

Les fragmentations échangeables

Anne-Laure BASDEVANT

octobre 2003

La théorie des processus de fragmentations échangeables s'inspire des problématiques rencontrées en astrophysique dans l'étude de la fragmentation d'étoiles. Cette théorie est aussi très liée à la théorie de la coalescence, bien qu'il n'y ait pas de dualité simple entre les deux. D'un point de vue mathématique, les problèmes liés à la fragmentation et à coalescence ont été étudiés entre autres par Kingman [2], Pitman [1], Bolthausen et Sznitman [3]. Les processus de fragmentation sont des processus de Markov à valeurs dans les partitions échangeables des entiers naturels, et petit à petit, les blocs de la partition vont aléatoirement se séparer en plusieurs blocs. La plupart des résultats concernant les processus de fragmentation, concernent les fragmentations homogènes en temps, or, lorsque l'on s'intéresse par exemple au processus de coalescence de Bolthausen-Sznitman, on voit qu'en retournant le temps, on obtient un processus de fragmentation inhomogène en temps. Il pourrait donc être intéressant d'élargir les résultats obtenus dans le cas homogène au cas inhomogène.

I Les fragmentations échangeables homogènes en temps

I.1 Les partitions échangeables

Dans ce paragraphe, on va s'intéresser aux propriétés des variables aléatoires à valeurs dans les partitions de \mathbb{N} dont la loi est invariante par permutation. En effet, la loi des processus de fragmentations échangeables doit, par définition d'échangeabilité, être invariante par permutation. On se servira donc des résultats ci-dessous pour déterminer les propriétés des processus de fragmentation.

Commençons tout d'abord par fixer quelques notations valables dans toute la suite.

Notation I.1.1 *On notera \mathbb{N} l'ensemble des entiers naturels non nuls.*

\mathcal{P}_∞ est l'ensemble des partitions de \mathbb{N} .

Soit $n \in \mathbb{N}$. \mathcal{P}_n désignera l'ensemble des partitions de $\{1, \dots, n\}$.

Soit $n > m$ deux entiers (éventuellement infinis). Soit $\Pi \in \mathcal{P}_n$. On notera $\Pi|_m$ la restriction de Π à \mathcal{P}_m .

Soit $n \in \mathbb{N}$ et $\pi \in \mathcal{P}_n$. On notera $\#\pi$ le nombre de bloc non vide de π .

Définition I.1.2 *Une partition aléatoire Π_n de $\{1, \dots, n\}$ est dite échangeable, ce que l'on notera une PE, si la distribution de Π_n est invariante par permutation. Une partition aléatoire Π de \mathbb{N} est dite échangeable si pour tout n la restriction de Π à $\{1, \dots, n\}$ est échangeable.*

Proposition I.1.3 *Π_n est une partition aléatoire échangeable de $\{1, \dots, n\}$, si et seulement s'il existe une fonction symétrique p telle que :*

$$\forall \{A_1, \dots, A_k\} \in \mathcal{P}_n \quad P(\Pi_n = \{A_1, \dots, A_k\}) = p(|A_1|, \dots, |A_k|).$$

Proposition I.1.4 Soit Π une PE de \mathbb{N} et soient A_1, A_2, \dots les blocs de Π rangés selon leur plus petit élément. Alors pour tout $j \in \mathbb{N}$

$$\widehat{f}_j = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \mathbf{1}_{i \in A_j}$$

existe.

\widehat{f}_j est la fréquence de la j -ième classe d'équivalence. Ainsi on a

$$\forall j \in \mathbb{N} \quad 0 \leq \widehat{f}_j \leq 1 \quad \text{et} \quad \sum_j \widehat{f}_j \leq 1.$$

On note alors $f = (f_1, f_2, \dots)$ la séquence ordonnée de façon décroissante des (\widehat{f}_j) .

Pour la démonstration, on peut se référer à celle de Kingman [2]. \square

Cette propriété d'existence de fréquence asymptotique pour les blocs d'une PE est une propriété remarquable qui nous servira de nombreuses fois dans la suite.

Notation I.1.5 Soit $\pi \in \mathcal{P}_\infty$. $|\pi| = (|\pi_1|, |\pi_2|, \dots)$ désignera la suite des fréquences ordonnées selon le plus petit élément de π .

Notation I.1.6 On notera \mathcal{S} l'ensemble des suites (f_j) ordonnées de façon décroissante de $[0, 1]$ telles que $\sum_j f_j = 1$; et on notera $\overline{\mathcal{S}}$ l'ensemble des suites (f_j) ordonnées de façon décroissante de $[0, 1]$ telles que $\sum_j f_j \leq 1$. Ces deux ensembles seront munis de la topologie induite par la convergence uniforme.

Remarque I.1.7 $\overline{\mathcal{S}}$ est un compact et \mathcal{S} est dense dans $\overline{\mathcal{S}}$.

Théorème I.1.8 Soit ν une mesure de probabilité sur $\overline{\mathcal{S}}$, on tire alors une variable aléatoire f suivant ν , puis on tire une suite de variables aléatoires i.i.d. X_n à valeurs dans \mathbb{N} tel que $\mathbf{P}(X_n = i) = f_i$ et $\mathbf{P}(X_n = 0) = 1 - \sum_i f_i$. On construit alors la partition aléatoire Π_∞ telle que deux entiers distincts i et j sont dans le même bloc si et seulement si $X_i = X_j \neq 0$. Ainsi i formera un singleton si $X_i = 0$. Alors ceci est clairement une PE dont la loi des fréquences est ν et de plus toutes les PE peuvent être construites ainsi.

Pour démontrer ce théorème, on peut se référer à Kingman [2]. Cette construction est souvent appelé "paintbox process" (ou méthode des boîtes de peintures), on notera alors ρ_ν la loi obtenu par cette construction sur \mathcal{P}_∞ . \square

Remarque I.1.9 On remarque donc qu'un bloc d'une partition échangeable de \mathbb{N} fini est forcément réduit à un unique élément.

I.2 Définition d'un processus de fragmentation

Définition I.2.1 Soit $A \subseteq B \subseteq \mathbb{N}$ et $\pi \in \mathcal{P}_A$ avec $\#\pi = n$. Soit $\pi^{(\cdot)} = (\pi^{(i)}, i \in \{1, \dots, n\})$, $\pi^{(i)} \in \mathcal{P}_B$ pour tout i . On considère alors la partition du i -ème bloc de π, π_i , induite par $\pi^{(i)}$, i.e. $\pi|_{\pi_i}^{(i)} = \tilde{\pi}^{(i)}$.

Lorsque i décrit $\{1, \dots, n\}$, les blocs des $\tilde{\pi}^{(i)}$ forment les blocs d'une partition $\tilde{\pi}$ de A . Celle-ci est notée $\text{Frag}(\pi, \pi^{(\cdot)})$ et appelée fragmentation de π par $\pi^{(\cdot)}$.

Notation I.2.2 On notera $\mathbf{1} = (A, \emptyset, \emptyset, \dots)$ la partition constituée d'un seul bloc non vide. On utilisera aussi cette notation pour l'élément de \mathcal{S} , $(1, 0, 0, \dots)$. On posera aussi $\mathbf{1}^{(\cdot)} = (\mathbf{1}, \mathbf{1}, \dots)$

Remarque I.2.3 Il est naturel d'employer la même notation, car l'élément $(1, 0, 0, \dots)$ de \mathcal{S} représente en fait la suite des fréquences de la partition $(A, \emptyset, \emptyset, \dots)$.

Proposition I.2.4 On a $\text{Frag}(\pi, \mathbf{1}^{(\cdot)}) = \pi$.

D'autre part, l'opération de fragmentation est compatible avec la restriction i.e. :

$$\text{Frag}(\pi, \pi^{(\cdot)})|_n = \text{Frag}(\pi|_n, \pi^{(\cdot)})$$

Lemme I.2.5 Soit π une partition aléatoire échangeable de \mathcal{P}_n . Soit $(\pi^{(i)}, i \in \{1, \dots, n\})$ une suite iid de partitions échangeables. Alors $\text{Frag}(\pi, \pi^{(\cdot)})$ est une partition échangeable.

Définition I.2.6 Fixons $n \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ et $(\Pi(t), t \geq 0)$ un processus de Markov à valeurs dans \mathcal{P}_n , continu en probabilité.

On dira que Π est un processus de fragmentation échangeable si son semi-groupe est décrit de la façon suivante : pour tout $t, t' \geq 0$ la loi conditionnelle de $\Pi(t + t')$ sachant que $\Pi(t) = \pi$ est la loi de $\text{Frag}(\pi, \pi^{(\cdot)})$, où $\pi^{(\cdot)}$ est iid, échangeables et ne dépend que de t et de t' .

On dira que la fragmentation est homogène en temps si la loi de $\pi^{(\cdot)}$ ne dépend que de t' .

Définition I.2.7 On dira que $(\Pi(t), t \geq 0)$ est un processus de fragmentation standard si $\Pi(0) = \mathbf{1}$.

Soit Π un processus de fragmentation standard. Soit $\pi \in \mathcal{P}_\infty$. Si $\Pi^{(\cdot)} = (\Pi^{(i)}, i \in \mathbb{N})$ est une suite iid de processus de loi $\mathcal{L}(\Pi)$, alors $\text{Frag}(\pi, \Pi^{(\cdot)}(t))$ est la fragmentation issue de π . On peut donc se restreindre à étudier les processus de fragmentation standard.

Proposition I.2.8 Si Π est une \mathcal{P}_∞ -fragmentation alors $\Pi|_n$ est une \mathcal{P}_n -fragmentation. Réciproquement si Π est un processus à valeurs dans \mathcal{P}_∞ tel que chaque $\Pi|_n$ est une \mathcal{P}_n -fragmentation, alors Π est une \mathcal{P}_∞ -fragmentation.

I.3 Mesure d'un processus de fragmentation

Dorénavant on suppose que la fragmentation est échangeable et **homogène en temps**.

Soit Π une \mathcal{P}_∞ -fragmentation. Soit $n \in \mathbb{N}$, $\pi \in \mathcal{P}_n / \{\mathbf{1}\}$, on définit :

$$q_\pi = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} \mathbf{P}(\Pi|_n(t) = \pi)$$

La théorie des chaînes de Markov homogène à temps continu nous assure que cette limite existe et que la famille des taux de saut $(q_\pi, \pi \in \mathcal{P}_n/\{\mathbf{1}\}, n \in \mathbb{N})$ détermine entièrement la loi de Π .

En effet, comme la loi du processus de fragmentation partant de π peut facilement se déduire de la loi du processus de fragmentation standard, la connaissance de la famille ci-dessus suffit bien à déterminer la loi de la fragmentation.

D'autre part, l'échangeabilité du processus de fragmentation entraîne que si σ est une permutation de $\{1, \dots, n\}$ alors $q_\pi = q_{\sigma(\pi)}$.

On introduit alors la notation suivante :

Soit $m \geq n, \pi \in \mathcal{P}_n$

$$Q_{m,\pi} = \{\pi' \in \mathcal{P}_m, \pi'|_n = \pi\} \quad (1)$$

Proposition I.3.1 *Soit $(q_\pi, \pi \in \mathcal{P}_n/\{\mathbf{1}\}, n \in \mathbb{N})$ la famille des taux d'un processus de fragmentation homogène Π . Il existe alors une unique mesure μ sur \mathcal{P}_∞ telle que $\mu(Q_{\infty,\pi}) = q_\pi$ pour tout $\pi \in \mathcal{P}_n/\{\mathbf{1}\}, n \in \mathbb{N}$ et $\mu(\mathbf{1}) = 0$. On appelle μ mesure de fragmentation de Π , elle détermine la loi de Π .*

μ est alors une mesure échangeable et pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a $\mu(\{\pi \in \mathcal{P}_\infty, \pi|_n \neq \mathbf{1}\}) < \infty$

Preuve : il suffit de vérifier l'additivité de la fonction qui à $Q_{\infty,\pi}$ associe q_π . \square

Ainsi la loi d'un processus de fragmentation homogène se résume à la connaissance d'une mesure sur \mathcal{P}_∞ .

I.4 La construction Poissonienne

Dans ce paragraphe, nous allons partir d'une mesure μ qui vérifie les hypothèses d'une mesure de fragmentation et nous allons donner une construction explicite d'un processus de fragmentation ayant μ comme mesure. Ainsi, on pourra énoncer le théorème suivant :

Théorème I.4.1 *Soit μ une mesure échangeable sur \mathcal{P}_∞ avec $\mu(\{\pi \in \mathcal{P}_\infty, \pi|_n \neq \mathbf{1}\}) < \infty$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $\mu(\{\mathbf{1}\}) = 0$.*

Alors il existe un processus de fragmentation homogène ayant μ comme mesure de fragmentation.

Pour démontrer cela, il faut introduire la notion de mesure de Poisson.

Définition I.4.2 *On se donne un espace mesuré (E, \mathcal{E}) et une mesure σ -finie μ sur cet espace. On appelle mesure aléatoire de poisson d'intensité μ , un processus $M = (M(B), B \in \mathcal{E})$. $M(B)$ est à valeurs dans $\bar{\mathbb{N}}$ tel que :*

Si $\mu(B) < \infty$, $M(B)$ suit une loi de poisson de paramètre $\mu(B)$.

Si $\mu(B) = \infty$, $M(B) = \infty$ p.s.

Si B_1, \dots, B_n, \dots sont des parties mesurables deux à deux disjointes, alors les variables aléatoires $M(B_1), \dots, M(B_n), \dots$ sont indépendantes et $M(\cup B_i) = \sum M(B_i)$.

Autrement dit, cela revient à se donner un nuage de points sur E tel que dans chaque ensemble mesurable, le nombre de points suit une loi de poisson de paramètre la mesure de cet ensemble. $M(B)$ représente alors le nombre de points dans la partie B .

Pour construire une fragmentation de mesure μ , il faut considérer une mesure de Poisson M sur $\mathbb{R}_+ \otimes \mathcal{P}_\infty \otimes \mathbb{N}$ d'intensité $dt \otimes \mu \otimes \sharp$ où \sharp est la mesure de comptage.

Si on appelle M^n la restriction de M à $\mathbb{R}_+ \otimes \mathcal{P}_n / \{\mathbf{1}\} \otimes \{1, \dots, n\}$, l'intensité de la mesure est alors finie sur l'intervalle $[0, t]$, donc on peut ordonner les atomes de M^n suivant leur première coordonnée. Si un atome de M^n est (s, π, k) , au temps s , le k -ième bloc de Π_n se séparera en plusieurs blocs selon π .

On peut alors vérifier que cette construction est compatible avec l'opération de restriction et que le processus de fragmentation ainsi construit possède bien μ comme mesure de fragmentation.

I.5 Caractérisation par le taux d'érosion et la mesure de dislocation

Une mesure de fragmentation μ est par définition une mesure échangeable. Comme pour les lois échangeables, il est facile de voir que toute partition possédera μ -p.s. une suite de fréquences asymptotiques $s \in \mathcal{S}$.

Le but de cette partie va être de décomposer μ en deux mesures, l'un caractérisant μ sur l'événement $s = \mathbf{1}$ et l'autre sur l'événement complémentaire. L'événement $s = \mathbf{1}$ donnera naissance à une partition constituée d'un seul bloc non réduit à un singleton, on appellera mesure d'érosion la mesure μ restreinte à cet événement. La mesure μ restreint à l'événement $s \neq \mathbf{1}$, donnera quant elle naissance à des partitions possédant plusieurs blocs infinis, on appellera cette mesure, mesure de dislocation.

Plus précisément on a le théorème suivant :

Théorème I.5.1 *On note $\varepsilon_i = \{\{i\}, \{\mathbb{N}/\{i\}\}\}$ et $\varepsilon = \sum_i \delta_{\varepsilon_i}$. C'est une mesure sur \mathcal{P}_∞ .*

On dit aussi que ν , mesure sur $\overline{\mathcal{S}}$ est une mesure de dislocation si :

$\nu(1, 0, 0, \dots) = 0$ et $\int_{\overline{\mathcal{S}}} (1 - s_1) \nu(ds) < \infty$.

On rappelle que ρ_ν est la mesure sur \mathcal{P}_∞ obtenu en appliquant le "paintbox process" à ν .

Alors si μ est une mesure de fragmentation, il existe $c \geq 0$ et ν mesure de dislocation tels que :

$$\mu = c\varepsilon + \rho_\nu.$$

De plus on a que la restriction de μ à $\{\pi \in \mathcal{P}_\infty | |\pi| = \mathbf{1}\}$ est $c\varepsilon$ et celle à $\{\pi \in \mathcal{P}_\infty | |\pi| \neq \mathbf{1}\}$ est ρ_ν .

I.6 Loi d'un fragment marqué

Une application de la décomposition ci-dessus est par exemple de calculer la loi de la fréquence du bloc contenant l'entier 1, $|\Pi_1(t)|$, au cours d'une fragmentation échangeable standard.

Rappelons d'abord la définition d'un subordonateur

Définition I.6.1 Un subordonateur est un processus $\sigma = (\sigma(t), t \geq 0)$ à valeurs dans $[0, \infty]$, $\sigma(0) = 0$, continu à droite tel que ses accroissements soient indépendants et stationnaires.

Proposition I.6.2 Soit σ un subordonateur. On note $\zeta = \sup\{t > 0, \sigma_t < \infty\}$. Alors il existe une fonction ϕ positive telle que

$$\forall q, t \geq 0, \mathbf{E}[\exp(-q\sigma_t), \zeta > t] = \exp(-t\phi(q))$$

ϕ est l'exposant de Laplace de σ .

$\phi(0)$ est la taux de mort du subordonateur ; le subordonateur vaudra donc l'infini au bout d'un temps qui suit une loi exponentielle de paramètre $\phi(0)$.

Revenons au calcul de la loi de $|\Pi_1(t)|$. On a le théorème suivant :

Théorème I.6.3 $|\Pi_1(t)|$ peut être représenté sous la forme $\exp(-\sigma_t)$ où σ est un subordonateur d'exposant de Laplace

$$\phi(q) = c(q+1) + \int_{\mathcal{S}} (1 - \sum_{i=1}^{\infty} s_i^{q+1}) \nu(ds)$$

La démonstration de ce théorème utilise l'égalité suivante :

$$\mathbf{P}[|\Pi_{|k+1}(t)| = \mathbf{1}] = \mathbf{E}[|\Pi_1(t)|^k].$$

Celle-ci s'obtient en conditionnant par $|\Pi_1(t)|$. Puis on remarque que l'événement $\{|\Pi_{|k+1}(t)| = \mathbf{1}\}$ correspond, en regardant la construction Poissonienne, à une absence d'atome de la mesure de Poisson dans la partie $[0, t] \times \{\pi \in \mathcal{P}_{\infty}, \pi_{|k+1}(t) \neq \mathbf{1}\} \times \{\mathbf{1}\}$. \square

Cette formule permet par exemple de caractériser les processus de fragmentation dont la suite des fréquences est propre, i.e. où $\sum_{i=1}^{\infty} |\pi_i| = 1$.

Proposition I.6.4 On a :

$$\forall t > 0 \mathbf{P}(\Pi(t) \text{ est impropre}) = 0 \Leftrightarrow (c = 0 \text{ et } \nu(\sum_i s_i < 1) = 0)$$

En effet il est facile de voir que

$$\forall t > 0 \mathbf{P}(\Pi(t) \text{ est impropre}) = 0 \Leftrightarrow \phi(0) = 0 \square.$$

II Le processus de coalescence de Bolthausen-Sznitman

Dans ce paragraphe nous allons présenter un type particulier de processus de coalescence, le processus de coalescence de Bolthausen-Sznitman, et nous allons voir, que si on retourne le temps, alors on obtient un processus de fragmentation échangeable inhomogène en temps. Nous allons dans les deux premières parties commencer par définir des notions utiles par la suite.

II.1 Les (α, θ) -partitions

Les (α, θ) -partitions sont des partitions aléatoires échangeables particulières, mais que l'on rencontre lorsqu'on étudie le processus de coalescence de Bolthausen-Sznitman.

Définition II.1.1 Soient $0 \leq \alpha \leq 1$, $\theta > -\alpha$. Soit $(Y_n)_{n \geq 1}$ indépendants de loi $\beta(1 - \alpha, \theta + n\alpha)$. On pose :

$$\widehat{f}_1 = Y_1 \quad \widehat{f}_n = (1 - Y_1) \dots (1 - Y_{n-1})Y_n \quad \widehat{f} = (\widehat{f}_n)_{n \geq 1}$$

Alors $\sum_i \widehat{f}_i \leq 1$. Soit $f = (f_n)_{n > 0}$ la suite ordonnée de façon décroissante des \widehat{f}_n . On dit alors que f a une distribution de Poisson-Dirichlet de paramètre (α, θ) . On notera cette distribution $PD(\alpha, \theta)$.

Rappel II.1.2 On rappelle qu'une loi $\beta(a, b)$ a pour densité

$$\frac{\Gamma(a+b)}{\Gamma(a)\Gamma(b)} x^{a-1}(1-x)^{b-1} \mathbf{1}_{[0,1]} dx$$

Remarque II.1.3 Il faut bien voir que la construction de \widehat{f} à l'aide des variables $(Y_n)_{n \geq 1}$ est en fait assez naturelle. En effet, on choisit d'abord \widehat{f}_1 entre 0 et 1 avec une certaine loi Y_1 , puis il faut alors choisir \widehat{f}_2 dans l'intervalle qui nous reste pour que la somme soit majorée par 1, c'est à dire entre 0 et $(1 - Y_1)$. On tire donc une variable aléatoire indépendante de Y_1 avec une loi Y_2 à support dans $[0, 1]$, puis on renormalise cette variable en la multipliant par la taille de l'intervalle $[0, 1 - Y_1]$. On recommence alors pour $(\widehat{f}_k)_{k \geq 3}$. Cependant cette construction est particulière et toutes les partitions aléatoires échangeables n'ont pas forcément une suite de fréquences dont la loi vérifie cette construction.

Proposition II.1.4 Soit $\widehat{f} = (\widehat{f}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires à valeurs dans $[0, 1]$ de distribution $PD(\alpha, \theta)$. Alors il existe une partition aléatoire échangeable ayant comme distribution de fréquence \widehat{f} , où \widehat{f}_i est la fréquence du bloc i et où les blocs sont rangés selon leur plus petit élément. De plus la fonction symétrique p associée à cette partition (cf. proposition I.1.3) est

$$p_{\alpha, \theta}(n_1, \dots, n_k) = \frac{[\frac{\theta}{\alpha}]_k}{[\theta]_n} \prod_{i=1}^k -[\alpha]_{n_i} \quad (2)$$

où $[x]_n = \prod_{i=1}^n (x + i - 1)$ et $n = \sum n_i$.

On dira alors que cette partition est une (α, θ) -partition.

Réciproquement, soit $\widehat{f} = (\widehat{f}_n)_{n \in \mathbb{N}}$, suite de variables aléatoires à valeurs dans $[0, 1]$ telle que $\sum_n \widehat{f}_n = 1$ et telle qu'il existe une suite de variables aléatoires Y_n indépendantes telle que $\widehat{f}_n = (1 - Y_1) \dots (1 - Y_{n-1})Y_n$, alors si \widehat{f} est la suite des fréquences des blocs (rangés par ordre croissant du plus petit élément) d'une PE, il existe un couple (α, θ) tel que \widehat{f} ait pour distribution $PD(\alpha, \theta)$.

Remarque II.1.5 Pour la réciproque, il faut bien remarquer que l'on a supposé $f_n > 0$ pour tout n car sinon on peut aussi considérer la suite $f_i = 1/n$ pour $i \in \{1, \dots, n\}$ et $f_i = 0$ pour $i \geq n + 1$. Ceci est aussi la suite des fréquences d'une PE.

Pour la démonstration de ce théorème, on peut se référer à l'article [5] lemme 12 et 13, et à [8].

Remarque II.1.6 On a même une construction directe d'une PE de distribution $p_{\alpha, \theta}$: Tout d'abord, forcément l'entier 1 appartient au premier bloc que l'on note B_1 . Supposons que les n premiers entiers se répartissent en b blocs : $\Pi_n = (B_1, \dots, B_b)$, où chaque bloc B_i a pour cardinal n_i . Alors on définit Π_{n+1} par la loi suivante :

$$\mathbf{P}(\{n+1\} \text{ soit dans le bloc } B_i) = \frac{n_i - \alpha}{n + \theta}$$

$$\mathbf{P}(\{n+1\} \text{ forme un nouveau bloc}) = \frac{b\alpha + \theta}{n + \theta}.$$

Alors Π construit ainsi a la distribution de fréquence voulue (cf [4]).

Ceci se prouve par un calcul direct de la loi de la partition ainsi construite. \square

II.2 Définition de p-COAG et p-FRAG

Dans ce paragraphe, nous allons définir deux opérateurs sur les partitions, p -COAG et p -FRAG puis voir le lien que les unit.

Définition II.2.1 Soit $\pi = \{A_1, A_2, \dots\}$ une partition de \mathbb{N} où les blocs A_i sont rangés selon leur plus petit élément. Soit $\Pi = \{B_1, B_2, \dots\}$ une partition. La Π -coagulation de π est la partition donc les blocs sont les $\bigcup_{j \in B_i} A_j$ pour $i \in \mathbb{N}$. Si p est une probabilité sur \mathcal{P}_∞ , on définit le noyau de transition p -COAG(π, \cdot) comme la distribution d'une Π -coagulation de π , avec $\mathcal{L}(\Pi) = p$.

Notation II.2.2 Si $p = p_{\alpha, \theta}$ comme défini dans la proposition II.1.4, alors on dit que Π est une (α, θ) -coagulation de π .

Définition II.2.3 Soit $\pi = \{A_1, \dots, A_k\}$, soit p une probabilité sur \mathcal{P}_∞ . Pour $m \in \{1, \dots, k\}$, on tire des variables aléatoires indépendantes Π^m de loi p . On définit alors la partition π' comme le raffinement de π où l'on a séparé les blocs A_i selon les blocs de Π^i . La distribution de π' est alors notée p -FRAG(π, \cdot). Ceci définit en fait un noyau de transition Markovien p -FRAG sur \mathcal{P}_∞ .

Notation II.2.4 Si $p = p_{\alpha, \theta}$ comme défini dans la proposition II.1.4, alors on dit que π' est une (α, θ) -fragmentation de π .

Remarque II.2.5 Pour un processus de fragmentation échangeable, pour tout $t' > t \geq 0$, il existe par définition une probabilité $p_{t, t'}$ telle que, en loi, on ait : $\Pi'(t) = p_{t, t'}$ -FRAG($\Pi(t), \cdot$). Si en plus le processus est homogène, alors $p_{t, t'}$ ne dépend que de $t' - t$.

On va maintenant énoncer quelques règles de calculs concernant p -COAG et p -FRAG.

Lemme II.2.6 *Soit Π une p_1 partition, Π' une p -coagulation de Π . Soit $\pi_1 = \{A_1, \dots, A_K\}$ avec $|A_i| = a_i$, $\pi_2 = \{B_1, \dots, B_k\}$ tel que π_1 soit un raffinement de π_2 et on note $j_i = \text{card}\{l, A_l \subset B_i\}$. Alors la loi jointe de Π et Π' est :*

$$\mathbf{P}(\Pi = \pi_1, \Pi' = \pi_2) = p_1(a_1, \dots, a_K)p(j_1, \dots, j_k)$$

Preuve. En effet on a $\mathbf{P}(\Pi = \pi_1) = p_1(a_1, \dots, a_K)$ et $\mathbf{P}(\Pi' = \pi_2 \mid \Pi = \pi_1) = p(j_1, \dots, j_k)$ par définition de l'action de p -COAG. \square

On a un lemme du même type pour le noyau de transition p -FRAG :

Lemme II.2.7 *Soit Π' une p_2 partition, Π une p' -fragmentation de Π' . Soit $\pi_1 = \{A_1, \dots, A_K\}$, $\pi_2 = \{B_1, \dots, B_k\}$ avec $|B_i| = b_i$ tel que π_1 soit un raffinement de π_2 : π_1 est obtenu en cassant chaque bloc B_i en j_i blocs de taille a_{i1}, \dots, a_{ij_i} (ainsi $\sum_i j_i = K$). Alors la loi jointe de Π et Π' est :*

$$\mathbf{P}(\Pi = \pi_1, \Pi' = \pi_2) = \prod_{i=1}^k p'(a_{i1}, \dots, a_{ij_i})p_2(b_1, \dots, b_k).$$

Preuve. Comme pour le lemme précédent, on écrit que $\mathbf{P}(\Pi' = \pi_2) = p_2(b_1, \dots, b_k)$ et $\mathbf{P}(\Pi = \pi_1 \mid \Pi' = \pi_2) = \prod_{i=1}^k p'(a_{i1}, \dots, a_{ij_i})$ par définition de l'action de p -FRAG. \square

Proposition II.2.8 *Soit $\alpha \in]0, 1[$, $\beta \in [0, 1[$ et $\theta > -\alpha\beta$. Les propositions suivantes sont équivalentes :*

- 1° Π est une (α, θ) -partition et Π' est une $(\beta, \theta/\alpha)$ -coagulation de Π .
- 2° Π' est une $(\alpha\beta, \theta)$ -partition et Π est une $(\alpha, -\alpha\beta)$ -fragmentation de Π' .

Preuve. On utilise les deux lemmes précédents pour calculer les lois jointes de Π et Π' de deux manières différentes : d'une part en supposant que Π est une (α, θ) -partition et Π' est une (β, θ_c) -coagulation de Π et d'autre part en supposant que Π' est une (α', θ') -partition et Π est une (α_f, θ_f) -fragmentation de Π' . En utilisant la formule (2), par identification on trouve que l'on a égalité si et seulement si les relations suivantes sont vérifiées :

$\alpha_f = \alpha$, $\theta_f/\alpha_f = -\beta$, $-\alpha' = \theta_f$, $\theta'/\alpha' = \theta_c/\beta$, $\theta' = \theta$, $\theta_c = \theta/\alpha$. Ainsi si $\theta' = \theta$, $\theta_c = \theta/\alpha$, $\alpha = \alpha\beta$, $\alpha_f = \alpha$ et $\theta_f = -\alpha\beta$, on a bien égalité des lois jointes. \square

Remarque II.2.9 1° *De cette proposition, on déduit en particulier que si Π est une (α, θ) -partition et Π' est une $(\beta, \theta/\alpha)$ -coagulation de Π , alors Π' est une $(\alpha\beta, \theta)$ -partition.*

2° *On a bien sûr la même proposition pour les fréquences :*

si f a pour distribution $PD(\alpha, \theta)$ et Π est une $(\beta, \theta/\alpha)$ -partition, alors $f' = (f, \Pi)$ a comme distribution $PD(\alpha\beta, \theta)$.

3° *Ceci permet aussi de construire une (α, θ) -partition à partir d'une $(0, \theta)$ -partition et d'une $(\alpha, 0)$ -fragmentation de cette partition.*

II.3 Définition du coalescent de Bolthausen-Sznitman

Nous allons donc enfin définir le processus de Bolthausen-Sznitman et montrer que, via un retournement de temps, c'est un fragmentation inhomogène en temps.

Le processus de coalescence de Bolthausen-Sznitman est un processus de coalescence où, à chaque saut du processus, seul un seul bloc peut se former. Les taux de saut de ce processus d'un état à un autre sont déterminés de façon explicite et ne dépendent pas du temps. Si on se restreint à une partition à b blocs, chaque k -uplet de blocs se regroupe à un taux de transition fixé $\lambda_{b,k}$ qui ne dépend que de b . Lorsqu'on dit que chaque k -uplet se regroupe à un taux $\lambda_{b,k}$, cela signifie que pour tout $k \in \{2, \dots, b\}$, pour tout sous ensemble $I_k = (i_1, \dots, i_k)$ à k éléments de $\{1, \dots, b\}$, on tire une variable exponentielle X_{I_k} de paramètre $\lambda_{b,k}$ de façon indépendante, on prend alors la plus petite d'entre elles :

$X_{I_0} = \min\{X_{I_k}, I_k \text{ sous ensemble à } k \text{ éléments de } \{1, \dots, b\}, k \in \{2, \dots, b\}\} = t_0$ et, au temps t_0 , l'ensemble des blocs de $\Pi_n(t_0^-)$ d'indice $m \in I_0$ se regroupera dans un même bloc. Et dans le cas du coalescent de Bolthausen-Sznitman, on a :

$$\lambda_{b,k} = \frac{(k-2)!(b-k)!}{(b-1)!}$$

Proposition II.3.1 *La suite des fréquences d'un processus coalescence de Bolthausen-Sznitman standard au temps t a comme distribution $PD(\exp -t, 0)$.*

Et on en déduit aussi la forme du semi-groupe de $\Pi_\infty(t)$:

$$\mathbf{P}(\Pi_\infty(t+s) \in \cdot \mid \Pi_\infty(t)) = (\exp(-s), 0) - COAG(\Pi_\infty(t), \cdot)$$

Pour une preuve, on peut se référer à [6].

Proposition II.3.2 *On possède aussi la loi d'un processus U -coalescent standard à un instant donné $t - s$ sachant son état à un instant t ultérieur. Soit $s < t$ alors*

$$\mathbf{P}(\Pi_\infty(t-s) \in \cdot \mid \Pi_\infty(t)) = (\exp(s-t), -\exp(-t)) - FRAG(\Pi_\infty(t), \cdot).$$

Preuve. Cela se déduit directement de la proposition II.2.8 qui donnait une relation sur les actions de p -COAG et p -FRAG. En effet $\Pi_\infty(t-s)$ est une $(\exp(s-t), 0)$ -partition et $\Pi_\infty(t)$ est une $(\exp(-s), 0)$ -coagulation de $\Pi_\infty(t-s)$, donc en appliquant la proposition II.2.8, on en déduit le résultat voulu. \square

Ainsi, le processus de Bolthausen-Sznitman via le retournement de temps est une fragmentation, mais celle-ci est inhomogène en temps puisque le réel t apparaît dans le noyau de transition de t à $t - s$. L'élargissement de la théorie exposée dans le paragraphe I au cas inhomogène permettrait de l'appliquer à ce processus et peut-être d'en déduire de nouvelles propriétés en utilisant des méthodes propres aux processus de fragmentations.

Bibliographie

- [1] J. PITMAN. *Coalescents with multiple collisions*. Ann. Proba 1999, No.4.
- [2] J.F.C KINGMAN. *The Coalescent*. Stochastic process. Appl. 1982, No.13.
- [3] E. BOLTHAUSEN & A.S. SZNITMAN. *On Ruelle's probability cascades and an abstract cavity method*. Comm. Math. Phys. 1999, No 197.
- [4] J. PITMAN. *Exchangeable and partially exchangeable random Partitions*. Probab. Theory Related Fields 1995, No.102.
- [5] J. PITMAN. *Random discrete Distributions invariant under size-biased permutation*. Adv. Appl. Probab. 1996, No.28.
- [6] M. PERMAN & J. PITMAN & M. YOR. *Size Biased sampling of Poisson process and excursions*. Probab. Theory Related Fields 1992, No.92.
- [7] J. BERTOIN. *Coalescence et Fragmentation*. Cours de DEA de Paris VI.
- [8] A.L. BASDEVANT. *Coalescence à collisions multiples*. Mémoire de DEA.