

Les invariants de nœuds : du
polynôme de Jones à l'invariant
d'Alexander L^2

Fathi Ben Aribi

Sous la direction de Jérôme Dubois

Introduction au domaine de recherche

Introduction

La notion d'invariant est fondamentale en Mathématiques. L'idée d'associer une quantité (nombre, complexe, polynôme, module...) à un objet pour déterminer si deux objets sont différents se retrouve dans pratiquement tous les domaines des mathématiques, et particulièrement en topologie algébrique : nombre de composantes connexes d'un espace topologique, cardinal d'un ensemble, caractéristique d'Euler d'un CW-complexe...

Un des objectifs de la théorie des nœuds est d'obtenir une classification des nœuds à isotopie près (c'est-à-dire à déformation continue sans déchirure), problème lancé par Tait. Aujourd'hui, résoudre ce problème passe par l'utilisation d'invariants des nœuds, non seulement « faciles » à définir, « faciles » à calculer, mais aussi assez fins pour distinguer les nœuds entre eux. Le jeu est alors de savoir quel invariant étudier ou utiliser dans quel cas de figure. Ainsi, le polynôme de Jones est très bon pour détecter l'amphichiralité d'un nœud, là où le polynôme d'Alexander en est incapable.

Dans cette introduction à mon futur domaine de recherche, je présente plusieurs invariants de nœuds.

Dans la première partie je rappelle quelques définitions de base, puis je définis les polynômes d'Alexander et de Jones à l'aide des relations skein, tout en comparant plusieurs de leurs propriétés. Cette démarche renvoie à mon mémoire de M2 qui développait également une autre construction du polynôme de Jones.

Dans la deuxième partie, je présente le groupe d'un nœud, un invariant très puissant (il détecte notamment la trivialité d'un nœud), qui permet ensuite de définir les polynômes d'Alexander tordus à l'aide de calcul de dérivées de Fox. Cette nouvelle famille d'invariants généralise le polynôme d'Alexander.

Enfin je décris brièvement quelques pistes d'étude que j'arpenterai durant ma thèse, toutes relevant d'une nouvelle classe d'invariants, les invariants L^2 . Mentionnons aussi que via la conjecture du volume, on aurait un lien entre les invariants classiques et les invariants quantiques comme les polynôme de Jones coloriés.

Table des matières

Introduction	2
1 Polynômes de nœuds	3
1.1 nœuds et entrelacs	3
1.2 Les relations skein et le polynôme d'Alexander	5
1.3 Le polynôme de Jones	6
2 Groupe d'un nœud et polynômes d'Alexander tordus	7
2.1 Groupe d'un nœud	7
2.2 Calcul de Fox et Matrice de Fox associés à un nœud	7
2.3 Calculs des polynômes d'Alexander tordus	8
3 Perspectives : les invariants quantiques et les invariants L^2	9
3.1 Polynôme de Jones colorié, torsion L^2 et conjecture du volume	9
3.2 L'invariant d'Alexander L^2	9
Références	9

1 Polynômes de nœuds

1.1 nœuds et entrelacs

Définition 1.1.1. Un *nœud* de \mathbb{R}^3 est une sous-variété de \mathbb{R}^3 difféomorphe au cercle S^1 . Le nœud est *orienté* si c'est une sous-variété orientée. L'orientation sera alors marquée par une flèche sur un dessin du nœud (le « sens de parcours du nœud »).

Un *entrelacs* de \mathbb{R}^3 à r composantes est une sous-variété de \mathbb{R}^3 difféomorphe à l'union disjointe de r cercles S^1 . L'entrelacs est *orienté* si c'est une variété orientée. Chaque composante sera alors fléchée.

Quelques exemples de nœuds et d'entrelacs (non orientés) sont dessinés sur la Figure 1

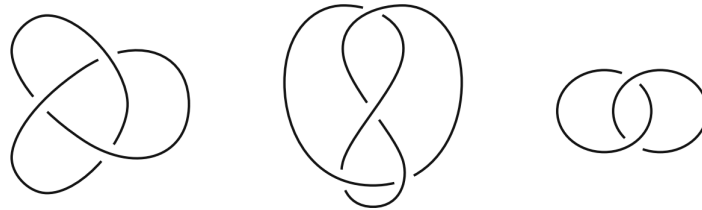


FIGURE 1 – Le nœud de trèfle droit, le nœud de huit, l'entrelacs de Hopf

Nous considérerons que deux entrelacs sont les mêmes si on peut déformer continument l'un en l'autre.

Définition 1.1.2. Deux entrelacs L et L' de \mathbb{R}^3 sont *isotopes* s'il existe $F : \mathbb{R}^3 \times I \rightarrow \mathbb{R}^3$ continue, telle que chaque $F_s = F(\cdot, s)$ soit un difféomorphisme (pour éviter qu'un entrelacs passe à travers lui-même pendant la déformation), et telle que $F_0 = Id_{\mathbb{R}^3}, F_1(L) = L'$.

Si les entrelacs sont orientés, on dit qu'ils sont *isotopes* si en plus le difféomorphisme F_1 préserve l'orientation.

Dans la suite, on assimilera un entrelacs à sa classe d'isotopie.

D'autre part, dans la suite de ce mémoire, sauf mention contraire, les entrelacs seront considérés orientés.

On manipulera plus facilement les nœuds en les regardant en deux dimensions au lieu de trois, i.e. en regardant leurs diagrammes planaires :

Définition 1.1.3. Un *diagramme d'entrelacs générique* (orienté) est l'image D d'une immersion (préservant l'orientation) d'une union disjointe de cercles dans le plan \mathbb{R}^2 avec les conditions supplémentaires que D n'a qu'un nombre fini de points multiples, que ce sont tous des points doubles à vecteurs tangents non colinéaires.

Chaque point double sera appelé *croisement* et sera distingué avec une information « dessus-dessous » .

A chaque diagramme on peut associer une classe d'entrelacs dans \mathbb{R}^3 : on considère le diagramme dans $\mathbb{R}^2 \times \{0\}$ puis on résout les points doubles en déplaçant un segment faisant partie de l'arc « dessous » dans le demi-espace inférieur. Réciproquement :

Théorème 1.1.4. *Tout entrelacs est isotope à un entrelacs dont la projection sur les deux premières coordonnées est un diagramme générique.*

Théorème 1.1.5. *Deux diagrammes génériques définissent des entrelacs isotopes si et seulement s'ils se correspondent par une suite finie d'isotopies planes et de mouvements de Reidemeister $R1, R2, R3$ (cf Figure 2) (ou plutôt de leurs versions orientées).*

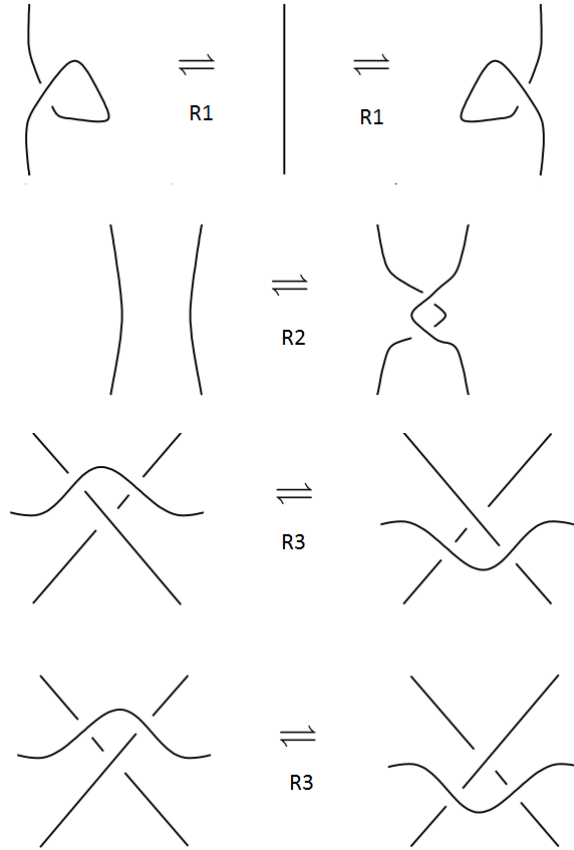


FIGURE 2 – Les trois mouvements de Reidemeister (non orientés)

Les mouvements de Reidemeister de la figure 2 ont des variantes orientées : il s'agit simplement de distinguer les cas selon l'orientation des différents arcs.

On dira qu'un croisement d'un diagramme est *positif* ou *négatif* suivant la Figure 3.

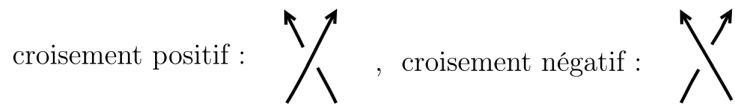


FIGURE 3 – Signe d'un croisement dans un diagramme orienté

Exemple 1.1.6. Le *nœud trivial* est le cercle S^1 plongé de façon évidente dans \mathbb{R}^3 . On le notera O . L'*entrelacs trivial à r composantes* est une union de r cercles dans \mathbb{R}^3 , chacun pris inclus dans une boule, avec les r boules disjointes.

Remarque 1.1.7. En identifiant S^3 à $\{(z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2; |z_1|^2 + |z_2|^2 = 1\}$, la projection stéréographique $s : S^3 \setminus \{(0, i)\} \rightarrow \mathbb{R}^3$ est un difféomorphisme. On peut ainsi définir les nœuds et les entrelacs dans S^3 au lieu de \mathbb{R}^3 .

La théorie des nœuds consiste notamment à trouver des invariants permettant de distinguer des classes d'isotopies d'entrelacs. Il est souvent difficile de trouver un juste milieu entre la puissance de distinction de l'invariant et à quel point il est facile (voire faisable) de le calculer pour un entrelacs donné.

Théorème 1.1.8 (Seifert). *Soit L un entrelacs. Il existe une surface compacte connexe orientable de bord isotope à L . On l'appelle surface de Seifert associée à L .*

Définition 1.1.9. Soit L un entrelacs. Le *genre* de L $g(L)$ est le genre de la surface de Seifert de L de genre minimal.

Le genre d'un nœud est un exemple d'invariant facile à définir et difficile à calculer en pratique.

1.2 Les relations skein et le polynôme d'Alexander

Définition 1.2.1. Un *triplet de Conway* est un triplet (L_+, L_-, L_0) d'entrelacs de \mathbb{R}^3 qui ont des diagrammes identiques en dehors d'un disque, la différence à l'intérieur du disque étant selon la Figure 4.

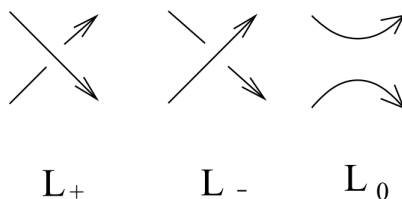


FIGURE 4 – Triplet de Conway

Définition 1.2.2. On peut définir le polynôme d'Alexander $\Delta_L(t) \in \mathbb{Z}[\sqrt{t}^{\pm 1}]$ d'un entrelacs L par induction, en demandant qu'il soit invariant par isotopie, et vérifie $\Delta_O(t) = 1$ et

$$\Delta_{L_+}(t) - \Delta_{L_-}(t) = \left(\sqrt{t} - \frac{1}{\sqrt{t}}\right)\Delta_{L_0}(t)$$

pour tout triplet de Conway (L_+, L_-, L_0) (une telle relation pour un triplet de Conway est appelée *relation skein*).

Exemple 1.2.3. $\Delta_L(t) = 0$ si L est scindé (i.e. on peut trouver une sphère séparant strictement deux parties de L).

$\Delta_T(t) = t - 1 + \frac{1}{t}$ où T est le nœud de trèfle droit.

Le polynôme d'Alexander peut être et a été défini de nombreuses autres manières. A l'origine, en 1928, il a été défini par Alexander comme un certain déterminant calculé à partir de la matrice de présentation du premier groupe d'homologie du revêtement infini cyclique du complément du nœud, ce groupe étant vu comme un $\mathbb{Z}[t^{\pm 1}]$ -module. Ceci est fait en détail dans [Cro04].

Une autre définition passe par le calcul des matrices de Fox, ce que nous verrons dans la partie suivante.

1.3 Le polynôme de Jones

Définition 1.3.1. On définit le polynôme de Jones $V_L(t) \in \mathbb{Z}[\sqrt{t}^{\pm 1}]$ d'un entrelacs L par induction, en demandant qu'il soit invariant par isotopie, et vérifie $V_O(t) = 1$ et

$$\frac{1}{t}V_{L_+}(t) - tV_{L_-}(t) = \left(\sqrt{t} - \frac{1}{\sqrt{t}}\right)V_{L_0}(t)$$

pour tout triplet de Conway (L_+, L_-, L_0) .

On peut construire le polynôme de Jones via les algèbres de von Neumann, en plongeant le groupe de tresses dans une certaine algèbre de von Neumann par une certaine représentation, cf [Jon91]. C'est d'ailleurs ainsi que ce polynôme a été découvert.

Ce procédé permet d'ailleurs de montrer que pour tout nœud K , $V_K(e^{\frac{2i\pi}{3}}) = 1$.

Regardons maintenant à quel point ces invariants sont utiles pour détecter l'amphichéralité d'un entrelacs L (i.e. s'il est isotope à son *image miroir* L^* , i.e. son image par la réflexion $(x, y, z) \mapsto (x, y, -z)$).

Proposition 1.3.2. *Si L est un entrelacs à c composantes, alors $V_L(t) = V_{L^*}(\frac{1}{t})$ et $\Delta_{L^*}(t) = \Delta_L(\frac{1}{t}) = (-1)^{c-1}\Delta_L(t)$.*

Par exemple, le polynôme de Jones du nœud de trèfle droit est $t + t^3 - t^4$, et ce polynôme n'est pas invariant quand on remplace t par $\frac{1}{t}$. Ceci prouve donc que les nœuds de trèfle droit et gauche ne sont pas isotopes! A l'inverse, le polynôme d'Alexander est incapable de détecter l'amphichéralité d'un entrelacs à un nombre impair de composantes, notamment un nœud. Mais quand le nombre de composantes est pair, il le détecte automatiquement (à condition de manipuler une version normalisée de Δ comme celle calculée avec les relations skein).

Ceci illustre le fait qu'aucun de ces deux polynômes n'est « un meilleur invariant que l'autre ». Pour achever de s'en convaincre, on peut remarquer que les deux nœuds de la Figure 5 ont le même polynôme de Jones mais pas le même polynôme d'Alexander, ce qui prouve qu'ils sont distincts.

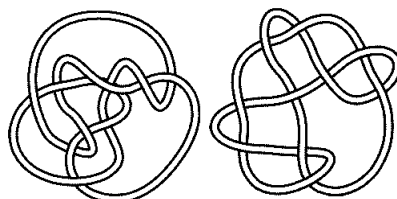


FIGURE 5 – Les nœuds 10_{94} et 10_{41}

2 Groupe d'un nœud et polynômes d'Alexander tordus

2.1 Groupe d'un nœud

Si K est un nœud, son *groupe* est $\Gamma_K = \pi_1(S^3 \setminus K)$ où π_1 est le groupe fondamental. C'est un invariant des nœuds, dont il est facile de trouver une présentation (cf présentation de Wirtinger ci-après), mais compliqué à étudier car il est difficile de savoir si deux présentations correspondent au même groupe.

Théorème 2.1.1. *K est trivial si et seulement si Γ_K est isomorphe à $\Gamma_O = \mathbb{Z}$.*

Ce théorème a une longue histoire. C'est une conséquence du lemme de Dehn (1910). La suite des résultats peut être trouvée dans [Kaw90].

Pour mieux comprendre le groupe Γ_K , on étudie ses représentations dans un groupe plus simple à manipuler, comme les groupes symétriques et diédraux, ou les groupes de matrices SU_2 et $SL_2(\mathbb{C})$. Pourquoi ceux-là en particulier ? Parce qu'ils sont pratiques à manipuler (travailler avec des matrices 2×2 est toujours agréable) et donnent lieu à des résultats très intéressants, cf la théorie des espaces de représentations.

2.2 Calcul de Fox et Matrice de Fox associés à un nœud

Théorème 2.2.1 (Présentation de Wirtinger). *[Bla] Le groupe d'un nœud associé à un diagramme planaire D à n croisements et n arcs admet une présentation ayant pour générateur un lacet méridien pour chaque arc, et une relation pour chaque croisement, de la forme $ab = ca$. Une telle présentation est dite de Wirtinger. Tous les générateurs sont conjugués, et une des n relations est redondante.*

Exemple 2.2.2. Une présentation du groupe du nœud de trèfle T est $\langle a, b, c \mid aba^{-1}c^{-1}, bcb^{-1}a^{-1} \rangle$, qui se surjecte sur \mathfrak{S}_3 , ce qui montre qu'il est non trivial et non commutatif.

Définition 2.2.3. Les *dérivées de Fox* dans un groupe libre $\mathbb{F}[x_1, \dots, x_n]$ sont notées $\frac{\partial}{\partial x_i}$ et définies récursivement par $\frac{\partial}{\partial x_i} 1 = 0$, $\frac{\partial}{\partial x_i} x_j = \delta_{i,j}$, $\frac{\partial}{\partial x_i} (x_j^{-1}) = -\delta_{i,j} x_j^{-1}$ et $\frac{\partial}{\partial x_i} (uv) = \frac{\partial}{\partial x_i} (u) + u \frac{\partial}{\partial x_i} (v)$.

Ce sont des applications linéaires de l'anneau du groupe dans lui-même.

Soit maintenant K un nœud quelconque. Soit $P = \langle x_1, \dots, x_n \mid r_1, \dots, r_{n-1} \rangle$ une présentation de Wirtinger du groupe Γ_K .

Soit $\beta : \mathbb{F}[x_1, \dots, x_n] \rightarrow \Gamma_K$ l'application quotient par les relations r_1, \dots, r_{n-1} , et $\tilde{\beta} : \mathbb{Z}[\mathbb{F}[x_1, \dots, x_n]] \rightarrow \mathbb{Z}[\Gamma_K]$ son extension aux anneaux de groupes.

Soit $\alpha : \begin{pmatrix} \Gamma_K & \rightarrow & \mathbb{Z} \cong \langle t \rangle \\ x_i & \rightarrow & t \end{pmatrix}$ l'abélianisation du groupe du nœud et $\tilde{\alpha}$ son extension aux anneaux de groupes.

On définit la première matrice de Fox associée à la présentation P comme

$F(\Gamma_K, P) = \left(\frac{\partial r_j}{\partial x_i} \right)_{i,j} \in M_{n,n-1}(\mathbb{Z}[\mathbb{F}[x_1, \dots, x_n]])$, puis la deuxième matrice de Fox comme

$F'(\Gamma_K, P) = \left(\tilde{\beta} \left(\frac{\partial r_j}{\partial x_i} \right) \right)_{i,j} \in M_{n-1,n-1}(\mathbb{Z}[\Gamma_K])$ qui elle est carrée (on a retiré la dernière ligne).

2.3 Calculs des polynômes d'Alexander tordus

On définit $F''(\Gamma_K, P) = \left(\tilde{\alpha} \circ \tilde{\beta} \left(\frac{\partial r_j}{\partial x_i} \right) \right)_{i,j} \in M_{n-1, n-1}(\mathbb{Z}[t^{\pm 1}])$.

Alors $\frac{\det(F''(\Gamma_K, P))}{\tilde{\alpha}(x_1 - 1)} = \frac{\det(F''(\Gamma_K, P))}{t - 1}$ est alors non seulement un élément de $\mathbb{Q}(t)$ mais est en fait dans $\mathbb{Z}[t^{\pm 1}]$, et est égal au polynôme d'Alexander de K $\Delta_K(t)$, à multiplication par $\pm t^k$ près, $k \in \mathbb{Z}$.

On peut alors généraliser le polynôme d'Alexander en définissant les *polynômes d'Alexander tordus*. Pour cela, soit $\rho : \Gamma_K \rightarrow SU_2$ une représentation, on définit alors la représentation tensorisée par α comme $(\alpha \otimes \rho)(x_i) = t\rho(x_i) \in M_2(\mathbb{C}[t^{\pm 1}])$, et on note $\alpha \tilde{\otimes} \rho$ son extension aux anneaux de groupes.

On peut maintenant définir une nouvelle matrice associée à ρ par :

$$F''_{\rho}(\Gamma_K, P) = \left((\alpha \tilde{\otimes} \rho) \circ \tilde{\beta} \left(\frac{\partial r_j}{\partial x_i} \right) \right)_{i,j} \in M_{n-1, n-1}(M_2(\mathbb{C}[t^{\pm 1}])) \cong M_{2n-2, 2n-2}(\mathbb{C}[t^{\pm 1}]).$$

Le polynôme d'Alexander tordu de K associé à P et ρ est alors défini comme :

$$\Delta_K^{\alpha \otimes \rho}(t) = \frac{\det_{2n-2, 2n-2}(F''_{\rho}(\Gamma_K, P))}{\det_{2,2}((\alpha \otimes \rho)(x_1 - 1))} \in \mathbb{C}(t).$$

Cette définition n'est valable que si ρ est telle que la matrice $(\alpha \otimes \rho)(x_1 - 1)$ est inversible. Sinon on ne peut pas définir le polynôme d'Alexander tordu.

Mentionnons enfin une application de cette famille de polynômes : à l'image du résultat dû à Seifert (cf [Cro04]) qui minore le genre d'un nœud par la moitié de l'écart de degrés entre les termes de plus haut et plus bas degré dans le polynôme d'Alexander du nœud, Mc Mullen a découvert des raffinements de cette inégalité en utilisant les polynômes d'Alexander tordus.

3 Perspectives : les invariants quantiques et les invariants L^2

3.1 Polynôme de Jones colorié, torsion L^2 et conjecture du volume

Parmi les invariants de nœuds, on peut distinguer la classe des invariants classiques (comme la plupart de ceux découverts au début du vingtième siècle), celle des invariants quantiques (dont l'exemple type sont les polynômes de Jones coloriés, une généralisation du polynôme de Jones) et celle des invariants L^2 (qui utilisent une nouvelle structure de module sur des objets classiques, ce module étant pris sur une certaine algèbre d'opérateurs).

La torsion L^2 est un de ces derniers invariants. Elle est une variante de la torsion de Reidemeister pour des opérateurs à spectre continu. C'est un invariant très intéressant, dans le sens où il « complète » le polynôme d'Alexander : Lück a montré qu'un nœud est trivial si et seulement si son polynôme d'Alexander et sa torsion L^2 le sont. La torsion L^2 est difficile à calculer en pratique, excepté quand on sait qu'elle est triviale (pour certaines classes de variétés) ou qu'on étudie la torsion d'une variété hyperbolique, auquel cas elle vaut le volume hyperbolique correspondant (à une constante près), ce résultat remarquable étant dû à Lück et Schick. Le volume hyperbolique est un invariant classique, ce résultat nous donne donc un lien entre deux classes d'invariants !

D'autre part, la conjecture du volume (due à Kashaev et Murakami-Murakami) relie ce même volume hyperbolique aux invariants quantiques. On soupçonne donc que les invariants L^2 ont des liens forts avec les invariants quantiques. Durant ma thèse j'étudierai les invariants L^2 , qui touchent ainsi à plusieurs domaines de la théorie des nœuds, à mi-chemin entre les invariants quantiques et classiques.

3.2 L'invariant d'Alexander L^2

L'invariant d'Alexander L^2 est un invariant L^2 auquel je m'intéresserai particulièrement durant ma thèse. Il a été découvert par Li et Zhang, et peut être défini dans le même esprit que les polynômes d'Alexander tordus, à l'aide du calcul des matrices de Fox, excepté que les coefficients de la matrice considérée sont des opérateurs sur $l^2(\Gamma_K)$ (où Γ_K est le groupe du nœud) et qu'on ne peut plus utiliser des déterminants usuels, qui sont remplacés par des *déterminants de Fuglede-Kadison*, une généralisation de la notion de déterminant d'un opérateur, quand l'opérateur a un spectre continu.

Cet invariant est une fonction de t , et il est connu que sa valeur en 1 est la torsion L^2 , donc le volume hyperbolique à un coefficient près.

Un des objectifs de ma thèse sera de mieux comprendre cet invariant (quelle est sa nature ? par exemple, est-ce une fonction continue ?), de trouver des méthodes de calcul pour certaines familles de nœuds, et de le relier à d'autres invariants, notamment classiques.

Références

- [Bla] C. Blanchet. Notes de cours "nœuds, tresses et théories d'homologie". <http://www.math.jussieu.fr/~blanchet/enseignement/>.
- [Cro04] P. Cromwell. *Knots and Links*. Cambridge University Press, 2004.
- [Jon91] V. Jones. *Subfactors and Knots*. American Mathematical Society, 1991.
- [Kaw90] A. Kawauchi. *A Survey of Knot Theory*. Birkhäuser, 1990.