ENTROPIE TOPOLOGIQUE

Exposé de maîtrise de Pierre Berger et Emmanuel Chemla.
Sujet proposé par Giuseppe Longo.

Table des matières

1. Introduction

1.1. Notations et cadre général.

Dans tout cet exposé, sauf mention explicite du contraire, X désigne un espace métrique compact non vide et T une application continue de X dans X. Tous les recouvrements seront finis et ouverts.

1.2. Idées directrices.

L'objectif de cet exposé est l'introduction et l'étude d'une grandeur mathématique : l'entropie topologique d'une fonction d'un compact dans lui-même. Cette grandeur, naturellement invariante par homéomorphisme, se révelera être une source importante de renseignements pour l'action de la fonction étudiée sur la topologie de l'espace.

Nous introduirons plusieurs définitions équivalentes et chacune révèlera un nouvel aspect de l'entropie topologique.

Ainsi, dans une première approche, nous allons relier l'ensemble des recouvrements de l'espace avec la fonction pour en tirer l'entropie. Il apparaîtra alors comment l'entropie est naturellement reliée à l'action de la fonction sur les ouverts de l'espace. Cette approche sera rapidement affinée, pour les calculs notamment, par la

mise en évidence de recouvrements particuliers qui seuls contiendront tous les renseignements. Dès lors, nous pourrons vérifier l'invariance par homéomorphisme de l'entropie qui sans cela ne pourrait être dite topologique.
Une deuxième approche mettra en jeu de nouveaux outils : des ensembles finis de points cette fois, dits "couvrants" ou "séparés" ; ils permettront deux nouvelles approches de l'entropie et mettront plus facilement en évidence le lien étroit entre entropie et dilatation ou rétraction de l'espace. En utilisant ces nouvelles définitions complémentaires simultanément, nous pourrons obtenir des résultats théoriques ou pratiques par un travail simple sur des inégalités, généralement plus faciles à manier que les égalités.
La dernière partie de l'exposé sera alors consacrée à l'étude d'exemples dans un cadre plus restreint. En utilisant les différentes méthodes exposées jusqu'alors et via des outils algébriques, nous pourrons ainsi approfondir le cas de matrices associées à des réseaux connexes. Dans un dernier résultat, nous relierons l'entropie d'une fonction au nombre de points fixes des itérées de T, donnée intuitivement caractéristique du désordre imposé par une fonction (si le nombre de points fixes est important, c'est a priori que la fonction "dérange" peu l'espace et sa topologie).

2. Définitions et premiers exemples

Nous introduisons dans ce chapitre les premières définitions de l'entropie topologique.
Ainsi, à partir de l'entropie topologique d'un recouvrement et de quelques notions simples sur les recouvrements, nous pourrons définir l'entropie topologique d'une application continue $T : X \longrightarrow X$.

2.1. **Première approche.**

Définitions 2.1. *On appelle* recouvrement ouvert fini de X *ou plus simplement* recouvrement de X *tout ensemble fini d'ouverts de X dont la réunion est X.*
Si α est un recouvrement de X, on appelle sous-recouvrement de α *tout sous-ensemble β de α qui est encore un recouvrement. On notera alors $\beta \subset \alpha$.*
Si α est un recouvrement de X et $T : X \longrightarrow X$ une application continue on note, pour tout $i \in \mathbb{N}$, $T^{-i}\alpha$ l'ensemble $\{T^{-i}(A) : A \in \alpha\}$ qui est encore un recouvrement.

Remarque 2.2. Si l'ensemble vide peut apparaître dans la définition d'un recouvrement, on fera attention à ne pas le considérer comme un élément effectif du recouvrement.

Définitions 2.3. *Si $\alpha = \{A_i\}$ et $\beta = \{B_j\}$ sont des recouvrements finis de X, on définit le* rafinement *de α et β comme étant le recouvrement :*

$$\alpha \vee \beta = \{A_i \cap B_j : A_i \cap B_j \neq \emptyset\}.$$

Plus généralement, si $\alpha^r = \{A_1^r, ..., A_{N_r}^r\}$ sont des recouvrements finis de X pour $r = 1, ..., k$, on définit leur rafinement *comme étant le recouvrement :*

$$\bigvee_{r=1}^{k} \alpha^r = \{A_{i_1}^1 \cap ... \cap A_{i_k}^k : i_j \in \{1, ..., N_r\}, j = 1, ..., k\}.$$

On peut ainsi définir pour T continue et pour tout $k \in \mathbb{N}$, les recouvrements

$$\bigvee_{i=0}^{k-1} T^{-i}\alpha = \alpha \vee T^{-1}\alpha \vee ... \vee T^{-k-1}\alpha.$$

Nous pouvons maintenant introduire une notion plus nouvelle :

Définition 2.4. *L'*entropie topologique *d'un recouvrement $\alpha = \{A_1, ..., A_N\}$ est*

$$H(\alpha) = \log N(\alpha)$$

où $N(\alpha)$ est le plus petit entier n tel qu'il existe un sous-recouvrement de α de cardinal n.

Cette toute première définition permet déjà d'entrevoir comment l'entropie topologique se rattache à un "contenu informatif" pour un recouvrement.
Voyons alors les propriétés de base qui découlent immédiatement de cette définition :

Proposition 2.5. *(i) $H(\alpha) \geq 0$.*
(ii) Pour tout sous-recouvrement $\beta \subset \alpha$, $H(\alpha) \leq H(\beta)$.
(iii) Si α et β sont deux recouvrements finis de X, alors $H(\alpha \vee \beta) \leq H(\alpha) + H(\beta)$.
(iv) Pour toute application T continue, $H(\alpha) \geq H(T^{-1}\alpha)$ et il y a égalité si T est surjective.

Démonstration. (i) et (ii) sont des conséquences directes de la définition et de la croissance du logarithme.
(iii) On note α' (resp. β') un sous-recouvrement de α (resp. de β) de cardinal minimal $N(\alpha)$ (resp. $N(\beta)$). Alors $\alpha' \vee \beta'$ est un sous-recouvrement de $\alpha \vee \beta$ de cardinal au plus $N(\alpha) \times N(\beta)$. On en déduit le résultat, en notant l'importance du logarithme dans la définition.
(iv) Soit α' un sous-recouvrement de α de cardinal minimal n. Alors $T^{-1}\alpha'$ est un sous-recouvrement de $T^{-1}\alpha$ de cardinal au plus égal à n. On en déduit $N(T^{-1}\alpha) \leq n = N(\alpha)$ et la même inégalité sur leurs logarithmes.
Supposons alors T surjective et notons $\{T^{-1}A_1, ..., T^{-1}A_m\}$ un sous-recouvrement de $T^{-1}\alpha$. Alors $\{A_1, ..., A_m\}$ est un sous-recouvrement de α car si $y \in X$, y a au moins un antécédent par T que l'on note x, et alors on a i_0 tel que $x \in T^{-1}A_{i_0}$ et à l'évidence $y \in A_{i_0}$. □
On peut alors franchir une étape supplémentaire avec la définition suivante :

Définition 2.6. *Par définition, l'*entropie topologique d'une application T relativement à un recouvrement α *est :* $h(T, \alpha) = \limsup_{n \longrightarrow \infty} \frac{1}{n} H(\bigvee_{i=0}^{n-1} T^{-i}\alpha)$.

Remarque 2.7. La chaîne d'inégalités

$$H(\bigvee_{i=0}^{n-1} T^{-i}\alpha) \leq \sum_{i=0}^{n-1} H(T^{-i}\alpha) \leq nH(\alpha)$$

garantit que $h(T, \alpha) \leq H(\alpha) < \infty$.

Remarque 2.8. La lim sup de la définition peut être remplacée par une lim car en notant $a_n = H(\bigvee_{i=0}^{n-1} T^{-i}\alpha)$, on obtient facilement que $a_{n+m} \leq a_n + a_m$ et cette sous-additivité garantit que $\frac{a_n}{n} \longrightarrow \inf\{\frac{a_n}{n} : n \geq 1\}$.

Définition 2.9. *On définit alors l'*entropie topologique d'une application T *par* $h(T) = \sup\{h(T,\alpha) : \alpha$ *recouvrement de* $X\}$.

Exemple 2.10. Nous pouvons tout de suite prendre un exemple simple : celui de l'identité. On remarque tout d'abord que pour tout recouvrement α et tout entier i, $id^{-i}\alpha = \alpha$. On en déduit que $\alpha \subset \bigvee_{i=0}^{n-1} id^{-i}\alpha$ et donc par la proposition 2.5 pour tout entier n, $H(\bigvee_{i=0}^{n-1} id^{-i}\alpha) \leq H(\alpha)$ et donc que $h(id,\alpha) = 0$ et finalement que $h(id) = 0$.
Ce premier résultat peut aussi s'énoncer ainsi : "Une fonction qui ne change rien a une entropie nulle."

2.2. **Un outil de calcul pratique.**

Nous avons introduit la définition de l'entropie topologique d'une application T mais celle-ci ne permet que rarement un calcul explicite. Dans cette partie, nous allons voir comment s'affranchir de quelques étapes.

Définitions 2.11. *Un recouvrement* α *est appelé un* générateur *pour un homéomorphisme* T *si* $\forall \epsilon > 0, \exists N > 0$ *tel que le recouvrement* $\bigvee_{n=-N}^{N} T^{-n}\alpha$ *est formé d'ensembles de diamètre au plus* ϵ.
Un recouvrement α *est appelé un* générateur (fort) *pour une application continue* T *si* $\forall \epsilon > 0, \exists N > 0$ *tel que le recouvrement* $\bigvee_{n=0}^{N} T^{-n}\alpha$ *est formé d'ensembles de diamètre au plus* ϵ.

Cela nous fournit la possibilité de calcul suivant :

Proposition 2.12. *Si* α *est un générateur (fort si* T *n'est pas un homéomorphisme) pour* T*, alors* $h(T,\alpha) = h(T)$.

Démonstration dans le cas d'un générateur fort. Soit β un recouvrement de X. Soit δ le nombre de Lebesgue de β i.e. toute boule de diamètre δ est contenu dans un élément de β. Pour N suffisamment grand, $\forall A \in \bigvee_{n=0}^{N-1} T^{-n}\alpha$, $\exists B \in \beta$ avec $A \subset B$ car A est un générateur. On en déduit :

$$N(\bigvee_{i=0}^{k-1} T^{-i}(\bigvee_{n=0}^{N-1} T^{-n}\alpha)) \geq N(\bigvee_{i=0}^{k-1} T^{-i}\beta) \text{ pour } k \geq 1.$$

Mais alors, comme $h(T,\alpha) = h(T, \bigvee_{n=0}^{N} T^{-n}\alpha)$, on obtient que $h(T,\alpha) \geq h(T,\beta)$ et donc par définition, $h(T,\alpha) = h(T)$. $\square$

Exemple 2.13. Cet exemple montre que l'entropie d'une application peut être très simple à obtenir une fois démontré qu'un recouvrement est générateur.
Soit $X = \prod_{n\in\mathbb{Z}}\{1,...,k\}$ avec $k \geq 2$ et $\sigma : X \longrightarrow X$ telle que $(\sigma x)_n = x_{n+1}$. On munit X d'une distance telle que : X est compact, σ est un homéomorphisme, les ensembles $[i]_0 = \{x : x_0 = i\}$ pour $i = 1,...,k$ sont ouverts et le recouvrement $\alpha = \{[1]_0,...,[k]_0\}$ est générateur. Tout ceci sera détaillé dans la dernière partie de cet exposé pour des besoins plus généraux (proposition 4.9).
On remarque alors que pour tout N, $\bigvee_{n=0}^{N} \sigma^{-n}\alpha$ est constitué de k^{N+1} ensembles disjoints. On en déduit alors que $h(T) = \log k$.

2.3. **Entropie et conjugaison, invariance par homéomorphisme.**

Lorsque deux applications sont "proches" (terme qui reste à définir), il est naturel d'essayer de relier leurs entropies topologiques et c'est ce que nous allons faire dans cette partie.

Définitions 2.14. *Soient $T_1 : X_1 \longrightarrow X_1$ et $T_2 : X_2 \longrightarrow X_2$ deux applications continues. On dira que T_1 est* semi-conjuguée *à T_2 s'il existe une application continue surjective $f : X_1 \longrightarrow X_2$ telle que $f \circ T_1 = T_2 \circ f$.*
On dira que T_1 et T_2 sont conjuguées *si chacune est semi-conjuguée à l'autre ce qui est équivalent à avoir f comme précédemment qui est en plus un homéomorphisme.*

Proposition 2.15. *Si T_1 est semi-conjuguée à T_2, alors $h(T_1) \geq h(T_2)$. Si T_1 et T_2 sont conjugués, alors $h(T_1) = h(T_2)$.*

Démonstration. Soit α un recouvrement de X_2. Alors pour tout $n \geq 1$,

$$\begin{aligned} H(\bigvee_{i=0}^{n-1} T_2^{-i}\alpha) &= H(f^{-1}(\bigvee_{i=0}^{n-1} T_2^{-i}\alpha)) \text{ (proposition 2.5)} \\ &= H(\bigvee_{i=0}^{n-1} (f^{-1}T_2^{-i}\alpha)) \\ &= H(\bigvee_{i=0}^{n-1} T_1^{-i}(f^{-1}\alpha)) \end{aligned}$$

On en déduit notamment que $h(T_2, \alpha) = h(T_1, f^{-1}\alpha)$. Puis l'on a :

$$\begin{aligned} h(T_2) &= \sup_{\alpha}\{h(T_2, \alpha)\} \\ &= \sup_{f^{-1}\alpha}\{h(T_1, f^{-1}\alpha)\} \\ &\leq \sup_{\beta}\{h(T_1, \beta)\} \\ &= h(T_1) \end{aligned}$$

Le cas où les deux applications sont conjuguées découle immédiatement du précédent par double inégalité. □
On a donc obtenu le résultat fondamental suivant : l'entropie topologique est invariante par homéomorphisme.

3. Définitions équivalentes et appplications

3.1. Ensembles (n, ϵ)-séparés et (n, ϵ)-couvrants.

Définitions 3.1. *On note encore T une application continue de X dans X.*
(i) Pour $n \geq 1$ et $\epsilon > 0$, on appelle ensemble (n, ϵ)-séparé toute partie finie $S \subset X$ telle que pour toute paire de points distincts x et y de S, on peut trouver $i \in \{0, ..., n-1\}$ tel que $d(T^i x, T^i y) \geq \epsilon$.
Soit $s_T(n, \epsilon) \in \mathbb{N}$ (ou quand il n'y a pas d'ambiguïté $s(n, \epsilon)$) le cardinal maximal de tout ensemble (n, ϵ)-séparé.
(ii) Pour $n \geq 1$ et $\epsilon > 0$, on appelle ensemble (n, ϵ)-couvrant toute partie finie $R \subset X$ telle que $\forall x \in X$, $\exists y \in R$ tel que $d(T^i x, T^i y) < \epsilon$ pour tout $i \in \{0, ..., n-1\}$.
Soit $r_T(n, \epsilon) \in \mathbb{N}$ (ou plus simplement $r(n, \epsilon)$) le cardinal minimal de tout ensemble (n, ϵ)-couvrant.

Remarque 3.2. Par compacité $s(n,\epsilon)$ est fini car on peut construire pour tout $i \geq 0$ un recouvrement fini α_i de X par des ensembles du types $\{x : d(T^i x, T^i x_0) < \epsilon\}$ et le cardinal du rafinement des n premiers tels recouvrements est un majorant pour $s(n,\epsilon)$.

Notation 3.3. Par commodité, pour $x \in X$, $n \geq 1$ et $\epsilon > 0$, on pose :

$$D(x,n,\epsilon) = \{y \in X : d(T^i x, T^i y) < \epsilon \text{ pour } i = 0, ..., n-1\}.$$

Voyons alors quelques propriétés simples de ces quantités qui nous permettrons de donner une définition équivalente de la topologie entropique.

Proposition 3.4. *(i) Pour $n \geq 1$ et $\epsilon > \epsilon'$, $s(n,\epsilon') \geq s(n,\epsilon)$ et $r(n,\epsilon') \geq r(n,\epsilon)$.*
(ii) Pour $\epsilon > 0$ et $n \geq 1$, $r(n,\epsilon) \leq s(n,\epsilon)$ et $s(n,2\epsilon) \leq r(n,\epsilon)$.

Démonstration. (i) est une conséquence directe des définitions.
(ii) On remarque que si S est un ensemble (n,ϵ)-séparé de cardinal maximal, S est aussi un ensemble (n,ϵ)-couvrant d'où effectivement $r(n,\epsilon) \leq s(n,\epsilon)$.
Pour la deuxième inégalité, on considère R un ensemble (n,ϵ)-couvrant de cardinal minimal $r(n,\epsilon)$. On a alors un recouvrement $X = \bigcup_{x \in \mathbb{R}} D(x,n,\epsilon)$, $i = 0, ..., n-1\}$. Pour S un ensemble $(n,2\epsilon)$-séparé, pour tout $y \in S$, on peut choisir des ouverts $D(x,n,\epsilon) \ni y$ avec $x \in R$. Les x ainsi choisis sont nécessairement distincts car si y et y' sont dans un même $D(x,n,\epsilon)$ avec $x \in R$, on a :

$$d(T^i y, T^i y') \leq d(T^i y, T^i x) + d(T^i x, T^i y') < 2\epsilon$$

ce qui implique $y = y'$. On en déduit immédiatemment que $card(S) \leq r(n,\epsilon)$ pour tout ensemble S de ce type et donc $s(n,2\epsilon) \leq r(n,\epsilon)$. $\square$
Ces quantités semblent plus faciles à manipuler que $N(\bigvee_{i=0}^{n-1} T^{-i}\alpha)$ par exemple. Nous pouvons toutefois relier les deux :

Proposition 3.5. *(i) Pour tout recouvrement α de nombre de Lebesgue δ,*

$$N(\bigvee_{i=0}^{n-1} T^{-i}\alpha) \leq r(n,\delta) \textit{ pour tout } n \geq 1.$$

(ii) Pour $\epsilon > 0$ et tout recouvrement $\gamma = \{B_1, ..., B_k\}$ tel que

$$\max_{1 \leq i \leq k} diam(B_i) < \epsilon, \textit{ on a : } s(n,\epsilon) \leq N(\bigvee_{i=0}^{n-1} T^{-i}\gamma).$$

Démonstration. (i) Soit $n \geq 1$ et R un ensemble (n,δ)-couvrant de cardinal maximal $r(n,\delta)$. On a alors $X = \bigcup_{x \in \mathbb{R}} D(x,n,\delta)$. On fixe alors $x \in R$ et on note A_{i_j} pour $j = 0, ..., n-1$ un élément de α tel que $B(T^j x, \delta) \subset A_{i_j}$. On obtient que $D(x,n,\delta) \subset \mathcal{A}_{i_0} \cap T^{-1}A_{i_1} \cap ... \cap T^{-(n-1)}A_{i_{n-1}}$ et donc que les $D(x,n,\delta)$ forment un sous recouvrement de $\bigvee_{i=0}^{n-1} T^{-i}\alpha$ et finalement que $N(\bigvee_{i=0}^{n-1} T^{-i}\alpha) \leq r(n,\epsilon)$.
(ii) Soit $n \geq 1$ et S un ensemble (n,ϵ)-séparé de cardinal minimal $s(n,\epsilon)$. Les points x de S appartiennent à des éléments distincts de $\bigvee_{i=0}^{n-1} T^{-i}\gamma$. En effet, deux points du même élément de $\bigvee_{i=0}^{n-1} T^{-i}\gamma$ appartiennent à un élément de la forme $B_{i0} \cap ... \cap T^{-(n-1)}B_{in-1}$ et donc pour tout $r = 0, ..., n-1$, $d(T^r x, T^r y) < \epsilon$ par hypothèse. En particulier, $s(n,\epsilon) \leq N(\bigvee_{i=0}^{n-1} T^{-i}\gamma)$. $\square$

On peut alors énoncer les caractérisations suivantes de la topologie entropique d'une application continue $T : X \longrightarrow X$:

Proposition 3.6. *On a les deux calculs suivants :*
$h(T) = \lim_{\epsilon \longrightarrow 0} \limsup_{n \longrightarrow \infty} \frac{1}{n} \log r(n,\epsilon)$ *et*
$h(T) = \lim_{\epsilon \longrightarrow 0} \limsup_{n \longrightarrow \infty} \frac{1}{n} \log s(n,\epsilon)$

Démonstration. On obtient tout simplement que les deux expressions sont identiques à partir de la proposition 3.4(i).
On choisit alors $\eta > 0$ et α un recouvrement tel que $h(T) - \eta \leq h(T,\alpha) \leq h(T)$. On note δ le nombre de Lebesgue du recouvrement α et on peut alors écrire :

$$\begin{aligned} \lim_{\epsilon \longrightarrow 0} \limsup_{n \longrightarrow \infty} \frac{1}{n} \log r(n,\epsilon) &\geq \limsup_{n \longrightarrow \infty} \frac{1}{n} \log r(n,\delta) \\ &\geq \limsup_{n \longrightarrow \infty} \frac{1}{n} \log N(\bigvee_{i=0}^{n-1} T^{-i}\alpha) \text{ (proposition 3.5(i))} \\ &= h(T,\alpha) \geq h(T) - \eta \end{aligned}$$

Ceci étant valable pour tout $\eta > 0$, il reste à établir l'inégalité inverse. On choisit pour cela $\epsilon > 0$ et un recouvrement $\beta = \{B_1, ..., B_k\}$ avec les B_i tous de diamètre plus petit que ϵ. On peut alors écrire :

$$\begin{aligned} \limsup_{n \longrightarrow \infty} \frac{1}{n} \log s(n,\epsilon) &\leq \limsup_{n \longrightarrow \infty} \frac{1}{n} \log N(\bigvee_{i=0}^{n-1} T^{-i}\beta) \text{ (proposition 3.5(ii))} \\ &\leq h(T,\beta) \leq h(T) \end{aligned}$$

Il ne reste alors qu'à faire tendre ϵ vers 0 pour obtenir l'inégalité manquante. $\square$
Nous avons ici obtenu une définition qui va avoir des conséquences non triviales à partir de la définition initiale seule.

3.2. **Application : le théorème d'Abramov.**

Il semble naturel de chercher à relier l'entropie topologique d'une application à celles de ses itérées et nous pouvons désormais le faire simplement :

Théorème 3.7. (*Théorème d'Abramov*) *Pour tout* $m \geq 1$, *on a* $h(T^m) = mh(T)$.

Démonstration séduisante mais fausse... Pour procéder par double inégalité, on aimerait avoir les deux résultats suivants :

$$s_{T^m}(n,\epsilon) \geq s_T(nm,\epsilon) \text{ et } r_{T^m}(n,\epsilon) \leq r_T(nm,\epsilon).$$

Malheureusement la première inégalité est en sens inverse et les deux définitions mènent à la même inégalité.
En effet, si S est (n,ϵ)-séparé pour T^m de cardinal $s_{T^m}(n,\epsilon)$ alors pour tout x et x' deux points distincts de S, on peut trouver $i \in \{0, ..., n-1\}$ tel que $d(T^{mi}x, T^{mi}x') \geq \epsilon$. Notamment, S est (nm,ϵ)-séparé pour T et $s_{T^m}(n,\epsilon) \leq s_T(nm,\epsilon)$.
De la même façon, on prouve que si R est (nm,ϵ)-couvrant pour T de cardinal minimal, R est aussi un (n,ϵ)-couvrant pour T^m et donc $r_{T^m}(n,\epsilon) \leq r_T(nm,\epsilon)$.

On peut alors écrire :

$$\begin{aligned} mh(T) &= \lim_{\epsilon \longrightarrow 0} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} r_T(nm, \epsilon) \\ &\geq \lim_{\epsilon \longrightarrow 0} \lim_{n \longrightarrow \infty} \frac{1}{n} r_{T^m}(n, \epsilon) = h(T^m) \\ \text{ou} & \\ mh(T) &= \lim_{\epsilon \longrightarrow 0} \lim_{n \longrightarrow \infty} \frac{1}{n} s_T(nm, \epsilon) \\ &\geq \lim_{\epsilon \longrightarrow 0} \lim_{n \longrightarrow \infty} \frac{1}{n} s_{T^m}(n, \epsilon) = h(T^m) \end{aligned}$$

Il reste à établir la deuxième inégalité. Pour cela on procède en deux étapes. Pour tout recouvrement α, on a :

$$\begin{aligned} h(T^m, \bigvee_{i=0}^{m-1} T^{-i}\alpha) &= \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{k} H(\bigvee_{j=0}^{k-1} T^{-mj}(\bigvee_{i=0}^{m-1} T^{-i}\alpha)) \\ &= \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{m}{mk} H(\bigvee_{j=0}^{km-1} T^{-i}\alpha) \text{ calcul du recouvrement} \\ &= mh(T, \alpha) \end{aligned}$$

On procède alors comme à la proposition 2.15 :

$$\begin{aligned} mh(T) &= m \sup_{\alpha}\{h(T, \alpha)\} = \sup_{\alpha}\{h(T^m, \bigvee_{i=0}^{m-1} T^{-i}\alpha)\} \\ &\leq \sup_{\beta}\{h(T^m, \beta)\} = h(T^m) \end{aligned}$$

Le théorème est alors obtenu. Merci à Yves Benoist pour son aide à l'établissement de cette deuxième inégalité. $\square$

3.3. **Exemples de calcul.**

Après ce premier exemple de résultat théorique obtenu grâce à cette nouvelle caractérisation, on peut passer à des exemples pratiques.

Exemple 3.8. Rotations dans $\mathbb{S}^1$.
On considère ici $X = \mathbb{S}^1 \approx \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ et $T : x \longmapsto x + \alpha \pmod 1$.
Pour $\epsilon > 0$ on peut choisir un recouvrement de $[0, 1]$ de la forme

$$\{]x_i - \epsilon, x_i + \epsilon[: x_i \in [0, 1], i = 1, ..., N\}$$

Alors, pour tout $n \geq 1$, $R = \{x_1, ..., x_N\}$ est (n, ϵ)-couvrant. En effet, pour tout $x \in [0, 1]$, on peut trouver i tel que $x \in]x_i - \epsilon, x_i + \epsilon[$ et il est clair que pour tout $r \in \mathbb{N}$, $d(T^r x_i, T^r x) = d(x_i, x) < \epsilon$. Notamment, $r(n, \epsilon) \leq N$. On peut alors écrire :

$$\begin{aligned} 0 \leq h(T) &= \lim_{\epsilon \longrightarrow 0} (\limsup_{n \longrightarrow \infty} \frac{1}{n} \log r(n, \epsilon)) \\ &\leq \lim_{\epsilon \longrightarrow 0} (\limsup_{n \longrightarrow \infty} \frac{1}{n} \log N) = 0 \end{aligned}$$

D'où $h(T) = 0$. $\square$
Cette preuve marche en fait pour toute isométrie d'espace compact et l'interprétation en est simple : "Toute fonction qui ne dilate ni ne rétracte a une entropie nulle."

Exemple 3.9. La fonction "double".
Sur le même espace $X = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ on considère cette fois l'application continue suivante : $T : x \longmapsto 2x \mod 1$.
On définit alors pour tout $k \geq 1$, $F_k = \{\frac{m}{2^k} : m = 0, ..., 2^k - 1\}$, ensemble de cardinal 2^k. Pour $\epsilon > 0$, on choisit k tel que $\frac{1}{2^k} \leq \epsilon < \frac{1}{2^{k-1}}$.
Pour $n \geq 2$, F_{n+k-2} est (n, ϵ)-séparé : pour deux points distincts $\frac{m_1}{2^{n+k-2}}$ et $\frac{m_2}{2^{n+k-2}}$ de F_{n+k-2}, $d(T^i \frac{m_1}{2^{n+k-2}}, T^i \frac{m_2}{2^{n+k-2}}) \geq \frac{1}{2^{k+n-2-i}}$ pour $i = 0, ..., n-1$. Notamment, $s(n, \epsilon) \geq 2^{k+n-2}$.
Pour $n \geq 2$, F_{n+k-1} est (n, ϵ)-couvrant : pour tout $x \in X$ on peut choisir $\frac{m}{2^{k+n-1}} \in F_{n+k-1}$ avec $d(x, \frac{m}{2^{k+n-1}}) < \frac{1}{2^{k+n-1}}$. Il est alors clair que pour $r = 0, ..., n-1$, $d(T^r x, T^r \frac{m}{2^{k+n-1}}) < \frac{2^r}{2^{k+n-1}} < \epsilon$. Notamment, $r(n, \epsilon) \leq 2^{k+n-1}$.
Ces deux résultats permettent d'écrire :

$$\log 2 \leq \lim_{\epsilon \longrightarrow 0} \limsup_{n \longrightarrow \infty} \frac{1}{n} \log s(n, \epsilon) = h(T) = \lim_{\epsilon \longrightarrow 0} \limsup_{n \longrightarrow \infty} \frac{1}{n} \log r(n, \epsilon) \leq \log 2$$

d'où $h(T) = \log 2$.
Ce résultat se généralise sans difficulté à toute fonction de multiplication par des entiers (le théorème d'Abramov donne d'ailleurs immédiatement le résultat pour toute puissance de 2) et montre comment la dilatation de l'espace se traduit en terme d'entropie.

4. Cas de l'intervalle $[0, 1]$

Nous allons étudier plus systématiquement ici les notions introduites dans le cas particulier de $X = [0, 1]$. Pour mettre ceci en évidence, nous noterons ici I plutôt que X.

4.1. **Entropie et intervalles de monotonie.**

Dans cette partie, on cherche à relier l'entropie d'une fonction avec le taux de croissance du nombre d'intervalles de monotonie des itérées de T.

Définition 4.1. *On note $\mathcal{M}(T)$ le nombre d'intervalles de monotonie de T (i.e. le nombre d'intervalles maximaux disjoints $I_1, ..., I_k$ tels que les restictions de T à chacun des I_i soient strictement monotones).*

Proposition 4.2. *Pour deux fonctions continues S_1 et S_2 de I dans I,*

$$\mathcal{M}(S_1 \circ S_2) \leq \mathcal{M}(S_1)\mathcal{M}(S_2).$$

En particulier :
$\mathcal{M}(T^{n+m}) \leq \mathcal{M}(T^n)\mathcal{M}(T^m)$ pour tout n et m entiers ≥ 1. Notamment, $(\log \mathcal{M}(T^n))_{n \in \mathbb{N}}$ est sous-additive et $\frac{1}{n} \log \mathcal{M}(T^n)$ converge (vers $\inf\{\frac{1}{n} \log \mathcal{M}(T^n)\}$).

Démonstration. Si $\{I_i^1\}_{i=0,...,n}$ et $\{I_i^2\}_{i=0,...,m}$ sont des intervalles de monotonie disjoints de S_1 et S_2 respectivement. Les intervalles de la forme $I_j^2 \cap S_2^{-1}(I_i^1)$ sont des intervalles de monotonie pour $S_1 \circ S_2$. On en déduit que :

$$\mathcal{M}(S_1 \circ S_2) \leq Card\{(i, j) : I_j^2 \cap S_2^{-1}(I_i^1) \neq \emptyset\} \leq \mathcal{M}(S_1)\mathcal{M}(S_2).$$

□

On obtient alors encore un nouveau calcul possible pour l'entropie :

Théorème 4.3. *Si $\mathcal{M}(T) < \infty$, $h(T) = \lim_{n \longrightarrow \infty} \frac{1}{n} \log \mathcal{M}(T^n)$.*

Démonstration. Pour tout $n \geq 1$, soit $E_n = \{x_1, ..., x_N\}$ un ensemble maximal (n,ϵ)-séparé pour T (i.e. $N = s(n,\epsilon)$). Par définition, pour tout $i = 1, ..., N$, il existe $r_i \in \{0, ..., n-1\}$ tel que $|T^{r_i}(x_i) - T^{r_i}(x_{i+1})| > \epsilon$. En particulier, on peut choisir $r \in \{0, ..., n-1\}$ tel que $|T^r(x_{i_j}) - T^r(x_{i_j+1})| > \epsilon$ pour un sous ensemble $\{x_{i_0} < x_{i_1} < ... < x_{i_{p-1}}\} \subset E_n$ de cardinal $p \geq \frac{N}{n}$. Si on pose alors $C = \sup_{x\in I} |T(x)|$, on obtient que T^r a au moins $\frac{p\epsilon}{C}$ intervalles de monotonie,i.e. $\mathcal{M}(T^r) \geq \frac{p\epsilon}{C} \geq \frac{N\epsilon}{Cn}$. Puis :

$$\begin{aligned}
\lim_{n\longrightarrow\infty} \frac{1}{n}\log \mathcal{M}(T^n) &\geq \lim_{n\longrightarrow\infty} \frac{1}{n}\log s(n,\epsilon) - (\log C + \log n - \log\epsilon) \\
&= \lim_{n\longrightarrow\infty} \frac{1}{n}\log s(n,\epsilon) = h(T)
\end{aligned}$$

Nous allons maintenant établir l'inégalité inverse. On fixe $p \geq 1$ et on pose $S = T^p$ pour simplifier l'écriture.

Lemme 4.4. $\lim_{k\longrightarrow\infty} \frac{1}{k}\log \mathcal{M}(S^k) = p(\lim_{n\longrightarrow\infty} \frac{1}{n}\log \mathcal{M}(T^n))$

Preuve du lemme. On procède par double inégalité :

$$\begin{aligned}
p(\lim_{n\longrightarrow\infty} \frac{1}{n}\log \mathcal{M}(T^n)) &= p(\limsup_{n\geq 1} \frac{1}{n}\log \mathcal{M}(T^n)) \\
&= \limsup_{n\geq 1} \frac{1}{n}\log (\mathcal{M}(T^n))^p \\
&\geq \limsup_{k\geq 1} \frac{1}{k}\log \mathcal{M}(S^k)) \\
&= \lim_{k\longrightarrow\infty} \frac{1}{k}\log \mathcal{M}(S^k)
\end{aligned}$$

Et

$$\begin{aligned}
p(\lim_{n\longrightarrow\infty} \frac{1}{n}\log \mathcal{M}(T^n)) &\leq \lim_{n\longrightarrow\infty} \frac{p}{n}\log (\mathcal{M}(S^{[\frac{n}{p}]}))(\mathcal{M}(T^{n-[\frac{n}{p}]p}) \\
&\leq \lim_{n\longrightarrow\infty} \frac{p}{n}(\log (\mathcal{M}(S^{[\frac{n}{p}]})) + \max_{0\leq i\leq m-1} \log (\mathcal{M}(T^{n-[\frac{n}{p}]p}))) \\
&= \lim_{k\longrightarrow\infty} \frac{1}{k}\log \mathcal{M}(S^k)
\end{aligned}$$

□

Retour à la démonstration de l'inégalité manquante pour le théorème. On s'intéresse maintenant à S. On note $\{J_r\}_{r=0,...,L}$ les intervalles de monotonie de S dans l'ordre. On considère le recouvrement $\alpha = \{U_r\}_{r=1,...,L}$ avec $U_1 = int(J_1 \cup J_2)$, $U_r = int(J_{r-1} \cup J_r \cup J_{r+1})$ pour $0 < r < L$ et $U_L = int(J_{L-1} \cup J_L)$.

Pour $n \geq 1$ chaque intervalle non vide du type $J_{i_0} \cap S^{-1}J_{i_1} \cap ... \cap S^{-(n-1)}J_{i_{n-1}}$ est un intervalle de monotonie de S^n et correspond à moins de 3^n éléments du recouvrement $\bigvee_{r=0}^{n-1} S^{-r}\alpha$. Notamment, on a $\mathcal{M}(S^k) \leq 3^k H(\bigvee_{r=0}^{k-1} S^{-r}\alpha)$. On peut alors écrire :

$$\begin{aligned}
h(S) \geq h(S,\alpha) = \lim_{k\longrightarrow\infty} \frac{1}{k} H(\bigvee_{r=0}^{k-1} S^{-r}\alpha) &\geq \limsup_{k\longrightarrow\infty} \frac{1}{k}\log \mathcal{M}(S^k)/3^k \\
&= \limsup_{k\longrightarrow\infty} \frac{1}{k}\log \mathcal{M}(S^k) - \log 3
\end{aligned}$$

Enfin, on applique le théorème d'Abramov :

$$\begin{aligned} h(T) &= \frac{h(S)}{p} \geq \frac{1}{p}(\limsup_{k\longrightarrow\infty}\frac{1}{k}\log\mathcal{N}(S^k)) - \frac{\log 3}{p} \\ &= \limsup_{n\longrightarrow\infty}\frac{1}{n}\log\mathcal{N}(T^n) - \frac{\log 3}{p} \end{aligned}$$

et il ne reste plus qu'à faire tendre p vers l'infini pour obtenir l'inégalité manquante. □

4.2. **Fonctions de Markov.**
Nous allons dans ce chapitre étudier le cas particulier de fonctions dites de Markov. Pour calculer leur entropie topologique nous serons amenés à leur associer des matrices dont les valeurs propres apporteront les renseignements voulus.

4.2.1. *Cadre.* Commençons par introduire deux définitions cadrant les fonctions que nous allons étudier.

Définition 4.5. *Une fonction* de Markov *est une fonction surjective T de I dans I, continue sur I telle qu'il existe une suite finie $\{0 = x_0 < x_1 < ... < x_{k-1} < x_k = 1\}$ croissante d'éléments de $[0,1]$ telle que T est C^1 monotone sur les intérieurs de $I_i := [x_{i-1}, x_i]$ et vérifie les deux propriétés suivantes :*
(i) (Dilatance par morceaux) Il existe $\beta > 1$ tel que $\forall x \in I_i |T'x| \geq \beta$ pour tout i.
(ii) (Propriété de Markov) Si $T(intI_i) \cap intI_j \neq \emptyset$ alors $T(intI_i) \supset intI_j$ pour tout i et j.

Exemple 4.6. Il est facile de remarquer que la fonction

$$Tx = \begin{cases} 2x & \text{si } 0 \leq x \leq \frac{1}{2} \\ 2x-1 & \text{si } \frac{1}{2} < x \leq 1 \end{cases}$$

est de Markov en considérant $I_1 = [0, \frac{1}{2}]$ et $I_2 = [\frac{1}{2}, 1]$.

Définition 4.7. *On dira que T est* localement couvrante *si pour tout intervalle $J \subset I$ il existe $n \geq 1$ tel que $T^n J = I$.*

Désormais, sauf mention explicite du contraire T désignera une fonction de Markov, localement couvrante.

4.2.2. *Association de notions algèbriques.*

Définitions 4.8. (i) *La* matrice de transition *est définie par*

$$A(i,j) = \begin{cases} 1 & \text{si } T(intI_i) \supset intI_j \\ 0 & \text{si } T(intI_i) \cap intI_j = \emptyset \end{cases}$$

(ii) On peut alors définir l'espace

$$X_A^+ = \{x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \prod_{\mathbb{N}}\{1, ..., k\} : A(x_n, x_{n+1}) = 1 \text{ pour tout } n \geq 0\}$$

et la fonction décalage *$\sigma : X_A^+ \longrightarrow X_A^+$ telle que pour tout x $(\sigma x)_n = x_{n+1}$.*

Ces définitions appellent quelques remarques et propriétés qui vont notamment permettre de combler le vide laissé lors de l'étude de l'exemple 2.13. Regroupons les principales dans la proposition suivante :

Proposition 4.9. (0) *X_A^+ est non vide.*
(i) Définition de la distance sur X_A^+ : Pour x et y dans X_A^+, on pose :

$$N^+(x,y) = \min\{N \geq 0 : x_N \neq y_N\}$$

et l'on définit alors une distance en posant

$$d(x,y) = (\frac{1}{2})^{N^+(x,y)}$$

pour x et y distincts.
(ii) Avec cette distance, X_A^+ est compact.
(iii) La fonction σ est continue
(iv) Tout point x a au plus k antécédents par σ.

Démonstration. (0) On va construire un élément de X_A^+ : Pour tout i, il existe au moins un élément $j(i)$ tel que $T(intI_i) \cap intI_{j(i)} \neq \emptyset$ car par connexité et croissance stricte de T par exemple, $T(intI_i)$ est d'intérieur non vide. Ainsi, les $(k, j(k), j(j(k)), ...)$ sont des éléments de X_A^+ pour tout k.
(i) Pour vérifier qu'il s'agit d'une distance la seule difficulté se situe au niveau de l'inégalité triangulaire pour trois éléments distincts de X_A^+ x, y et z. Pour cela, on écrit que :

$$\begin{array}{rcl} (\frac{1}{2})^{N^+(x,y)} + (\frac{1}{2})^{N^+(y,z)} & \geq & (\frac{1}{2})^{\min(N^+(x,y),N^+(y,z))} \\ & \text{et que :} & \\ \min(N^+(x,y), N^+(y,z)) & \leq & N^+(x,z) \end{array}$$

car si x et z sont semblables à un même troisième y jusqu'à un rang N, ils sont aussi semblables entre eux au moins jusqu'à ce rang.
(ii) On montre que X_A^+ est séquentiellement compact : Si (x^k) est une suite d'éléments de X_A^+, on peut commencer par extraire une sous-suite encore infinie $(x^{\varphi_0(k)})$ telle que $x_0^{\varphi_0(k)}$ est constante car au moins l'une des valeurs $\{1, ..., k\}$ est prise une infinité de fois. On réitère ce procédé et on pose finalement $x = (x^{\varphi_0 \circ ... \circ \varphi_n(k)})_n$ (ces termes sont indépendants de k, i.e. de la suite choisie dans l'extraction). Il est alors clair que la suite de suites $(x^{\varphi_0(0)}, ..., x^{\varphi_0 \circ ... \circ \varphi_n(n)}, ...)$ converge vers x.
(iii) Il est en fait immédiat de constater que σ est 2-lipschitzienne et donc continue.
(iv) La seule ambiguité sur l'antécédent possible d'un élément est son terme de rang 0 qui ne peut prendre que k valeurs. □
On peut alors énoncer la proposition clé pour la suite :

Proposition 4.10. *Il existe une fonction continue π $X_A^+ \longrightarrow I$ telle que*
(i) π est surjective et $\pi \circ \sigma = T \circ \pi$ (i.e. σ est semi-conjuguée à T par π).
(ii) Les éléments de I ont exactement un ou deux antécédents dans X_A^+ par π.
(iii) L'ensemble des éléments de I qui ont deux antécédents est contenu dans l'ensemble dénombrable $\bigcup_{n \in \mathbb{Z}_+} T^{-n}\{x_0, ..., x_k\}$.
(iv) Si T est localement couvrante alors A est apériodique.

$$i.e.\ \exists n \geq 1, \forall 1 \leq i,j \leq k, A^n(i,j) > 0.$$

Démonstration. On définit $\pi : X_A^+ \longrightarrow I$ par $\pi(\omega) = \bigcap_{n=0}^{\infty} cl(T^{-n}int(I_{\omega_n}))$ (i.e., aux problèmes d'intérieur et d'adhérence près, $\pi(\omega) = x$ est tel que pour tout n, $T^n x \in I_{\omega_n}$).
Montrons tout d'abord que cette fonction est bien définie. Pour tout $N \geq 0, J_N(\omega) := \bigcap_{n=0}^{N} cl(T^{-n}int(I_{\omega_n}))$ est fermé (comme intersection finie de fermés) et non vide (par construction de X_A^+). Par ailleurs, par dilatance :

$$diam(J_N(\omega)) \leq \frac{1}{\beta} diam(J_{N-1}(\omega)) \leq ... \frac{1}{\beta^{N-1}} diam(J_1(\omega)) \leq \frac{1}{\beta^N} \longrightarrow 0$$

La suite (J_N) est donc une suite décroissante de fermés non vides de diamètre tendant vers 0. La compacité de I assure alors que l'intersection de tous ses éléments est un point.
π est continue : Soit $\epsilon > 0$ et $n \in \mathbb{N}$ tel que $\frac{1}{\beta^n} \leq \epsilon$. Si on choisit alors deux suites de X_A^+ à une distance $\leq \frac{1}{2^{n+1}}$ (i.e.les suites x et y sont égales jusqu'au rang n), $\pi(x)$ et $\pi(y)$ sont alors toutes deux dans $J_n(x)$ et donc à une distance inférieure à $diam J_n(x) \leq \frac{1}{\beta^n} \leq \epsilon$.
Vérifier alors les quatres points de la proposition n'apporte pas de réels éclaircissements. □

4.2.3. *Deux applications.*

Théorème 4.11. *Si T est une fonction localement couvrante, alors*

$$h(T) = \log \lambda_1$$

avec λ_1 la plus grande valeur propre de la matrice de transition A.

Démonstration. Première étape : $h(T) = h(\sigma)$ par double inégalité.
Etant donné que σ est semi-conjuguée à T par π, on a $h(T) \leq h(\sigma)$. Pour l'autre inégalité on procède comme pour le théorème 4.3.
Deuxième étape : $h(\sigma) = \log \lambda_1$
On considère le recouvrement $\alpha = \{[1]_0, ..., [k]_0\}$, où $[i]_0 = \{x : x_0 = i\}$ qui sont bien des ouverts pour $i = 1, ..., k$.
Vérifions ici qu'il s'agit d'un recouvrement (fortement ici) générateur. Pour cela on remarque que $\bigvee_{n=0}^{N} \sigma^{-n}\alpha = \{[i_0, ..., i_N]_0^N : i_0, ..., i_N \in \{1, ..., k\}\}$ c'est-à-dire exactement la boule de rayon $\frac{1}{2^{n+1}}$ et donc de diamètre qui tend vers 0.
En remarquant que les éléments du recouvrement $\bigvee_{n=0}^{N} \sigma^{-n}\alpha$ sont disjoints, on peut alors écrire $H(T) = \log Card(\bigvee_{n=0}^{N} \sigma^{-n}\alpha) = \log(\sum_{i,j} A^{N-1}(i,j))$.
Une réduction de Jordan donne alors :

$$D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & B_2 & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & B_l \end{pmatrix}$$

telle que $A = UDU^{-1}$ avec U inversible. D'où

$$\begin{aligned} \sum_{i,j} A^{N-1}(i,j) &= \sum_{i,j} UD^{N-1}U^{-1}(i,j) \\ &= C\lambda_1^N + E(N) \end{aligned}$$

avec : $C = \sum_{i,j} U(i,1)U^{-1}(1,j)$ et $\lim_{N \longrightarrow \infty} \frac{E|(N)|}{\lambda_1^N} = 0$. Le résultat est alors obtenu. $\square$

Remarque 4.12. L'exponentielle de l'entropie topologique est un nombre algébrique (en tant que racine du polynôme caractéristique de A).

Remarque 4.13. Ici encore apparaît la notion de dilatation

On cherche ici à relier l'entropie de T avec le nombre de points fixes des itérées de T :

Théorème 4.14. $\lim_{n \longrightarrow \infty} \frac{Card(Fix(T^n))}{\exp nh(T)} = 1$

Remarque 4.15. $Fix(T^n) := \{x : T^n x = x\}$ est fini pour tout n d'après les hypothèses sur T.

Lemme 4.16. $\lim_{n \longrightarrow \infty} \frac{Card(Fix(\sigma^n))}{\lambda_1^n} = 1$

Peuve du lemme. Un point fixe pour σ^n est une suite x telle que pour tout i, pour tout k, $x_i = x_{i+kn}$. Donc $Card(Fix(\sigma^n))$ est donné par le nombre de suites finies $\{x_0, ..., x_{n-1}\}$ telles que $A(x_0, x_1) = A(x_1, x_2) = ... = A(x_{n-2}, x_{n-1}) = A(x_{n-1}, x_0)$. On obtient donc exactement $Tr(A^n) = \lambda_1^n + ... + \lambda_k^n$ où les λ_i sont les valeurs propres de A. Le théorème de Perron-Frobenius affirme alors que A qui est apériodique admet une valeur propre positive de multiplicité 1 plus grande strictement que toutes les autres en module. Donc ici :

$$\lim_{n \longrightarrow \infty} \frac{Card(Fix(\sigma^n))}{\lambda_1^n} = \lim_{n \longrightarrow \infty} \frac{\lambda_1^n + ... + \lambda_k^n}{\lambda_1^n} = 1$$

$\square$

Démonstration du théorème. On sait que $Fix(\sigma^n)$ et $Fix(T^n)$ sont en bijection en exceptant peut-être l'ensemble fini $Fix(T^n) \cap \{x_1, ..., x_k\}$.
Donc $|Fix(T^n) - Fix(\sigma^n)| \leq k$ et

$$\begin{aligned} 1 = \lim_{n \longrightarrow \infty} \frac{Card(Fix(\sigma^n)) - k}{\exp nh(\sigma)} &\leq \liminf_{n \longrightarrow \infty} \frac{Card(Fix(T^n))}{\exp nh(T)} \\ &\leq \limsup_{n \longrightarrow \infty} \frac{Card(Fix(T^n))}{\exp nh(T)} \\ &\leq \lim_{n \longrightarrow \infty} \frac{Card(Fix(\sigma^n)) + k}{\exp nh(\sigma)} = 1 \end{aligned}$$

$\square$

5. Conclusion

Nous avons introduit dans cet exposé la notion d'entropie topologique et tenté de mettre en valeur sa richesse, notamment par la diversité des approches possibles pour cette grandeur et par des applications simples aux cas de l'intervalle $[0, 1]$.

6. Bibliographie

- Mark Pollicott et Michiko Yuri, *Dynamical Systems and Ergodic Theory*, Cambridge University Press (1998)
- David Ruelle, *Chaotic Evolution and Strange Attractors*, Cambridge University Press (1989)

– Peter Walters, *Ergodic Theory - Introductory Lectures*, Lecture Notes in Mathematics (1975)