Densité des petits points ?

Colas Bardavid

lundi 17 octobre 2005

1 Géométrie

Intuitivement, le géométrie est l'étude de l'espace. On peut définir plusieurs types d'espaces, plus ou moins « rigides », auxquels correspondent plusieurs types de géométrie. On donne des exemple de géométrie, qu'on classe « moralement » de la géométrie la plus rigide à la géométrie la plus molle.

1.1 Géométrie affine

On peut faire de la géométrie affine au-dessus d'un corps quelconque. Les objet sont les points, les droites, les plans, ..., les hyperplans.

1.2 Géométrie euclidienne

On ajoute les cercles, les sphères, ..., les hypersphères. Pour ce faire, on ajoute à notre k-espace vectoriel une structure euclidienne, c'est-à-dire un produit scalaire.

1.3 Géométrie algébrique

Dans cette géométrie, on étudie les ensembles algébriques. Plaçons-nous dans k^n où k est un corps quelconque. Soient $P_1, \ldots, P_l$ des polynômes à coefficients dans k à n variables. On peut alors considérer le lieu d'annulation commun des l polynômes,

$$V(P_1, \ldots, P_l) = \{x = (x_1, \ldots, x_n) \in k^n \mid \forall i, P_i(x) = 0\}.$$

Les ensembles de ce type sont appelés les *ensembles algébriques* et sont les objets de la géométrie algébrique.

Par exemple, dans le plan k^2, les points, les droites, les ellipses, les paraboles, les hyperboles sont des objets qu'étudie la géométrie algébrique. Dans l'espace, il en est de même, en plus, pour les ellipsoïdes, les paraboloïdes, etc. ainsi que pour la *variété de Fermat* d'ordre n, qu'on définit par :

$$V^n_{\text{Fermat}} = \left\{(x, y, z) \in k^3 \mid x^n + y^n = z^n\right\}.$$

On constate ainsi que la géométrie algébrique étudie des objets qui, historiquement, intéressent les mathématiciens.

1.4 Géométrie analytique

Si on cherche à généraliser la notion de polynôme, afin d'étendre le champ étudié et les applications accessibles, après avoir écrit

$$P = \sum_{i=0}^{N} a_i X^i \quad \in k[X],$$

on pense à étudier les objets du type

$$S = \sum_{i=0}^{\infty} a_i X^i \quad \in k[[X]],$$

c'est-à-dire les série formelles. Cependant, si on n'a pas de notion de série convergente, on ne peut pas considérer l'ensemble des zéros de telles fonctions. On doit donc se placer sur un corps valué. En particulier, on peut faire de la géométrie analytique sur $\mathbf{R}^n$ ou $\mathbf{C}^n$.

Les objets d'étude de la géométrie analytique sont ainsi les lieux communs des zéros de familles de fonctions localement développables en séries entière et on la pratique au-dessus de $\mathbf{C}^n$ ou de $\mathbf{R}^n$.

Notons que les fonctions complexes $\exp, \sin, \cos, \zeta$ et d'autres encore sont localement développables en séries entières.

1.5 Géométrie différentielle

Les objets d'étude de la géométrie différentielle sont les variétés différentielles. Les formes dans l'espace que l'on observe réellement trouvent souvent un modèle convenable dans les cadre de la géométrie différentielle. C'est le cas par exemple d'un filet de pêche traîné par un bateau dont on souhaite étudier l'évolution la forme, sous l'action des forces de pression.

1.6 Topologie

Les objets d'étude sont les espaces topologiques.

1.7 Avantages et inconvénients

L'inconvénient de travailler dans une géométrie rigide est que la classe d'objets accessibles est relativement restreinte. L'avantage de travailler dans une théorie rigide est que les propriétés des objets sont plus fortes. Par exemple, si on connaît un polynôme $P \in k[X]$ en un nombre infini de points, alors, on connaît entièrement le polynôme. Par ailleurs, concernant la géométrie algébriques, on peut se placer au-dessus d'un corps k quelconque, et même au-dessus d'un anneau commutatif (unitaire) A quelconque.

2 Géométrie algébrique

2.1 Espaces annelés

Avant de poursuivre, disons quelques mots des espaces annelés.

(2.1.1) L'exemple fondamental des variétés différentielles. Si on considère par exemple une variété différentielle V, alors, on peut montrer que toutes les propriétés différentielles de V peuvent s'exprimer en termes des $\mathcal{C}^\infty(U, \mathbf{R})$ où U parcourt l'ensemble des ouvert de V. Par exemple, une fonction $\varphi : V \to W$ entre deux variétés différentielles est ($\mathcal{C}^\infty$)-différentiables si, et seulement si,

$$\forall U \in \mathrm{Ouv}(W), \quad \forall f \in \mathcal{C}^\infty(U, \mathbf{R}), \quad f \circ \varphi \in \mathcal{C}^\infty(\varphi^{-1}(U), \mathbf{R}).$$

En fait, de façon générale, une façon pertinente de considérer un « espace géométrique » est de le voir comme un espace topologique X muni, pour tout ouvert U de X, de l'espace (qui sera un k-espace vectoriel si on travaille au-dessus de k et un anneau dans le cas général) $\mathcal{O}_X(U)$ des « fonctions régulières » de X définies sur l'ouvert U. Il faut penser, moralement, que $\mathcal{O}_X(U)$ est l'analogue pour X de $\mathcal{C}^\infty(U, \mathbf{R})$.

(2.1.2) Définition. On définit ainsi un *espace annelé* : c'est un espace topologique X muni, pour tout ouvert U d'un anneau $\mathcal{O}_X(U)$, dit *anneau des fonctions régulières (ou structurales) de X au-dessus de l'ouvert U* et, pour toute inclusion $V \subset U$, d'un morphisme (d'anneaux) de restriction des « fonctions » de $\mathcal{O}_X(U)$ dans $\mathcal{O}_X(V)$. Il faut vraiment imaginer que les éléments de l'anneau abstrait $\mathcal{O}_X(U)$ sont comme des fonctions. On demande en plus, pour que $\Big(X, (\mathcal{O}_X(U))_{U \in \mathrm{Ouv}(X)}\Big)$ soit un espace annelé, que la collection des $\mathcal{O}_X(U)$ vérifie deux propriétés raisonnables :

a) localité : une « fonction » f est nulle si, et seulement si, elle est nulle localement : pour tout ouvert U de X, pour tout recouvrement (U_i) de U et pour toute $f \in \mathcal{O}_X(U)$:

$$f = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \forall i, f|_{U_i} = 0.$$

b) recollement : on peut recoller les fonctions : pour tout ouvert U et tout recouvrement (U_i) de U, pour toute famille de fonctions $f_i \in \mathcal{O}_X(U_i)$ telles que $\forall i, j, \quad (f_i)|_{U_i \cap U_j} = (f_j)|_{U_i \cap U_j}$, il existe une fonction f, « recomposée à partir de f_i », telle que pour tout i, $f|_{U_i} = f_i$.

2.2 Dessins de variétés algébriques

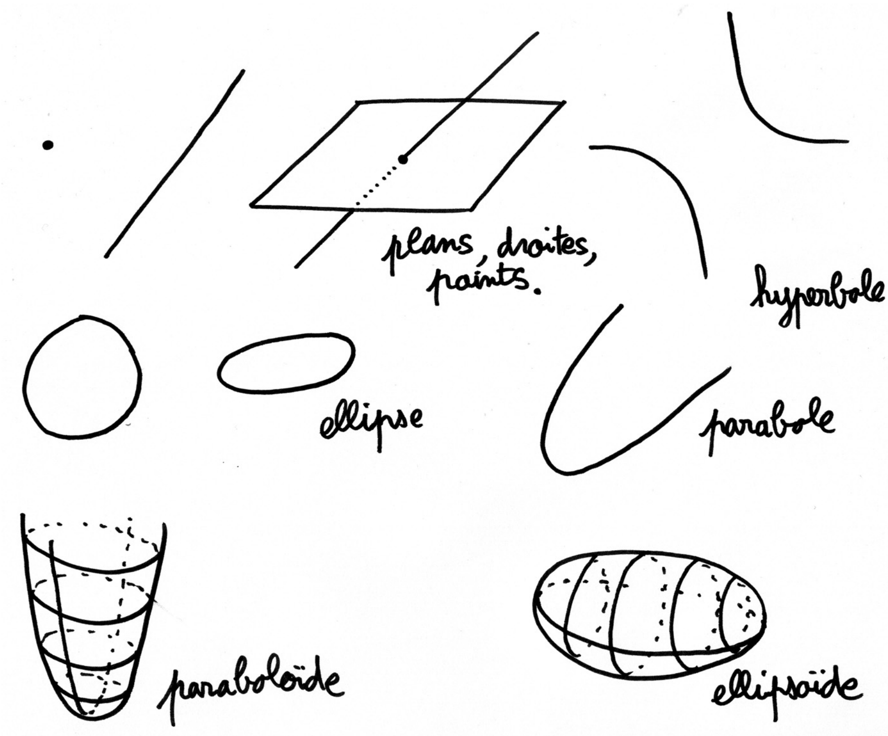

FIG. 1 – Exemples de variétés algébriques.

2.3 Schémas

Le cadre actuel de la géométrie algébrique est la théorie des schémas, initiée par Alexander Grothendieck. Sans entrer dans les détails, à tout anneau (qui désormais sont toujours supposés commutatifs et unitaires) A, on peut associer un *schéma* Spec A, le *spectre de* A, qui est un espace annelé dont l'anneau de fonctions globales, $\mathcal{O}_{\mathrm{Spec}\,A}(\mathrm{Spec}\,A)$ est A.

(2.3.1) Corps des valeurs d'un point. Si $V = V(P_1, \ldots, P_k)$ est une variété algébrique au sens classique, c'est-à-dire le lieu des zéros communs dans k^n de la famille des polynômes $P_i \in k[X_1, \ldots, X_n]$, alors si $x = (x_1, \ldots, x_n) \in V$, on peut définit le *corps des valeurs* de x, qui est le plus petit corps qui contient toutes les coordonnées de x.

Pour un schéma X quelconque, de façon analogue, on peut définir, si $x \in X$, le corps des valeurs du point, qu'on note $\kappa(x)$.

(2.3.2) Exemples essentiels. Moralement, si k est un corps, $\operatorname{Spec} k$ est un point qui vit dans k (topologiquement, c'est vraiment un point), c'est-à-dire dont le corps des valeurs est $\kappa(x) = k$.

Autre exemple essentiel :

$$\operatorname{Spec}\left(\frac{k[X_1,\ldots,X_n]}{(P_1,\ldots,P_l)}\right)$$

correspond dans le langage des schémas à l'objet géométrique qu'on a déjà rencontré précédemment, à savoir l'ensemble algébrique lieu des zéros communs dans k^n des polynômes P_i.

Autre exemple : $\operatorname{Spec} \mathbf{Z}$ correspond à une collection infinie de points x_k, où x_k vit dans le corps premier k.

Plus généralement, si $\mathcal{O}_K$ est l'anneau des entiers d'un corps de nombres K, $\operatorname{Spec} \mathcal{O}_K$ correspond, dans le langage des anneaux de Dedekind, à l'ensemble des « nombres idéaux » premiers $\mathfrak{P}$, chacun vivant dans un corps $k_{\mathfrak{P}}$ qui est une extension finie du corps fini $\mathbf{F}_p$, où p est le nombre premier classique que généralise $\mathfrak{P}$, auquel on ajoute un point η, qui vit dans le corps K.

(2.3.3) Terminologie. Dans la suite on utilisera indifféremment les termes *schémas* et *variétés algébriques*.

2.4 La théorie des schémas est une théorie relative

En théorie des schémas, au lieu de considérer simplement un schéma X, on considère toujours un schéma X au-dessus d'une base S. C'est-à-dire, lorsqu'on veut étudier un schéma, au lieu de se donner X, on se donne

$$\begin{tikzcd} X \arrow[d, "p"] \\ S \end{tikzcd},$$

où S est le schéma de base, X est le schéma qu'on étudie, et où p est un morphisme de schémas dit *morphisme structural*.

Moralement, avec ce point de vue, X peut être vu comme une famille de schémas $X_s = p^{-1}(s)$ indexée par $s \in S$.

Par exemple, si on veut étudier un schéma X qui est « défini » au-dessus d'un corps k (moralement, les polynômes dont on regarde le lieu des zéros sont à coefficients dans k), on regardera

$$\begin{tikzcd} X \arrow[d, "p"] \\ \operatorname{Spec} k \end{tikzcd}.$$

2.5 Modèle entier

Soit K un corps de nombres. Si $\begin{tikzcd} V \arrow[d] \\ \operatorname{Spec} K \end{tikzcd}$ est un K-schéma, alors on appelera *modèle entier* tout schéma X défini au-dessus $S = \operatorname{Spec} \mathcal{O}_K$ dont V « provient ». Moralement, cela veut dire qu'on cherche un schéma $\begin{tikzcd} X \arrow[d] \\ S \end{tikzcd}$ tel que V est à K ce que X est à S. Dans les cas où une telle analogie existe entre deux couples de schémas, on note :

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "\square"] & X \arrow[d] \\ \operatorname{Spec} K \arrow[r] & \operatorname{Spec} \mathcal{O}_K \end{tikzcd}.$$

(2.5.1) Exemple. Si V est le schéma défini par $\operatorname{Spec}\left(\frac{K[X_1,\ldots,X_n]}{(P_1,\ldots,P_k)}\right)$, alors un modèle entier de V est

$$\operatorname{Spec}\left(\frac{\mathcal{O}_K[X_1,\ldots,X_n]}{\left(\widetilde{P_1},\ldots,\widetilde{P_k}\right)}\right),$$

où les $\widetilde{P_i}$ sont obtenus à partir des P_i en chassant les dénominateurs, pour se retrouver dans $\mathcal{O}_K[X_1, \ldots, X_n]$.

(2.5.2) Moralement. L'intérêt de travailler avec un modèle entier d'un K-schéma est que l'on dispose, en plus d'informations géométriques, d'informations *arithmétiques*.

2.6 Notion de point en théorie des schémas

Intuitivement, si X est un schéma, un point x de X à valeurs dans un corps K est un élément $x \in X$ tel que le corps des valeurs de x, $\kappa(x)$ soit « inclus » dans K. Cette façon de voir les choses n'est pas satisfaisante car il y a plusieurs façons d'inclure $\kappa(x)$ dans K.

La bonne façon de voir un point de X à valeurs dans K, c'est de se donner un morphisme $\operatorname{Spec} K \to X$, qui déterminera à la fois un $x \in X$ et un morphisme d'inclusion $\kappa(x) \hookrightarrow K$. On note alors *l'ensemble des K-points de X* :

$$X(K) = \{f : \operatorname{Spec} K \to X\}.$$

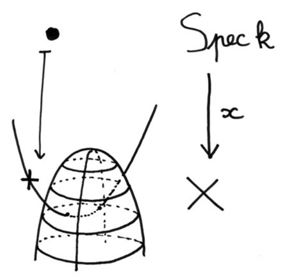

FIG. 2 – Un K-point de X.

Plus généralement, si A est un anneau (par exemple, si $A = \mathcal{O}_K$), on peut parler de A-points ; ce sont les morphismes $\operatorname{Spec} A \to X$.

3 Géométrie d'Arakelov

3.1 Espace affine contre espace projectif

On note $\mathbf{A}_k^n$ l'espace affine, c'est-à-dire k^n. L'espace projectif, qu'on note $\mathbf{P}_k^n$, est un objet plus compliqué mais dont les propriétés globales sont plus synthétiques.

(3.1.1) Théorème de Bézout. Considérons par exemple deux courbes algébriques planes C et C', définies par $P(x, y) = 0$ et $P'(x, y) = 0$. On se place dans $\mathbf{A}_{\mathbf{C}}^2$ et on note d et d' les degrés respectifs de C et C'. Alors, si C et C' n'ont pas de composantes communes, le nombre de points d'intersections de C et C', comptés avec multiplicité, est inférieur ou égal à dd'.

Si en revanche on regarde nos courbes dans $\mathbf{P}_{\mathbf{C}}^2$, alors, le nombre de points d'intersections de C et C', comptés avec multiplicité, est toujours *égal* à dd'.

(3.1.2) Fractions rationnelles. Si on considère $f = \frac{P(X)}{Q(X)} \in \mathbf{C}(X)$, alors, pour tout $a \in \mathbf{C}$, on peut définir la valuation $(X - a)$-adique de f, qu'on note $v_a(f)$, par la formule

$$f = \prod_{a \in \mathbf{C}} (X - a)^{v_a(f)}.$$

En faisant le changement de variables $Y = 1/X$, on peut étudier le comportement de f à l'infini. On trouve : $v_\infty(f) = -d$ où d est le degré de f. On a alors la formule

$$\sum_{P \in \mathbf{P}_{\mathbf{C}}^1} v_P(f) = 0.$$

(3.1.3) De façon équivalente, si on fixe $0 < r < 1$, on peut définir un norme $||\cdot||_P$ sur $\mathbf{C}(X)$ pour chaque $P \in \mathbf{P}^1_{\mathbf{C}}$ par la formule $||f||_P = r^{v_P(f)}$. On a alors :

$$\prod_{P \in \mathbf{P}^1_{\mathbf{C}}} ||f||_P = 1.$$

3.2 Géométrie d'Arakelov

On s'intéresse aux schémas Spec $\mathcal{O}_K$; le plus simple de ces objets est Spec $\mathbf{Z}$. Il faut les concevoir comme des droites, comme des analogues arithmétiques de $\mathbf{A}^1_{\mathbf{C}}$. Le problème de ces objets, c'est qu'il ne sont pas « compacts ». On cherche donc à leur ajouter des points de façon à obtenir des analogues de $\mathbf{P}^1_{\mathbf{C}}$.

(3.2.1) Sur Spec Z. Comme on l'a dit plus haut, l'anneau des fonctions régulières de Spec $\mathbf{Z}$ est $\mathbf{Z}$: c'est pourquoi une fonction rationnelle sur Spec $\mathbf{Z}$ correspond à un nombre rationnel. Soit donc $q \in \mathbf{Q}$. À chaque nombre premier $p \in \mathcal{P}$, on peut associer la classique valuation p-adique v_p. On a aussi la norme p-adique, définie par $||q||_p = p^{-v_p(q)}$. Si on prend en compte en plus la valeur absolue usuelle sur $\mathbf{Q}$, on a la formule du produit, qui est un analogue de **3.1.3** :

$$\prod_{p \in \mathcal{P}} ||q||_p \cdot ||q||_\infty = 1.$$

(3.2.2) De façon plus générale. Si maintenant K est un corps de nombres, on a dit plus haut que les points (fermés) de Spec $\mathcal{O}_K$ correspondaient aux « nombres idéaux » premiers $\mathfrak{P}$ de $\mathcal{O}_K$, c'est-à-dire aux idéaux premiers de $\mathcal{O}_K$. Si $x \in K$ on sait alors définir , grâce à la théorie des anneaux de Dedekind, la valuation $\mathfrak{P}$-adique de x et la norme $||x||_{\mathfrak{P}} = (\text{Card }(\mathcal{O}_K/\mathfrak{P}))^{-v_{\mathfrak{P}}(x)}$. Dans ce cas, la formule du produit s'écrit :

$$\prod_{(0) \neq \mathfrak{P} \in \operatorname{Spec} \mathcal{O}_K} ||x||_{\mathfrak{P}} \cdot \prod_{\sigma : K \hookrightarrow \mathbf{C}} |\sigma(x)| = 1,$$

où σ parcourt l'ensemble des plongements de K dans $\mathbf{C}$.

(3.2.3) Philosophie d'Arakelov. L'observation qui précède nous pousse donc à « ajouter » des points à Spec $\mathcal{O}_L$ de manière à obtenir un objet compact. Dans la suite, on sera donc amené à travailler sur Spec $\mathcal{O}_L$ en considérant en plus les injections $\sigma : L \hookrightarrow \mathbf{C}$ (on les appelle les *places à l'infini*) comme les points à l'infini qui viennent compactifier Spec $\mathcal{O}_L$.

4 Hauteurs au sens de Weil

4.1 Hauteurs sur $\mathbf{P}^n_{\overline{\mathbf{Q}}}$

Si V est une variété algébrique définie sur $\overline{\mathbf{Q}}$, la hauteur $h(P)$ d'un point P, moralement, mesure la complexité (en particulier arithmétique) du point. C'est ainsi que la définition des hauteurs utilise la théorie algébrique des nombres.

(4.1.1) Valeurs absolues. On se fixe $\overline{\mathbf{Q}}$ une clôture algébrique de $\mathbf{Q}$ et tous les corps de nombres qu'on considère sont des sous-corps de $\overline{\mathbf{Q}}$. Soit K un corps de nombres. On note $\mathcal{M}_{\mathbf{Q}}$ l'ensemble des valeurs absolues classiques (non-triviales) sur $\mathbf{Q}$: $|\cdot|$, la valeur absolue euclidienne et $|\cdot|_p$ les valeurs absolues p-adiques qui vérifient $|p|_p = 1/p$.

On note alors $\mathcal{M}_K$ l'ensemble des valeurs absolues sur K dont la restriction à $\mathbf{Q}$ est dans $\mathcal{M}_{\mathbf{Q}}$. Si $v \in \mathcal{M}_K$, on note n_v et on appelle degré local de v le nombre $n_v = [K_v : \mathbf{Q}_v]$, où K_v est le corps complété de k par rapport à v. Si $x \in K$, on note indifféremment la valeur absolue de v : $v(x)$ ou $|x|_v$. On note $||x||_v = |x|_v^{n_v}$.

(4.1.2) Définition. Grâce à la formule du produit, qui dit que

$$\prod_{v \in \mathcal{M}_K} ||x||_v = 1,$$

si $P = (x_0 : x_1 : \cdots : x_n) \in \mathbb{P}^n_K$, on peut définir

$$H_K(P) = \prod_{v \in M_K} \max \{||x_0||_v , ||x_1||_v , \ldots , ||x_n||_v\}$$

et

$$h_K(P) = \log H_K(P) = \sum_{v \in M_K} n_v \min \{|x_0|_v , |x_1|_v , \ldots , |x_n|_v\} ,$$

appelées respectivement *hauteur multiplicative* et *hauteur logarithmique*.

Si $P \in \mathbb{P}^n_K$ et si L est une extension finie de K, on a aussi $P \in \mathbb{P}^n_L$. Les hauteurs h_K et h_L sont alors reliées par $h_L(P) = [L : K]h_K(P)$, ce qui permet de définir une *hauteur (logarithmique) absolue*, définie sur $\mathbb{P}^n_{\overline{\mathbf{Q}}}$ par

$$h_{\mathsf{Weil}}(P) = \frac{h_K(P)}{[K : \mathbf{Q}]},$$

si K est un corps qui contient toutes les coordonnées de P.

4.2 Hauteurs sur un K-schéma

Soit V/K un schéma au-dessus de K, corps de nombres. On aimerait pouvoir définir une hauteur sur les points algébriques de V. Le problème c'est que, pour l'instant, on ne sait définir la hauteur que pour des points « concrets », c'est-à-dire qui ont des coordonnées, qui de plus vivent dans un corps de nombres. C'est pourquoi, pour définir une hauteur sur $V(\overline{\mathbf{Q}})$, on va devoir passer par un plongement V dans un espace projectif $\mathbf{P}^n_K$.

(4.2.1) Hauteur associée à un morphisme. De façon plus générale, soit $\varphi : V \to \mathbf{P}^n_K$ un morphisme défini au-dessus de K. On peut alors définir une hauteur h_φ sur $V(\overline{\mathbf{Q}})$. Soit $x : \operatorname{Spec} \overline{\mathbf{Q}} \to V \in V(\overline{\mathbf{Q}})$ un point de V à valeurs dans $\overline{\mathbf{Q}}$, défini au-dessus de K. Alors, $\varphi \circ x$ est un $\overline{\mathbf{Q}}$-point de $\mathbf{P}^n_K$, défini au-dessus de K. On définit alors $h_{\mathsf{Weil},\varphi}(x) = h_{\mathsf{Weil}}(\varphi(x))$.

4.3 Théorème de finitude des petits points

Une propriété fondamentale est que si on borne le degré des extensions qu'on considère, alors, pour toute borne M, il n'y a qu'un nombre fini de points de hauteur inférieure à M.

(4.3.1) Théorème. *Soit $d \in \mathbf{N}$ et $M \in \mathbf{R}_+$. Alors, pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, l'ensemble*

$$\{P \in \mathbf{P}^n_K \mid h_{\mathit{Weil}}(P) \leq M \text{ et } [K : \mathbf{Q}] \leq d\}$$

est fini.

4.4 Théorème de Kronecker

Voilà autre théorème intéressant : il affirme que, en gros, un point est de hauteur nulle si, et seulement si, il est de torsion. Plus précisément :

(4.4.1) Théorème. *Soit $P = (x_0 : \ldots : x_n) \in \mathbf{P}^n_{\overline{\mathbf{Q}}}$. On suppose que $x_i \neq 0$. Alors :*

$$h_{\mathit{Weil}}(P) = 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad \forall j, \quad \frac{x_j}{x_i} \in \bigcup_{k \geq 1} \mathbf{U}_k \cup \{0\} ,$$

où $\mathbf{U}_k$ désigne le groupe des racines k-ièmes de l'unité.

5 Fibrés en droites et morphismes vers $\mathbf{P}^n$

5.1 Fibrés en droites

Soit X un « espace géométrique ».

(5.1.1) Définition. Intuitivement, un *fibré en droites* $\mathcal{L}$ au-dessus de X est une famille de droites D_x, variant « régulièrement » quand x parcourt X. Une section s de $\mathcal{L}$ est une fonction « régulière » qui à chaque $x \in X$ associe un vecteur $s(x) \in D_x$.

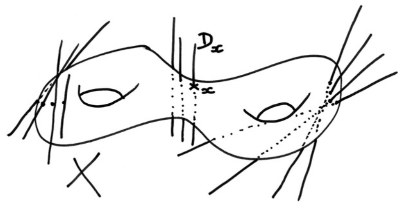

FIG. 3 – Un fibré en droites $\mathcal{L}$ au-dessus de X.

Si $\mathcal{L}$ et $\mathcal{L}'$ sont deux fibrés en droites au-dessus de X, on peut effectuer le produit tensoriel $\mathcal{L} \otimes \mathcal{L}'$. Si X est une variété $\mathbf{C}$-analytique, on peut munir $\mathcal{L}$ d'une *structure hermitienne* en munissant chaque droite (complexe) D_x d'une norme hermitienne qui varie de façon $\mathcal{C}^\infty$ sur X.

(5.1.2) Pull-back d'un fibré en droites. Soient donc X et Y deux « objets géométriques » et $\mathcal{L}$ un fibré en droites au-dessus de Y. On se donne aussi $f : X \to Y$ un « morphisme » de X vers Y. On veut ramener sur X, par f, le fibré en droites $\mathcal{L}$, pour obtenir le pull-back $f^*\mathcal{L}$. Tout simplement, à un point $x \in X$, on associe la droite $D_{f(x)}$.

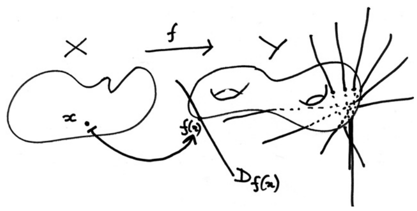

FIG. 4 – Le pull-back $f^*\mathcal{L}$.

(5.1.3) Fibré en droites canonique $\mathcal{O}(1)$ sur $\mathbf{P}^n$. Il faut savoir que $\mathbf{P}^n$ est muni d'un fibré en droites très naturel, qu'on note $\mathcal{O}(1)$, qui correspond à l'équivalence entre $\mathbf{P}^n$ et les droites de $\mathbf{A}^{n+1}$. Ainsi, si on voit $\mathbf{P}^n$, localement, comme un petit bout de l'hypersurface $\mathbf{S}^{n+1}$ de $\mathbf{A}^{n+1}$, alors ce fibré en droites associe à un point x de l'hypersurface la droite de $\mathbf{A}^{n+1}$ qui passe par ce point. Ce fibré est naturellement muni de $n+1$ sections $s_0, \ldots, s_n$ telles que pour tout $P \in \mathbf{P}^n$, l'une des sections $s_i(P)$ est non-nulle : on définit s_i comme la section qui à $P = (x_0 : \cdots : x_n)$ associe $s_i(P) = x_i \vec{e_P}$ où e_P est un vecteur directeur de D_x.

5.2 Lien entre les fibrés en droites et les morphismes vers $\mathbf{P}^n$

(5.2.1) Intuitivement. Comme $\mathbf{P}^n$ est l'ensemble des droites de $\mathbf{A}^{n+1}$, on peut voir un morphisme de X vers $\mathbf{P}^n$ comme un fibré en droites. Réciproquement, un fibré en droites quelconque provient-il toujours d'un morphisme vers $\mathbf{P}^n$? Comme on va le voir, la réponse est non ; on pourra néanmoins voir un fibré en droites comme une généralisation d'un morphisme vers $\mathbf{P}^n$.

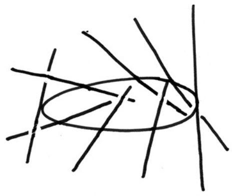

FIG. 5 – Le fibré en droites $\mathcal{O}(1)$ au-dessus de $\mathbf{P}^1_{\mathbf{R}}$.

(5.2.2) À $\varphi : X \to \mathbf{P}^n$, un morphisme, on peut associer le fibré en droites $\varphi^*\mathcal{O}(1)$ au-dessus de X, qui est engendré par les $n+1$ sections $\varphi^* s_i$.

(5.2.3) Réciproquement, si $\mathcal{L}$ est un fibré en droites au-dessus de X muni de $n+1$ sections $t_0, \ldots, t_n$ telles que pour tout $P \in X$, il existe une section telle que $t_i(P) \neq 0$, alors, on peut construire le morphisme

$$\varphi : \begin{array}{l} X \to \mathbf{P}^n \\ P \mapsto [t_0(P) : \cdots : t_n(P)] \end{array}.$$

5.3 Fibrés en droites très amples et amples

On dit que $\mathcal{L}$ au-dessus de X est un fibré en droites *très ample* si $\mathcal{L}$ provient d'un morphisme $\varphi : X \to \mathbf{P}^n$ qui est une immersion.

On dit que $\mathcal{L}$ est *ample* s'il vérifie une condition technique qu'on ne précisera pas ici. Un fibré très ample est ample (c'est fait pour).

6 Les hauteurs à la Arakelov

Dans cette partie, on présente une autre construction des hauteurs, qui utilise la géométrie d'Arakelov. Cette construction, qui en fait est équivalente, se justifie d'abord car elle remédie à certains défauts de la construction « à la Weil ». Elle possède aussi l'avantage d'indiquer le chemin d'une généralisation qui permette de définir la hauteur d'un sous-schéma.

6.1 Les données

(6.1.4) Une variété et un point. On part d'une variété algébrique V définie au-dessus de K, un corps de nombres. On sait calculer la hauteur d'un point de V. On se donne donc un point x de V à valeurs dans L, c'est-à-dire :

$$x : \operatorname{Spec} L \to V \quad \in V(L).$$

(6.1.5) Un modèle entier et un prolongement du point x. Comme on l'a vu et expliqué plus haut, pour parler de la hauteur d'un point, on a besoin d'informations arithmétiques. C'est pourquoi on se donne un modèle entier $X/\operatorname{Spec} \mathcal{O}_K$ de V/K.

Pour calculer la hauteur du point x, on doit aussi connaître un prolongement de x à $\operatorname{Spec} \mathcal{O}_L$, qui, intuitivement, nous permettra de savoir quels sont « les nombres premiers qui interviennent dans les coordonnées de x ». Plus précisément, on cherche un morphisme $\varepsilon_x : \operatorname{Spec} \mathcal{O}_L \to X$ qui fasse commuter le diagramme :

$$\begin{tikzcd}
 & & \operatorname{Spec} L \arrow[r, "x"] \arrow[lld] \arrow[rd] & V \arrow[lld] \arrow[d] \\
\operatorname{Spec} \mathcal{O}_L \arrow[r, "\varepsilon_x"] \arrow[rd] & X \arrow[d] & & \operatorname{Spec} K \arrow[lld] \\
 & \operatorname{Spec} \mathcal{O}_K & &
\end{tikzcd}$$

L'existence et l'unicité de ε_x sont assurées lorsqu'on suppose que la variété X est « compacte » au-dessus de $\operatorname{Spec} \mathcal{O}_K$.

(6.1.6) Un morphisme vers $\mathbf{P}^n$? Si on veut copier le procédé de Weil pour définir la hauteur de x, alors il faut se donner un morphisme vers $\mathbf{P}^n$. Cependant, vu la correspondance « morphisme vers $\mathbf{P}^n$-fibrés en droites » qu'on a esquissée plus haut, on choisit plutôt de se donner un fibré $\mathcal{L}$ au-dessus de X.

(6.1.7) Une donnée d'Arakelov. Mais cela ne sera pas suffisant. Pour obtenir le bon objet, il faut suivre la « philosophie » d'Arakelov. Ainsi, au lieu de considérer $\operatorname{Spec} \mathcal{O}_K$, on ajoute à $\operatorname{Spec} \mathcal{O}_K$ ses « points d'Arakelov », *ie* les $\sigma : K \hookrightarrow \mathbf{C}$. Les points qu'on doit rajouter à X sont alors déterminés : ce sont les points de $X_\sigma = X \otimes_{\mathcal{O}_K} \mathbf{C}$, où $X \otimes_{\mathcal{O}_K} \mathbf{C}$ est obtenue à partir de V par extension des scalaires de K à $\mathbf{C}$. En particulier, on a le diagramme « d'analogie »

$$\begin{tikzcd} X_\sigma = X \otimes_{\mathcal{O}_K} \mathbf{C} \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "\square"] & V \arrow[d] \\ \mathbf{C} \arrow[r] & K \end{tikzcd} ,$$

et X_σ, qui est une variété algébrique définie au-dessus de $\mathbf{C}$ est aussi une variété $\mathbf{C}$-analytique.

Le fibré en droites $\mathcal{L}$ au-dessus de X devient, par extension des scalaires, un fibré en droites $\mathcal{L}_\sigma$ au-dessus de la variété $\mathbf{C}$-analytique X_σ. La donnée d'Arakelov est alors un structure métrique sur chacun des fibrés en droites $\mathcal{L}_\sigma$: si on se place par exemple au-dessus de X_{σ_0}, alors pour chaque droite complexe D_x, où $x \in X_{\sigma_0}$, on se donne une norme. On demande en plus que ces normes varient de façon $\mathcal{C}^\infty$.

(6.1.8) Bilan. On part d'une variété V définie au-dessus de K. On se donne alors un modèle entier X défini au-dessus de $\operatorname{Spec} \mathcal{O}_K$. Puis, on munit X d'un fibré en droites $\mathcal{L}$ qu'on métrise aux places à l'infini. On dit alors qu'on a muni X d'un *fibré en droites hermitien*, qu'on note alors $\overline{\mathcal{L}}$.

On peut alors se donner un point $x : \operatorname{Spec} L \to V$ de $V(L)$ ainsi qu'une « extension » $\varepsilon_x : \operatorname{Spec} \mathcal{O}_L \to X$.

(6.1.9) Nouveau cadre d'étude. Désormais, on étudiera directement les schémas X définis au-dessus de $\operatorname{Spec} \mathcal{O}_K$, schémas que sous certaines hypothèses on nommera *variétés arithmétiques*.

La fibre générique X_K de X, définie par le diagramme d'analogie

$$\begin{tikzcd} X_K \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "\square"] & X \arrow[d] \\ \operatorname{Spec} K \arrow[r] & \operatorname{Spec} \mathcal{O}_K \end{tikzcd} ,$$

jouera alors le rôle de la K-variété V. Toute construction qu'on fait sur X peut être descendue sur X_K ; pour le préciser, on ajoutera un indice K.

Les variétés arithmétiques qu'on se donne seront généralement, pour parler de hauteur, munies de fibré en droites hermitiens.

6.2 Définition de la hauteur

On peut alors définir

$$h_{\overline{\mathcal{L}}}(x) = \frac{1}{[L:K]} \log \left(\frac{\text{Card } (\varepsilon_x^* \mathcal{L}/(\mathcal{O}_L s))}{\prod_{\tau : L \hookrightarrow \mathbf{C}} ||s||_\sigma} \right),$$

où s est une section non-nulle quelconque de $\varepsilon_x^* \mathcal{L}$ dont ne dépend pas l'expression.

6.3 Propriétés de la hauteur.

Évidemment, la hauteur ne dépend que de la classe d'isomorphie de $\overline{\mathcal{L}}$. On énonce :

(6.3.1) Fonctorialité. Si X et Y sont deux schémas définis au-dessus de $\operatorname{Spec}\mathcal{O}_K$ ainsi que $\varphi : X \to Y$. On munit Y d'un fibré en droites hermitien $\overline{\mathcal{L}}$. Alors, pour tout point $x \in X_K(L)$, on a $h_{\varphi^*\overline{\mathcal{L}}}(x) = h_{\overline{\mathcal{L}}}(\varphi_K(x))$.

(6.3.2) Additivité.

$$h_{\overline{\mathcal{L}}\otimes\overline{\mathcal{M}}}(x) = h_{\overline{\mathcal{L}}}(x) + h_{\overline{\mathcal{M}}}(x)$$

(6.3.3) Hauteur produit. Si X et Y sont deux variétés arithmétiques munies de fibrés hermitiens $\overline{\mathcal{L}}$ et $\overline{\mathcal{M}}$, alors :

$$h_{\overline{\mathcal{L}}\times\overline{\mathcal{M}}}((x,y)) = h_{\overline{\mathcal{L}}}(x) + h_{\overline{\mathcal{M}}}(y).$$

(6.3.4) Changer la métrique ajoute un $O(1)$. Si $\overline{\mathcal{L}}$ est un fibré au-dessus de X qui est géométriquement trivial, alors la hauteur $h_{\overline{\mathcal{L}}}$ est une fonction bornée sur $X_K\left(\overline{K}\right)$.

(6.3.5) Changer de modèle ajoute un $O(1)$. Si X et Y sont deux variétés arithmétiques, munis de fibrés hermitiens $\overline{\mathcal{L}}$ et $\overline{\mathcal{M}}$, qui sont isomorphes au-dessus du point générique, alors

$$\exists C > 0, \quad \forall x \in X_K(\overline{K}) \simeq Y_K(\overline{K}), \qquad \left| h_{X,\overline{\mathcal{L}}}(x) - h_{Y,\overline{\mathcal{M}}}(x) \right| \leq C.$$

6.4 Lien entre les hauteurs de Weil et les hauteurs arakeloviennes

Soient V/K est une variété et $\varphi : X \to \mathbf{P}^n_K$ un morphisme, c'est-à-dire les données pour parler de hauteur de Weil. Soit $\mathcal{L}_K$ le fibré en droites qui correspond à φ.

Soit $X/\operatorname{Spec}\mathcal{O}_K$ un modèle entier de V muni d'un fibré hermitien $\overline{\mathcal{L}}$ qui « étend » $\mathcal{L}_K$. Alors, pout tout $x \in V(\overline{K}))$:

$$h_{\overline{\mathcal{L}}}(x) = [K : \mathbf{Q}]h_{V,\varphi}(x) + O(1).$$

7 Hauteurs sur les variétés abéliennes

Une variété abélienne est une variété algébrique définie au-dessus d'un corps K, « compacte » et munie d'une loi de groupes, qui alors est nécessairement commutative. Par exemple, une courbe elliptique est une variété abélienne.

7.1 Fibrés symétriques

Si A/K est une variété abélienne, on dispose alors pour tout $n \in \mathbf{Z}$ d'un morphisme (à la fois de variété et de groupes)

$$[n] : \begin{array}{l} A \to A \\ P \mapsto nP = P + \cdots + P \qquad (n \text{ fois}) \end{array}.$$

On dit alors qu'un *fibré en droites $\mathcal{L}$ est symétrique* si $[-1]^*\mathcal{L} \simeq \mathcal{L}$.

7.2 Hauteur normalisée de Néron-Tate

Dans le cas des variétés abéliennes, on peut construire des hauteurs, dites de Néron-Tate, qui ont des propriétés supplémentaires. La construction qu'on présente copie en Arakelov la construction clasique et aboutit au même résultat.

(7.2.6) Données. On se donne A/K une variété abélienne et L un fibré en droites symétrique au-dessus de A. Soit $x \in A(\overline{K})$.

Puis, on se donne un modèle entier $\mathcal{A}$ de A, défini au-dessus de Spec $\mathcal{O}_K$, ainsi qu'un fibré en droites hermitien $\overline{\mathcal{L}}$ qui étend L.

(7.2.7) Définition. La suite $\frac{1}{4^n} h_{\overline{\mathcal{L}}}([2^n]x)$ converge vers une limite finie qui ne dépend ni de $\mathcal{A}$, ni de $\overline{\mathcal{L}}$ ni de ses métriques. On appelle cette limite *hauteur normalisée (ou de Néron-Tate)* de x relativement L. On la note $\hat{h}_L(x)$.

L'avantage de ce procédé par rapport au procédé classique (qui utilise les hauteurs de Weil), c'est qu'il permet de définir la hauteur de Néron-Tate d'une sous-variété de A.

7.3 Propriétés de la hauteur de Néron-Tate

D'abord, la hauteur de Néron-Tate $\hat{h}_L$ est égale à $0(1)$ près à $h_{\overline{\mathcal{L}}}$. Puis,

(7.3.8) C'est une forme quadratique. En particulier, on a $\hat{h}_L(mP) = m^2 \hat{h}_L(P)$ et aussi l'identité du parallélogramme,

$$\hat{h}_L(P+Q) + \hat{h}_L(P-Q) = 2\hat{h}_L(P) + 2\hat{h}_L(Q).$$

(7.3.9) Théorème. *Soit A/K une variété abélienne et soit L un fibré en droites symétrique et ample. Alors : pour tout $P \in A$, $\hat{h}(P) \geq 0$ et*

$$\hat{h}(P) = 0 \quad \iff \quad P \text{ est un élément de torsion de } A.$$

8 Densité des points de torsion ?

Si E est une courbe elliptique, une simple inspection permet de voir que les points de torsion sont denses dans E pour la topologie de $\mathbf{C}$. En notant $E[n]$ le sous-groupe des points de n-torsion, on peut même montrer qu'ils sont équidistribués dans le sens suivant : la suite

$$\frac{1}{n^2} \sum_{x \in E[n]} \delta_x$$

converge faiblement vers la mesure de Haar normalisée $d\mu$ de E.

Plus généralement, que se passe-t-il ?

8.1 Un théorème de Raynaud

Soit A/K une variété abélienne, où K est un corps de nombres.

(8.1.10) Définition. *On dit qu'une sous-variété X de A est de torsion si elle est translatée d'une sous-variété abélienne par un point de torsion.*

(8.1.11) Théorème. *Soit X une sous-variété de A qui n'est pas de torsion. Alors, l'ensemble $X(\overline{K}) \cap A(\overline{K})_{tor}$ des points de $X(\overline{K})$ qui sont de torsion dans A n'est pas Zariski-dense dans X.*

8.2 Une généralisation

Grâce aux hauteurs de Néron-Tate, la notion de point de torsion d'une variété abélienne se généralise en celle de point de petite hauteur, ou de *petit point*. Le résultat qui suit est connu sous le nom de *conjecture de Bogomolov* et a été démontré par E. Ullmo et S. Zhang, après un travail commun avec L. Szpiro.

A/K est une variété abélienne, munie d'un fibré en droites symétrique et ample. On note h la hauteur de Néron-Tate associée à L.

On note $X\{\varepsilon\} = \{x \in X(\overline{K}) \mid h(x) \leq \varepsilon\}$, si X est une sous-variété de A.

(8.2.12) Théorème. *Soit X une sous-variété de A qui n'est pas de torsion. Alors, il existe une constante $\varepsilon > 0$ telle que l'ensemble $X\{\varepsilon\}$ ne soit pas Zariski-dense dans X.*

9 Un théorème d'équidistribution

Pour démontrer le résultat précédent, on utilise la théorème suivant :

Théorème. *Soit $X/\mathrm{Spec}\,\mathcal{O}_K$ une variété arithmétique de dimension d munie d'un fibré en droites hermitien ample $\overline{\mathcal{L}}$ tel que la courbure de $\overline{\mathcal{L}}_\sigma$ en chaque place σ au-dessus de X_σ soit positive.*

Soit (x_n) une suite de points générique telle que $h_{\overline{\mathcal{L}}}(x_n)$ converge vers $h_{\overline{\mathcal{L}}}(X)$.

Alors, pour toute place σ, le suite (x_n) est équidistribuée par rapport à la mesure $d\mu = \frac{c_1(\overline{\mathcal{L}}_\sigma)^{d-1}}{c_1(\mathcal{L}_\sigma)^{d-1}}$ dans $X_\sigma(\mathbf{C})$.

C'est-à-dire : pour toute fonction $f \in \mathcal{C}(X_\sigma(\mathbf{C}), \mathbf{R})$, la suite

$$\frac{1}{\#O(x_n)} \sum_{x_{n^g} \in O(x_n)} f(\sigma(x_{n^g})$$

converge vers $\int_{X_\subset(\mathbf{C})} f(x) d\mu(x)$, où on considére l'action de Gal$(\overline{K}/K)$.