\beta}$

Si le (ii) est faux alors pour un certain $r \in Q$ on a $\{l(z), |z| \in]|x|,|y|[\} \subset Q_r$, alors par hypothèse d'induction $\{z, |z| \in]|x|,|y|[\}$ est réduit à une seule classe d'équivalence et ne peut donc pas contenir un sous-ensemble $\equiv \eta_{\alpha\beta}$.

Nous allons maintenant montrer que Φ est (Q,α,β)-universel ce qui suffira pour montrer le théorème. Soit $\mathrm{ot}(M,l') \in Q^{\leqslant \eta_{\alpha\beta}}$; comme $\eta_{\alpha\beta}^2 \equiv \eta_{\alpha\beta}$, on peut trouver une partition de $|L|$ en intervalles $(|L|_x)_{x \in N}$ où $\mathrm{ot}(N) = \eta_{\alpha\beta}$ tel que $|L|_x \leqslant |L|_y \leftrightarrow x \leqslant y, \forall x,y \in N$ (où $|L|_x \leqslant |L|_y$ signifie que pour tout $x_0 \in |L|_x, y_0 \in |L|_y, x_0 \leqslant y_0$). Comme $\mathrm{ot}(M) \leqslant \eta_{\alpha\beta}$, on peut trouver un plongement $f : M \to |L|$ tel que chaque intervalle $|L|_x$ contienne au plus un point de $f[M]$, alors par (ii) on peut trouver un plongement $g : M \to L$ tel que pour tout $x \in M, |g(x)|$ est dans l'intervalle $|L|_{x_0}$ contenant $f(x)$ et $l'(x) \leqslant l(g(x))$. Ainsi g est un plongement de Q-types donc $\mathrm{ot}(M,l') \leqslant \Phi$ donc Φ est (Q,α,β)-universel. □

Lemme 92. *Si $\Psi \in \mathcal{H}_\gamma(\mathcal{H}(Q))$ alors $\overline{\Psi} \in \mathcal{H}(Q)$.*

Démonstration. Nous allons montrer le résultat par induction sur γ.

Si $\gamma = 0$ le résultat est évident.

- (i). Si $\kappa \in \mathrm{RC}$, et Ψ est une $(\mathcal{U},\kappa)$-somme non bornée, ou $\mathcal{U} \subset \cup_{\beta<\gamma}\mathcal{H}_\beta(\mathcal{H}(Q))$, alors $\overline{\Psi}$ est une $(\{\overline{\Psi}_i, \Psi_i \in \mathcal{U}\},\kappa)$-somme, qui est non bornée car

$\Psi_1 \leqslant \Psi_2 \Rightarrow \overline{\Psi}_1 \leqslant \overline{\Psi}_2$. Par hypothèse d'induction, chaque $\overline{\Psi}_i \in \mathcal{H}(Q)$ donc $\Psi \in \mathcal{H}(Q)$. L'argument symétrique s'applique pour les $(\mathcal{U}, \kappa^*)$-sommes non bornées.

(ii). Si Ψ est un $(\mathcal{U}, \delta, \lambda)$-mélange, pour un $\mathcal{U} \subset \cup_{\beta<\gamma}\mathcal{H}_\beta(\mathcal{H}(Q))$, alors par définition $\overline{\Psi}$ est un $(\{\overline{\Psi}_i, \Psi_i \in \mathcal{U}\}, \delta, \lambda)$-mélange, de même chaque $\overline{\Psi}_i \in \mathcal{H}(Q)$ donc $\overline{\Psi} \in \mathcal{H}(Q)$.

□

Théorème 93. *Si Q est bqo et $\Phi \in Q^{\eta_{\alpha\beta}}$, alors Φ est une somme finie de membres de $\mathcal{H}(Q)$.*

Démonstration. Nous allons montrer ce théorème par induction sur (α, β) ; supposons donc que pour tout $(\alpha_0, \beta_0) < (\alpha, \beta)$ le théorème est vérifié. Nous allons traiter les deux cas suivants séparément : $\Phi \in Q^{\mathcal{D}_{\alpha\beta}}$ et $\Phi \in Q^{\equiv\eta_{\alpha\beta}}$.

Supposons donc que $\Phi \in Q^{\mathcal{D}_{\alpha\beta}}$, et travaillons par induction sur $Q^{\mathcal{D}_{\alpha\beta}}$. Si $\Phi \in Q^{(\mathcal{D}_{\alpha\beta})_0}$ alors le théorème est vérifié car bs(Φ) est 0 ou 1. Supposons que pour $\gamma \geqslant 1, \Phi \in Q^{(\mathcal{D}_{\alpha\beta})_\gamma}$; par le théorème 64, bs(Φ) est soit une β_0-somme (pour $\beta_0 < \beta$) ou une α_0-somme (pour $\alpha_0 < \alpha$) ou une $\eta_{\alpha_0\beta_0}$-somme (pour $(\alpha_0, \beta_0) < (\alpha, \beta)$) d'éléments de $\cup_{\delta<\gamma}(\mathcal{D}_{\alpha\beta})_\delta$.

(i) Si bs(Φ) est une β_0-somme, supposons que le théorème est faux pour Φ ; alors il existe λ et il existe Θ qui n'est pas une somme fini d'éléments de $\mathcal{H}(Q)$ mais qui s'écrit comme $\sum\limits_{x\in\lambda} \Theta_x$ où $\Theta_x \in \mathcal{H}(Q)$ est une somme finie d'éléments de $\mathcal{H}(Q)$. Soit donc un tel λ minimal, alors posons $\Theta = \sum\limits_{x\in\lambda} \Theta_x$. Nous allons maintenant montrer que $\lambda \in \mathrm{RC}$; quitte à regrouper des termes Θ s'écrit comme la somme $\Theta = \sum_{y\in M} \Theta^y$ où ot$(M) = \mathrm{cf}(\lambda)$ et chaque Θ^y est une $< \lambda$-somme de Θ_x. Par minimalité de λ, chaque Θ^y est une somme finie d'éléments de $\mathcal{H}(Q)$ donc par minimalité, $\mathrm{cf}(\lambda) = \lambda$.

Ainsi quitte à développer chaque Θ_x en une somme finie, on peut supposer (car $\lambda \in \mathrm{RC}$) que $\forall x \in \lambda, \Theta_x \in \mathcal{H}(Q)$. Montrons maintenant que

$$\exists x_0 \in \lambda, \forall y, z \in \lambda(x_0 \leqslant y \leqslant z \longrightarrow \exists u \in \lambda(z \leqslant u \text{ et } \theta_y \leqslant \theta_u)).$$

S'il n'existe pas de tel x_0, pour y arbitrairement grand $\exists z \in \lambda(y < z$ et $\forall u \in \lambda(z \leqslant u \to \Theta_y \not\leqslant \Theta_u))$. Mais on peut alors construire une suite croissante $y_1, y_2, \ldots$ telle que pour tout $n < m < \omega, \Theta_{y_n} \not\leqslant \Theta_{y_m}$ ce qui contrevient à l'hypothèse $\mathcal{H}(Q)$ bqo (donc wqo). Ainsi il existe x_0 tel que

$\sum\limits_{x \leqslant x_0} \Theta_x$ est une $(\{\Theta_x, x \geqslant x_0\}, \lambda)$-somme non bornée d'éléments de $\mathcal{H}(Q)$, donc est une élément de $\mathcal{H}(Q)$, mais alors $\sum_{x<x_0} \Theta_x$ est finie par minimalité de λ (car λ régulier, donc on peut enlever suffisamment de termes pour avoir une somme finie). Mais alors Θ est une somme finie d'éléments de $\mathcal{H}(Q)$ donc λ n'est pas dans l'ensemble considéré, ce qui est absurde, donc Φ vérifie le théorème.

(ii) Si bs(Φ) est une α_0^* somme, alors l'argument du (i) est symétrique.

(iii) Si bs(Φ) est une $\eta_{\alpha_0\beta_0}$-somme, alors Φ est une $\eta_{\alpha_0\beta_0}$-somme de somme finies de $\mathcal{H}(Q)$ par hypothèse d'induction. Comme $\eta^2_{\alpha_0\beta_0} \equiv \eta_{\alpha_0\beta_0}$, on peut voir Φ comme une $\eta_{\alpha_0\beta_0}$ somme d'éléments de $\mathcal{H}(Q)$. Ainsi si on note $\phi = \mathrm{bs}(\Phi), \Phi = \overline{\Psi}$ pour un $\Psi \in \mathcal{H}(Q)^\phi$.

Mais comme $\mathcal{H}(Q)$ est bqo et $\mathrm{bs}(\Psi) \equiv \eta_{\alpha_0\beta_0}$ et $\eta_{\alpha_0\beta_0} < \eta_{\alpha\beta}$ donc par hypothèse d'induction $\Psi = \Psi_0 + \cdots + \Psi_n$ où chaque $\Psi_i \in \mathcal{H}(\mathcal{H}(Q))$ alors, par le lemme précédent, $\overline{\Phi_i} \in \mathcal{H}(Q)$ pour tout $i \leqslant n$ alors $\Phi = \overline{\Phi_0} + \cdots + \overline{\Psi_n}$ donc le cas $\Phi \in Q^{\mathcal{D}_{\alpha\beta}}$ est réglé.

Maintenant dans le cas général si $\Phi \in Q^{\leqslant \eta_{\alpha\beta}}$, par le théorème précédent, on sait que Φ est une ϕ-somme pour $\phi \in \mathcal{D}_{\alpha\beta}$ de 1_q et de (R, γ, δ)-type universel. On remarquera que les types (R, γ, δ)-universels sont des éléments de $\mathcal{H}(Q)$, alors Φ est une somme sur ϕ d'éléments de $\mathcal{H}(Q)$, donc il existe$\Psi \in \mathcal{H}(Q)^\phi, \overline{\Psi} = \Phi$. Alors en appliquant le cas précédent, on obtient de la même manière que Φ est une somme finie d'éléments de $\mathcal{H}(Q)$. □

Théorème 94. *Q bqo $\Rightarrow Q^{\mathcal{M}}$ bqo.*

Démonstration. Les premiers résultats de cette partie ont donné Q bqo $\Rightarrow$ $\mathcal{H}(Q)$ bqo. Le résultat précédent nous donne Q bqo $\Rightarrow Q^{\mathcal{M}}$ est l'ensemble des sommes finies sur $\mathcal{H}(Q)$. De plus si Q est bqo alors $\mathcal{H}(Q)^{<\omega}$ est bqo et on a une surjection croissante naturelle $\mathcal{H}(Q)^{<\omega} \to Q^{\mathcal{M}}$, donc $Q^{\mathcal{M}}$ est bqo. □

Corollaire 95. *$\mathcal{M}$ est bqo.*

Démonstration. Par définition $1^{\mathcal{M}} \simeq \mathcal{M}$, donc $\mathcal{M}$ bqo car 1 l'est. □

Nous allons finalement mentionner un dernier résultat qui permet de comprendre la relation entre $\mathcal{H}(Q)$ et $Q^{\mathcal{M}}$. Pour sa démonstration, voir [2].

Propriété 96. *$\mathcal{H}(Q)$ est l'ensemble des éléments additivement indécomposables de $Q^{\mathcal{M}}$. (Où Φ est additivement indécomposable s'il n'existe pas de suite finie (Φ_i) telle que $\Phi = \Phi_0 + \ldots \Phi_n$).*

Références

[1] B. Dushnik and E. W. Miller. Concerning similarity transformations of linearly ordered sets. *Bull. Amer. Math. Soc.*, 46(4) :322–326, 1940.

[2] R. Laver. On fraïssé's order type conjecture. *The Annals of Mathematics, Second Series*, 93(1) :89–111, 1971.

[3] R. Laver. Well-quasi-orderings and sets of finite sequences. *Math. Proc. Camb. Phil. Soc.*, 79, 1976.

[4] C. S. J. A. Nash-Williams. On well-quasi-ordering infinite trees. *Proc. Camb. Phil. Soc.*, 61 :697–720, 1964.

[5] W. Sierpinsky. Sur les types d'ordre des ensembles linéaires. *Fundamenta Mathematicae*, 37(1) :253–264, 1950.

[6] S. G. Simpson. Bqo theory and fraïssé's conjecture. 1979.