

Circuits Électriques et Marches aléatoires

Pierre FIMA et Linda BERRAHMA

exposé proposé par Thierry BODINEAU

Table des matières

1	Interprétation	3
1.1	Les Grandeurs	3
1.1.1	Le potentiel électrique	3
1.1.2	Le courant	4
1.2	Résistance effective et Loi de Rayleigh	6
1.2.1	Interprétation en terme de probabilité de sortie	6
1.2.2	Loi de Monotonie	6
1.2.3	Notions de flux et d'énergie	6
1.2.4	Démonstration de la Loi de Monotonie	7
2	Application : le problème de récurrence de Polya	8
2.1	Formulation électrique du problème de récurrence	9
2.2	La récurrence en dimension 1 et 2	10
3	Percolation	10
3.1	Transition de phase	12
3.2	Propagation des chemins	13
3.3	Démonstration de l'hypothèse dans le cas $d = 2$	15
4	Résistance effective	17
4.1	Cas déterministe ($p = 1$) : les matériaux homogènes	17
4.2	Cas aléatoire ($0 < p < 1$) : les alliages	18
	Références	20

Introduction

La théorie des probabilités cotoie de près les sciences physiques et le sujet que nous présentons est un exemple parlant de cette interface. Il concerne en effet les relations entre l'étude de circuits électriques et celle de marches aléatoires. Nous nous attacherons, dans une première partie à relier des grandeurs physiques telles que le potentiel et le courant électrique à des probabilités, notamment celle de sortie d'un graphe pour une chaîne de Markov.

La question initiale étant de déterminer la conductivité d'un alliage, c'est-à-dire un mélange de matériaux plus ou moins conducteurs, on peut, à l'échelle de l'atome, modéliser ce milieu par un réseau aléatoire de résistances.

En introduisant la résistance effective d'un circuit, qui traduit la difficulté pour le flux électrique de le traverser, nous verrons comment des lois simples d'électricité nous permettent de simplifier l'étude des marches aléatoires. Inversement, l'étude plus fine du comportement d'un milieu aléatoire grâce à l'outil de la percolation permet de comprendre comment déterminer des caractéristiques physiques d'un alliage de métaux par des considérations probabilistes.

1 Interprétation

1.1 Les Grandeurs

De notre point de vue, un circuit est un graphe ; c'est-à-dire une collection Λ de points et, associée à toute paire de points (x, y) une résistance $R_{xy}(= R_{yx})$ - éventuellement infinie - Nous noterons son inverse C_{xy} ; ainsi que la capacité de tout point x définie par $C_x = \sum_{y \in \Lambda} C_{xy}$ (voir figure 1).

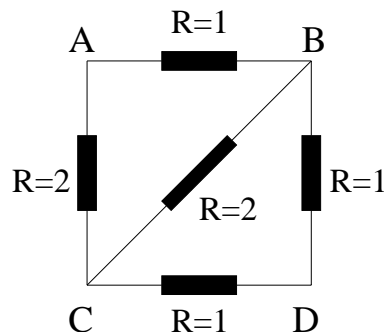


FIG. 1 - Exemple de circuit, les capacités sont $C_a = \frac{3}{2}$, $C_b = \frac{5}{2}$, $C_c = 2$, et $C_d = 2$.

1.1.1 Le potentiel électrique

Fixons 2 points a et b du circuit auxquels nous imposons une tension unitaire et considérons pour tous points x et y les grandeurs (voir figure 2) :

$i_{xy} = -i_{yx}$ est le courant circulant dans la branche de x vers y et
 ν_x est le potentiel électrique au point x , vérifiant $\nu_a = 1$ et $\nu_b = 0$.

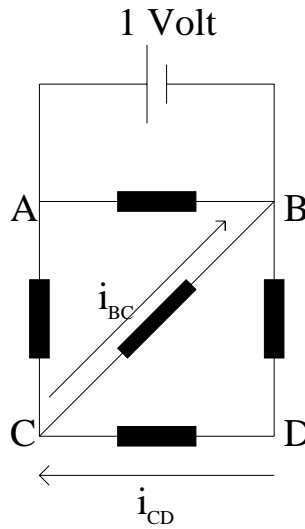


FIG. 2 – Exemple de circuit avec courant ($\nu_a = 1, \nu_b = 0$) et intensité.

- **La Loi d'Ohm** nous dit que $i_{xy} = C_{xy}(\nu_x - \nu_y)$; et ainsi
- **La Loi de Kirchhoff** nous disant que $\forall x \neq a, b; \sum_{y \in \Lambda} i_{xy} = 0$; on obtient facilement :

$$\nu_x = \sum_{y \in \Lambda} P_{xy} \nu_y,$$

où $P_{xy} = \frac{C_{xy}}{C_x} \forall (x; y)$ définit ainsi un noyau markovien de matrice :

$$P = \begin{pmatrix} 0 & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ \frac{2}{5} & 0 & \frac{1}{5} & \frac{2}{5} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}.$$

Nous remarquons donc que le potentiel est harmonique. En terme de marches aléatoires sur le graphe Λ ; on modifie la matrice de transition en rendant a et b "absorbants", i.e. en prenant : $P_{ax} = \delta_{ax}$ et $P_{bx} = \delta_{bx}$ car on s'intéresse au cheminement de a vers b .

Soit h_x la probabilité, partant de x de retourner en a avant d'atteindre b . On a $h_a = 1 = \nu_a$ et $h_b = 0 = \nu_b$. De plus, h et ν étant harmoniques le principe du maximum et celui d'unicité qui en découle implique $h = \nu$. On peut alors énoncer :

◇ **Interprétation du potentiel**

Quand un circuit est soumis à une tension unitaire en deux de ses points a et b , (avec b relié à la terre); le potentiel électrique en tout x de Λ vaut la probabilité; partant de x ; de retourner en a , avant d'atteindre b .

•

NB : Pour une tension non unitaire; le potentiel s'interprète en terme d'espérance de gain dans le jeu où, partant de x on gagne ν_a si on parvient à rejoindre a , rien sinon.

1.1.2 Le courant

Comme le potentiel; le courant trouve un "pendant probabiliste" qui se comprend en considérant naïvement le phénomène de conduction électrique. Imaginons que des charges positives

quittent a puis se déplacent aléatoirement dans le circuit jusqu'à atteindre b , où elles restent ; -ici seul b est absorbant-. Durant leur course, elles passent plusieurs fois de x à y , et de y vers x . L'idée est que le courant i_{xy} circulant dans la branche est proportionnel à l'espérance du nombre de ces passages (comptés algébriquement). Avant de le démontrer précisons les notations. On définit u_x comme l'espérance du nombre de visites en x . Une visite étant constituée d'une arrivée sur le site suivie d'un départ ; on a ainsi $u_b = 0$ et :

$$\forall x \neq a, b; u_x = \sum_{y \in \Lambda} u_y P_{yx}; \quad (1)$$

car toute visite en x est précédée d'une visite sur un autre site.

Voyons maintenant comment retrouver l'expression du courant i_{xy} qui circule dans la branche orientée de x vers y . Par l'équation (1) et en remarquant que $C_x P_{xy} = C_y P_{yx}$ on déduit que $\frac{u_x}{C_x} = \sum_{y \in \Lambda} P_{xy} \frac{u_y}{C_y}$. Donc $\nu = \frac{u}{C}$ est harmonique en tout point x différent de a et de b et vaut 0 en b et $\frac{u_a}{C_a}$ en a . Par le principe d'unicité on peut alors dire que $\frac{u_x}{C_x}$ est le potentiel du point x lorsque le circuit est soumis à $\frac{u_a}{C_a}$ en a et b relié à la terre. Ainsi le courant vaut :

$$i_{xy} = C_{xy}(\nu_x - \nu_y) = C_{xy} \left(\frac{u_x}{C_x} - \frac{u_y}{C_y} \right) = P_{xy} u_x - P_{yx} u_y, \quad (2)$$

et comme $P_{xy} u_x$ est égal à l'espérance du nombre de passages de x vers y et $P_{yx} u_y$ celle du nombre de passages en sens inverse ; on a bien ce qu'on veut.

En fait, selon nos notations ; l'égalité dans (2) a lieu à un facteur près car ici le potentiel n'est pas unitaire. Cependant le courant distribué en a vaut l'espérance du [(nombre de départ de a) - (nombre de retour en a)] ; et comme a n'est pas absorbant, pour chaque course ce nombre vaut 1, donc l'espérance aussi i.e. :

$$\sum_{y \in \Lambda} i_{ay} = 1.$$

Ce qui termine de normaliser et nous permet d'énoncer :

◇ **Interprétation du courant**

Lorsqu'un courant unitaire parcourt le circuit de a vers b ; le courant i_{xy} circulant dans toute branche (xy) est égal à l'espérance du nombre de traversées de cette dernière lors d'une marche partant de a et ne s'arrêtant qu'en b .

•

NB : Si on prend une tension unitaire ; on trouve donc les valeurs pour un courant unitaire en divisant les intensités obtenues par $\sum_{y \in \Lambda} i_{ay}^{1\text{volt}}$. De plus, le facteur $\frac{1}{\sum_{y \in \Lambda} i_{ay}^{1\text{volt}}}$ représente la résistance effective du circuit entre a et b .

Dans notre exemple on a pour 1 volt :

- $i_{ab} = 1$
- $i_{ac} = 1/3$
- $i_{ad} = 0$; d'où $R_{eff} = 3/4$.

1.2 Résistance effective et Loi de Rayleigh

1.2.1 Interprétation en terme de probabilité de sortie

Définition 1 Lorsque l'on soumet un circuit à une tension en imposant $v_a = v$ et $v_b = 0$; un courant $i_a = \sum_{x \in \Lambda} i_{ax}$ circule et on définit la **résistance effective** de ce circuit entre a et b par :

$$R_{eff} = \frac{v_a}{i_a}.$$

La valeur de ce rapport ne dépend que de la constitution du circuit car si la tension est multipliée par μ , tous les potentiels et intensités le sont de même. De plus ; lorsque $v_a = 1$; la conductance effective est égale au courant; on a ainsi :

$$\begin{aligned} C_{eff} = i_a &= \sum_{y \in \Lambda} i_{ay} = \sum_{y \in \Lambda} (v_a - v_y) C_{ay} = \sum_{y \in \Lambda} (C_{ay} - C_{ay} v_y) \\ &= C_a - C_a \sum_{y \in \Lambda} \left(\frac{C_{ay}}{C_a} \right) v_y = C_a \left(1 - \sum_{y \in \Lambda} P_{ay} v_y \right). \end{aligned}$$

Or v_y est la probabilité, partant de y , de rencontrer a avant d'avoir atteint b . Ainsi, le terme $\sum_{y \in \Lambda} P_{ay} v_y$ représente la probabilité partant de a d'y retourner avant d'avoir atteint b , et :

$$C_{eff} = C_a p_{esc},$$

où p_{esc} est la probabilité, partant de a , de sortir en b avant d'être retourné en a .

Pour notre exemple on a $p_{esc} = \frac{C_{eff}}{C_a} = \frac{1}{C_a R_{eff}}$, $p_{esc} = \frac{8}{9}$.

1.2.2 Loi de Monotonie

Ce qui précède nous dit que plus la résistance effective est grande, plus il est difficile de traverser le circuit de a jusqu'à b . Pour étudier son comportement lorsque l'on modifie les transitions, nous allons maintenant énoncer puis démontrer le principe de Rayleigh, qui constitue une loi de monotonie que nous utiliserons beaucoup dans la suite.

Théorème 2 Si on augmente -respectivement diminue- la valeur d'une résistance dans un circuit; la résistance effective R_{eff} de ce dernier (entre deux points quelconques) ne peut que croître -respectivement décroître-.

•

Pour démontrer ce théorème, nous allons considérer l'énergie dissipée par effet Joules dans le circuit et ses propriétés. Revenons pour cela sur certaines définitions.

1.2.3 Notions de flux et d'énergie

Définition 3 Un **flux** j de a vers b à travers Λ est une fonction j_{xy} des paires de points de Λ vérifiant :

- (a) $j_{xy} = -j_{yx}$
- (b) $\sum_{y \in \Lambda} j_{xy} = 0; \forall x \neq a, b$
- (c) $j_{xy} = 0$ si $R_{xy} = \infty$ i.e si x n'est pas connecté à y .

- On définit aussi $j_x = \sum_{y \in \Lambda} j_{xy}$ en tout x
- On dit que le flux est **unitaire** lorsque $j_a = 1$

On a $j_x = 0$ lorsque $x \neq a, b$ vu (b) dans la définition 3 et $j_a + j_b = 0$.

Cette dernière égalité peut être démontrée en remarquant que :

$$j_a + j_b = \sum_{(x,y) \in \Lambda^2} j_{xy} = \frac{1}{2} \sum_{(x,y) \in \Lambda^2} (j_{xy} + j_{yx}) = 0.$$

Définition 4 On appelle énergie dissipée dans le circuit Λ par le flux j la quantité positive :

$$E(j) = \frac{1}{2} \sum_{(x,y) \in \Lambda^2} R_{xy} j_{xy}^2.$$

Remarque : Si on impose une tension entre 2 points a et b d'un circuit ; le courant électrique $i = i_{xy}$ qui circule dans chaque branche est un flux.

On vérifie en effet facilement (a), (b), et (c) de la définition 3 grâce aux lois simples d'électricité rappelées dans la partie 1.1 et de plus, on a la propriété générale :

Proposition 5 Pour toute fonction ω définie sur les points de Λ et quelque soit le flux j de a vers b à travers Λ ; on a :

$$(\omega_a - \omega_b) j_a = \frac{1}{2} \sum_{(x,y) \in \Lambda^2} (\omega_x - \omega_y) j_{xy}.$$

Démonstration.

$$\begin{aligned} \sum_{(x,y) \in \Lambda^2} (\omega_x - \omega_y) j_{xy} &= \sum_{x \in \Lambda} \omega_x j_x - \sum_{y \in \Lambda} \omega_y (-j_y) = \omega_a j_a + \omega_b j_b - \omega_a (-j_a) - \omega_b (-j_b) \\ &= 2j_a (\omega_a - \omega_b). \end{aligned}$$

■

Lorsque la fonction ω est le potentiel ν et que le flux j est le courant i ; il apparait ainsi l'égalité entre l'énergie électrique fournie par le générateur et celle dissipée par effet Joule dans le circuit, c'est à dire que l'on retrouve le principe de conservation d'énergie électrique dans un circuit de résistances en sciences physiques.

1.2.4 Démonstration de la Loi de Monotonie

Par conservation, on a :

$$\nu_a i_a = R_{eff} i_a^2 = \sum_{(x,y) \in \Lambda^2} R_{xy} i_{xy}^2.$$

On voit que l'on peut ajuster ν_a pour avoir un flux de courant unitaire ; dans ce cas l'énergie dissipée vaut R_{eff} ; et elle est minimale par rapport à l'énergie dissipée dans le système par tout autre flux unitaire. C'est un principe qui caractérise le flux de courant unitaire de tout circuit Λ .

Principe de Thomson :

Le flux de courant unitaire -déterminé par les lois d'Ohm et de Kirchhoff- qui traverse le circuit de a vers b ; minimise l'énergie dissipée dans ce dernier par tout flux unitaire.

Démonstration.

Soit j un flux unitaire quelconque, alors $d_{xy} = j_{xy} - i_{xy}$ est aussi un flux de a vers b avec $d_a = d_b = 0$. On a :

$$2E(j) = \sum_{(x,y) \in \Lambda^2} (i_{xy} + d_{xy})^2 R_{xy} = 2E(i) + 2E(d) + 2 \sum_{(x,y) \in \Lambda^2} (\nu_x - \nu_y) d_{xy}.$$

Une application directe de la proposition précédente au flux d et à la fonction potentiel ν donne $2(E(j) - E(i) - E(d)) = 0$ i.e. ;

$$E(j) = E(i) + E(i - j) \quad \forall j \text{ flux unitaire.}$$

Ce qui termine la démonstration, car $E(i - j)$ est positive. ■

La loi de monotonie est une conséquence immédiate de ce principe. En effet, appelons i le flux de courant unitaire pour Λ munit des résistances R_{xy} et j celui pour Λ munit des \bar{R}_{xy} avec $\bar{R}_{xy} \geq R_{xy}$. Il nous faut donc voir $\bar{R}_{eff} \geq R_{eff}$. Pour cela on a :

$$\bar{R}_{eff} = \frac{1}{2} \sum_{(x,y) \in \Lambda^2} \bar{R}_{xy} j_{xy}^2 \geq \frac{1}{2} \sum_{(x,y) \in \Lambda^2} R_{xy} j_{xy}^2,$$

et par le principe de Thomson :

$$\bar{R}_{eff} \geq \frac{1}{2} \sum_{(x,y) \in \Lambda^2} R_{xy} i_{xy}^2 = R_{eff}.$$

Ainsi, pour une marche aléatoire partant de a et parcourant le graphe Λ jusqu'à sortir en b ; lorsqu'on enlève une arête, ce qui revient à mettre une résistance infinie dans le circuit associé, la probabilité de réussir à sortir, p_{esc} , diminue par la loi de monotonie car elle est proportionnelle à l'inverse de la résistance effective.

2 Application : le problème de récurrence de Polya

Considérons une chaîne de Markov $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ à valeurs dans \mathbb{Z}^d de matrice de transition $Q(x, y) = \frac{1}{2d}$, $\forall x, y \in \mathbb{Z}^d$ tels que $d(x, y) = 1$ et $Q(x, y) = 0$ sinon (ici d est la distance classique induite par \mathbb{R}^d). Une telle chaîne de Markov sera aussi appelée marche aléatoire simple sur \mathbb{Z}^d . Pour $x \in \mathbb{Z}^d$ on notera $T_x = \inf \{n > 0, X_n = x\}$ le premier temps de retour en x , P_x la loi du processus partant de x . On dira que $x \in \mathbb{Z}^d$ est récurrent si $P_x(T_x < \infty) = 1$ et que la chaîne $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est récurrente si tous les points sont récurrents. Le but de cette section est de montrer que pour $d = 1, 2$ la chaîne est récurrente en utilisant une formulation en termes de circuits électriques. On verra que cette approche simplifie considérablement le problème. Commençons par remarquer que la matrice de transition Q est irréductible ($\forall x, y, \exists n, Q^n(x, y) > 0$) donc il suffit qu'il existe un $x \in \mathbb{Z}^d$ récurrent pour que tous les points soient récurrents. On cherche donc à montrer que 0 est récurrent i.e. : $p_{esc} := P_0(T_0 = \infty) = 0$. Afin de reformuler le problème en termes de circuits électriques, on va interpréter la probabilité de sortie p_{esc} comme une limite de probabilités de sorties sur des graphes finis.

On munit \mathbb{Z}^d de la distance $d(x, y) := \sum_{i=0}^d |x_i - y_i|$ où $x = (x_1, \dots, x_d)$ et $y = (y_1, \dots, y_d)$. Soit r un entier naturel et B^r la boule fermée de centre 0 et de rayon r (voir figure 3) et ∂B^r la sphère de rayon r . On définit une chaîne de Markov $(X_n^{(r)})_{n \in \mathbb{N}}$ à valeurs dans le graphe fini B^r par la donnée d'une matrice de transition, $Q^{(r)}(x, y) = Q(x, y)$, $\forall x, y \in B^r \setminus \partial B^r$ et si $x \in \partial B^r$, $Q^{(r)}(x, y) = 0$ si $y \neq x$, $Q^{(r)}(x, x) = 1$. On note $P_x^{(r)}$ la loi du processus partant de x et $\tau^{(r)} = \inf\{n > 0, X_n^{(r)} \in \partial B^r\}$. Soit $p_{esc}^{(r)} = P_0^{(r)}(\forall 0 < n < \tau^{(r)}, X_n^{(r)} \neq 0)$ la probabilité de sortie partant de 0 sans repasser en 0. On remarque que $p_{esc}^{(r)}$ est une fonction décroissante de r et on a :

$$p_{esc} = \lim_{r \rightarrow \infty} p_{esc}^{(r)}.$$

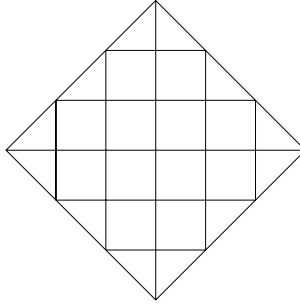


FIG. 3 – B^3 dans \mathbb{Z}^2

2.1 Formulation électrique du problème de récurrence

Maintenant que nous avons exprimé le problème en termes de graphes finis nous pouvons utiliser les lois classiques en électricité. Considérons le circuit électrique obtenu à partir de B^r en maintenant l'origine à 1 volt et en reliant les points de ∂B^r à la masse (voir figure 4).

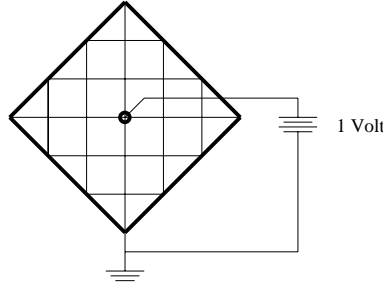


FIG. 4 – Chaque résistance vaut 1.

D'après les résultats de la section précédente on a :

$$p_{esc}^{(r)} = \frac{i^{(r)}}{2d}.$$

Comme la tension appliquée est 1, $i^{(r)}$ est juste la conductance effective entre 0 et ∂B^r , ie :

$$i^{(r)} = \frac{1}{R_{eff}^{(r)}}$$

où $R_{eff}^{(r)}$ est la résistance effective de O à ∂B^r . On a donc :

$$p_{esc}^{(r)} = \frac{1}{2dR_{eff}^{(r)}}.$$

$R_{eff}^{(r)}$ étant une fonction croissante de r , sa limite quand r tend vers l'infini existe dans $[0, \infty]$ et il paraît alors naturel de définir R_{eff} , la résistance effective de l'origine à l'infini par :

$$R_{eff} := \lim_{r \rightarrow \infty} R_{eff}^{(r)} \in [0, \infty].$$

On a alors le critère suivant :

Proposition 6 *La marche aléatoire (X_n) est récurrente si et seulement si $R_{eff} = \infty$.*

Démonstration.

On a $p_{esc} = \frac{1}{2dR_{eff}}$ et donc $p_{esc} = 0 \Leftrightarrow R_{eff} = \infty$. ■

Le succès de cette formulation électrique vient du fait que la résistance à l'infini peut être estimée en utilisant des méthodes classiques de la théorie des circuits électriques.

2.2 La récurrence en dimension 1 et 2

Nous allons montrer le résultat suivant :

Proposition 7 *La marche aléatoire (X_n) est récurrente pour $d=1,2$.*

Démonstration.

Pour le cas de la dimension 1, le problème est trivial car une ligne infinie de résistances de 1 ohm a une résistance infinie et donc la marche en dimension 1 est récurrente.

La dimension 2 n'est pas beaucoup plus compliquée. On commence par regrouper ensemble chaque résistances se trouvant sur un même carré centré en l'origine, cela revient à mettre chacune de ces résistances à 0 (voir figure 5). Comme n résistances de 1 ohm en parallèle sont équivalentes à une seule résistance de $\frac{1}{n}$ ohms, le circuit modifié est équivalent au circuit donné par la figure 6. Puis en regroupant les résistances en parallèle on obtient un circuit équivalent à celui de la figure 7 pour lequel on a :

$$R'_{eff} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{8n+4} = \infty.$$

Par la loi de monotonie (théorème 2), on a pour le circuit initial $R_{eff} \geq R'_{eff} = \infty$, donc la marche est récurrente pour $d = 2$. ■

3 Percolation

Commençons par donner quelques définitions et notations. Pour x et y dans \mathbb{Z}^d on note $d(x, y) = \sum_{i=0}^d |x_i - y_i|$, où les x_i, y_i sont les composantes de x et y . On construit, à partir de \mathbb{Z}^d , un graphe, noté \mathbb{L}^d , ayant pour sommets l'ensemble \mathbb{Z}^d , et pour arêtes l'ensemble \mathbb{E}^d tel que x et y sont joints par une arête si et seulement si $d(x, y) = 1$.

Introduisons maintenant des probabilités. Soit p vérifiant $0 \leq p \leq 1$. On dira que p est la probabilité qu'une arête $e \in \mathbb{E}^d$ soit ouverte et $1 - p$ la probabilité que e soit fermée. Plus précisément,

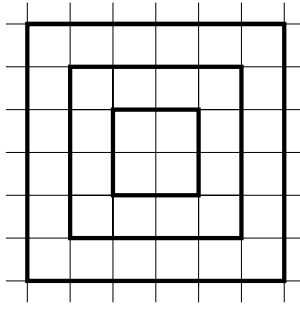


FIG. 5 -

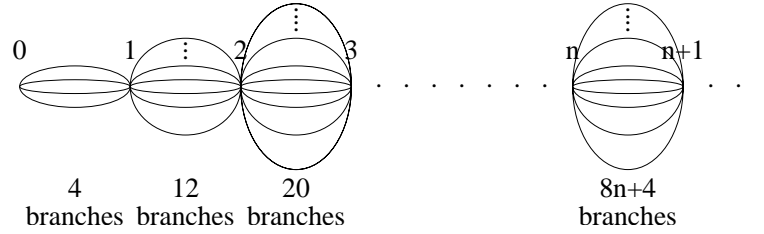


FIG. 6 -

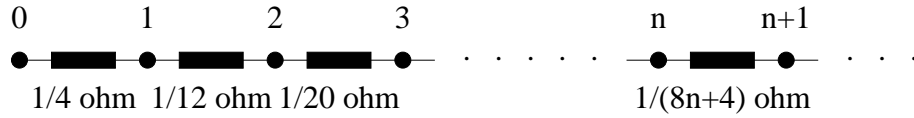


FIG. 7 -

on considère l'ensemble $\Omega = \prod_{e \in \mathbb{E}^d} \{0, 1\}$ dont les points sont représentés par $w = (w(e), e \in \mathbb{E}^d)$ et appelés configurations, $w(e)$ prenant la valeur 0 si e est fermée et 1 si e est ouverte. Pour cela, Ω étant muni de la tribu engendrée par les cylindres, on considère la mesure produit :

$$P_p = \bigotimes_{e \in \mathbb{E}^d} \mu_e$$

où μ_e est la mesure de Bernoulli sur $\{0, 1\}$, donnée par :

$$\mu_e(w(e) = 0) = 1 - p, \mu_e(w(e) = 1) = p$$

(l'existence et l'unicité de P_p étant assurées par le théorème de Carathéodory). On notera E_p l'espérance sous P_p . On peut remarquer qu'il y a un ordre partiel naturel sur Ω donné par $w_1 \leq w_2$ si et seulement si $w_1(e) \leq w_2(e) \forall e \in \mathbb{E}^d$. On se ramènera souvent à un nombre fini de variables, pour cela on notera Λ_N^d l'ensemble des sommets du cube de dimension d dans \mathbb{Z}^d centré en 0 et de côté N , \mathbb{E}_N^d l'ensemble des ses arêtes et \mathbb{L}_N^d le graphe $(\Lambda_N^d, \mathbb{E}_N^d)$. On notera également $P_{p,N}$ la loi du processus de percolation restreint à \mathbb{E}_N^d , i.e. $P_{p,N} = \bigotimes_{e \in \mathbb{E}_N^d} \mu_e$, mesure sur $\Omega_N = \{0, 1\}^{\mathbb{E}_N^d}$. Enfin, on notera $E_{p,N}$ l'espérance sous $P_{p,N}$.

Ce que nous définissons maintenant est valable pour $N \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$. Un chemin de \mathbb{L}_N^d est une suite $x_0, e_0, x_1, e_1, \dots, e_{n-1}, x_n$ de sommets distincts x_i et d'arêtes e_i joignant x_i à x_{i+1} , on dit qu'un tel chemin a une longueur n et connecte x_0 à x_n . On dit qu'un chemin est ouvert si toutes ses arêtes sont ouvertes et fermé si toutes ses arêtes sont fermées. Si A et B sont deux ensembles de sommets de Λ_N^d , on notera $A \leftrightarrow B$ si il existe un chemin ouvert joignant un sommet de A à un

sommet de B . Considérons maintenant une configuration de Ω , on en déduit un sous-graphe de \mathbb{L}^d dont les sommets sont \mathbb{Z}^d et les arêtes sont les arêtes ouvertes. Si x est un élément de \mathbb{Z}^d on note alors $C(x)$ la composante connexe de ce graphe contenant x . Dans la suite on va s'intéresser à la taille de $C(x)$ et l'on notera $|C(x)|$ le nombre (éventuellement infini) de sommets dans $C(x)$. Enfin, on ne s'intéressera qu'à $C(0)$, que l'on notera simplement C , les résultats énoncés se généralisant facilement à $C(x)$ pour tout x en remarquant que \mathbb{L}^d et P_p sont invariants par translation.

3.1 Transition de phase

Une quantité intéressante que nous allons maintenant étudier est la probabilité de percolation définie par :

$$\Theta(p) = P_p(|C| = \infty) = \lim_{N \rightarrow \infty} P_{p,N}(0 \leftrightarrow \partial\Lambda_N^d), \quad (3)$$

où $\partial\Lambda_N^d$ est l'ensemble des sommets sur le bord de Λ_N^d .

Il est clair que $|C| = \infty$ si et seulement si il existe une suite infinie de sommets distincts x_0, x_1, \dots avec $x_0 = 0$ tels que $d(x_i, x_{i+1}) = 1 \forall i$ et que l'arête joignant x_i à x_{i+1} soit ouverte $\forall i$. On dit alors que la suite x_0, x_1, \dots est un chemin ouvert joignant 0 à l'infini. $\Theta(p)$ est donc la probabilité qu'il existe un chemin ouvert joignant 0 à l'infini. Le premier résultat sur la fonction $\Theta(p)$ est très intuitif :

Proposition 8 $\Theta(p)$ est une fonction croissante de p .

Cette proposition est en fait une application d'un résultat plus général. Avant de l'énoncer nous allons parler de couplage.

Couplage : On veut définir un couplage i.e. une mesure Φ sur $\Omega_N \times \Omega_N$ qui vérifie :

$$\begin{cases} \sum_{\omega'} \Phi(\omega, \omega') = P_{p_1, N}(\omega) \\ \sum_{\omega} \Phi(\omega, \omega') = P_{p_2, N}(\omega') \\ \omega \leq \omega' \text{ dès que } \Phi(\omega, \omega') > 0 \end{cases}$$

Le point important étant de conserver l'ordre.

On définit d'abord, étant donné une famille de variables aléatoire $(X_e)_{e \in \mathbb{E}_N^d}$ indépendantes et uniformément distribuées sur $[0, 1]$ un élément η_p de Ω_N par $\eta_p(e) = 1$ si $X_e < p$ et $\eta_p(e) = 0$ sinon. Puis on pose :

$$\Psi(\omega(e), \omega'(e)) = \int_0^1 \mathbb{I}_{A(\omega(e), \omega'(e))}(x) dx,$$

$$\text{où } e \in \mathbb{E}_N^d \text{ et } A(\omega(e), \omega'(e)) = \begin{cases} x \leq p_1 & \text{si } \omega(e) = 1 \\ x \geq p_1 & \text{si } \omega(e) = 0 \\ x \leq p_2 & \text{si } \omega'(e) = 1 \\ x \geq p_2 & \text{si } \omega'(e) = 0 \end{cases}$$

Enfin on pose :

$$\Phi(\omega, \omega') = \prod_{e \in \mathbb{E}_N^d} \Psi(\omega(e), \omega'(e)).$$

Et on vérifie facilement que les propriétés énoncées plus haut sont vraies.

Passons maintenant à une définition qui nous sera utile :

Définition 9 Une variable aléatoire X sur Ω_N est dite croissante si $X(w_1) \leq X(w_2)$ dès que $w_1 \leq w_2$.

On a alors le :

Théorème 10 Si X est une variable aléatoire croissante sur Ω_N alors $E_{p_1}(X) \leq E_{p_2}(X)$ dès que $p_1 \leq p_2$

Démonstration.

Soit η_{p_1} et η_{p_2} définis comme précédemment. On a clairement $\eta_{p_1} \leq \eta_{p_2}$ dès que $p_1 \leq p_2$, ce qui donne $X(\eta_{p_1}) \leq X(\eta_{p_2})$ pour toute variable aléatoire croissante X . On déduit alors le théorème en prenant l'espérance de cette inégalité. ■

La proposition 8 est alors évidente car l'indicatrice de l'ensemble mesurable $\{0 \leftrightarrow \partial\Lambda_N^d\}$ est croissante pour tout N . On remarque que $\Theta(0) = 0$ et $\Theta(1) = 1$, en utilisant le fait que $\Theta(p)$ est une fonction croissante de p , on obtient :

Proposition-Définition 11 On appelle probabilité critique le nombre $p_c = p_c(d) = \sup\{p, \Theta(p) = 0\}$. C'est l'unique valeur de p pour laquelle $\Theta(p) = 0$ si $p < p_c$ et $\Theta(p) > 0$ si $p > p_c$.

3.2 Propagation des chemins

Nous allons voir dans cette section comment varie le nombre de chemins ouverts traversant un carré de taille $N \times N$ en fonction de p . Commençons par fixer quelques notations.

Soit r un entier positif. Pour toute configuration w on définit la sphère de rayon r et de centre w par :

$$S_r(w) = \{w' \in \Omega, \sum_{e \in \mathbb{E}_N^d} |w'(e) - w(e)| \leq r\}.$$

Pour chaque événement A on définit $I_r(A) = \{w \in \Omega, S_r(w) \subseteq A\}$. Voici un premier résultat dont nous aurons besoin pour la suite.

Théorème 12 Soit A un événement croissant et r un entier positif. Si $0 \leq p_1 < p_2 \leq 1$ alors :

$$1 - P_{p_2}(I_r(A)) \leq \left(\frac{p_2}{p_2 - p_1}\right)^r (1 - P_{p_1}(A)).$$

Démonstration.

Soit A un événement croissant et supposons que $p_1 < p_2$ et que $\eta_{p_2} \notin I_r(A)$ (η_{p_1} et η_{p_2} étant définis comme dans la section 3.1). Alors il existe au moins un ensemble (aléatoire) d'arêtes B tel que :

- $|B| \leq r$
- $\forall e \in B, \eta_{p_2}(e) = 1$
- la configuration $\hat{\eta}_{p_2}$ obtenue à partir de η_{p_2} en déclarant toutes les arêtes de B fermées vérifie $\hat{\eta}_{p_2} \notin A$.

Il existe peut-être de nombreux B vérifiant ces conditions. On choisit donc un ordre sur \mathbb{E}^d (en numérotant les arêtes) à partir duquel on construit un ordre sur les B vérifiant ces conditions et on pose $B(\eta_{p_2})$ le plus petit de ces B uniquement déterminé par η_{p_2} .

Fixons un $\eta_{p_2} \notin I_r(A)$, posons $B = B(\eta_{p_2})$ et calculons :

$$\begin{aligned} \sum_{\eta_{p_1} \leq \eta_{p_2}} \Phi(\eta_{p_1}, \eta_{p_2}) &= \sum_{\eta_{p_1} \leq \eta_{p_2}} \left(\prod_{e \in \mathbb{E}_N^d \setminus B} \Psi(\eta_{p_1}(e), \eta_{p_2}(e)) \right) \left(\prod_{e \in B} \Psi(\eta_{p_1}(e), 1) \right) \\ &= f(\eta_{p_2}) \left(\sum_{\eta_{p_1}(B)} \prod_{e \in B} \Psi(\eta_{p_1}(e), 1) \right) = f(\eta_{p_2}) p_2^{|B|}, \end{aligned} \quad (4)$$

où l'on a posé :

$$f(\eta_{p_2}) = \sum_{\eta_{p_1}(\mathbb{E}_N^d \setminus (B)) \leq \eta_{p_2}(\mathbb{E}_N^d \setminus (B))} \left(\prod_{e \in \mathbb{E}_N^d \setminus B} \Psi(\eta_{p_1}(e), \eta_{p_2}(e)) \right).$$

De même, on calcule :

$$\begin{aligned} \sum_{\eta_{p_1} \leq \eta_{p_2}; \eta_{p_1}(B)=0} \Phi(\eta_{p_1}, \eta_{p_2}) &= \sum_{\eta_{p_1} \leq \eta_{p_2}} \left(\prod_{e \in \mathbb{E}_N^d \setminus B} \Psi(\eta_{p_1}(e), \eta_{p_2}(e)) \right) \left(\sum_{\eta_{p_1}(B)=0} \prod_{e \in B} \Psi(0, 1) \right) \\ &= f(\eta_{p_2}) \times (p_2 - p_1)^{|B|} \leq \sum_{\eta_{p_1} \leq \eta_{p_2}; \eta_{p_1} \notin A} \Phi(\eta_{p_1}, \eta_{p_2}). \end{aligned} \quad (5)$$

La dernière inégalité est justifiée par le fait que A est croissant et que, par conséquent, $\{\eta_{p_1}(B) = 0, \eta_{p_1} \leq \hat{\eta}_{p_2} \leq \eta_{p_2}\} \subseteq A$. Donc en sommant l'inégalité (5) sur les $\eta_{p_2} \notin I_r(A)$ on obtient :

$$\sum_{\eta_{p_2} \notin I_r(A)} \sum_{\eta_{p_1} \leq \eta_{p_2}; \eta_{p_1}(B)=0} \Phi(\eta_{p_1}, \eta_{p_2}) = \sum_{\eta_{p_2} \notin I_r(A)} f(\eta_{p_2}) \times (p_2 - p_1)^{|B|} \leq \Phi(\eta_{p_1} \notin A; \eta_{p_2} \notin I_r(A)). \quad (6)$$

On déduit de (4) :

$$\begin{aligned} \Phi(\eta_{p_2} \notin I_r(A)) &= \sum_{\eta_{p_2} \notin I_r(A)} \sum_{\eta_{p_1} \leq \eta_{p_2}} \Phi(\eta_{p_1}, \eta_{p_2}) = p_2^{|B|} \left(\sum_{\eta_{p_2} \notin I_r(A)} f(\eta_{p_2}) \right) \\ &= \sum_{\eta_{p_2} \notin I_r(A)} f(\eta_{p_2}) \times (p_2 - p_1)^{|B|} \times \left(\frac{p_2}{p_2 - p_1} \right)^{|B|}. \end{aligned} \quad (7)$$

Comme $|B| \leq r$ l'équation (7) implique que :

$$\Phi(\eta_{p_2} \notin I_r(A)) \leq \left(\frac{p_2}{p_2 - p_1} \right)^r \sum_{\eta_{p_2} \notin I_r(A); \eta_{p_1} \notin A} f(\eta_{p_2}) (p_2 - p_1)^{|B|},$$

ce qui donne par l'équation (6) :

$$\Phi(\eta_{p_2} \notin I_r(A)) \leq \left(\frac{p_2}{p_2 - p_1} \right)^r \Phi(\eta_{p_1} \notin A; \eta_{p_2} \notin I_r(A)).$$

D'où le résultat annoncé. ■

Voyons maintenant l'application de ce résultat à la propagation des chemins. On note, A_N l'événement "il existe un chemin traversant Λ_N^d ". On fait l'hypothèse suivante :

Hypothèse (H) : $\forall p > p_c, \exists \alpha = \alpha(p) > 0$ tel que $P_{p,N}(A_N) \geq 1 - \exp(-\alpha N^{d-1})$.

Il est clair que A_N est un événement croissant. $I_r(A_N)$ est l'ensemble des configurations ω telles que si on fait au plus r modifications de ω on reste dans A_N , i.e. c'est l'ensemble des configurations telles qu'il existe au moins $r + 1$ chemins disjoints traversant le carré Λ_N^d .

Soit $p_1 > p_c$, on note $\alpha = \alpha(p_1)$ le réel positif donné dans l'hypothèse on a :

$$P_{p_1}(A_N^c) \leq \exp(-\alpha N^{d-1}). \quad (8)$$

Soit maintenant $p_2 > p_1$ en utilisant l'inégalité (8) et le théorème 12 on trouve :

$$P_{p_2}((I_r(A))^c) \leq \left(\frac{p_2}{p_2 - p_1} \right)^r \exp(-\alpha N^{d-1}).$$

En posant alors $r = \delta N^{d-1}$ on trouve :

$$\begin{aligned} P_{p_2,N}((I_r(A))^c) &\leq \left(\left(\frac{p_2}{p_2 - p_1} \right)^\delta \right)^{N^{d-1}} \exp(-\alpha N^{d-1}) = \exp \left(N^{d-1} \left(\delta \log \left(\frac{p_2}{p_2 - p_1} \right) - \alpha \right) \right) \\ &\leq \exp(-cN^{d-1}), \end{aligned} \quad (9)$$

en prenant δ assez petit.

On a alors le résultat suivant (pour une démonstration de l'hypothèse pour d quelconque voir [2]) :

Proposition 13 $\forall p > p_c, \exists \delta > 0$ tel que :

$$\lim_{N \rightarrow \infty} P_{p,N}(A_{\delta N^{d-1}}) = 1.$$

Démonstration.

Il suffit d'appliquer ce qui précède à : $\begin{cases} p_1 = p - \epsilon > p_c \\ p_2 = p > p_1 \end{cases}$ ■

3.3 Démonstration de l'hypothèse dans le cas $d = 2$

Pour démontrer l'hypothèse dans le cas $d = 2$ nous allons associer à toute configuration une configuration duale dans un réseau dual. On considère \mathbb{Z}^2 à partir duquel on définit son réseau dual qui est l'ensemble $(\mathbb{Z}^2)^* = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) + \mathbb{Z}^2$. Deux éléments x^*, y^* de $(\mathbb{Z}^2)^*$ sont joints par une arête si $d(x^*, y^*) = 1$, où d est la distance classique. Si x et y sont dans \mathbb{Z}^2 et si e est

une arête joignant $x = (x_1, x_2)$ à $y = (y_1, y_2)$ on définit l'arête duale e^* de e par l'arête joignant

$$\begin{cases} (x_1 + \frac{1}{2}, x_2 - \frac{1}{2}) \text{ à } (y_1 - \frac{1}{2}, y_2 - \frac{1}{2}) & \text{si } x_2 = y_2 \text{ et } x_1 < y_1 \\ (x_1 - \frac{1}{2}, x_2 + \frac{1}{2}) \text{ à } (y_1 + \frac{1}{2}, y_2 - \frac{1}{2}) & \text{si } x_1 = y_1 \text{ et } x_2 < y_2 \end{cases} \text{ dans } (\mathbb{Z}^2)^*.$$

On pose maintenant $\Lambda_N^* = \Lambda_N^2 + (\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$, E_N^* l'ensemble des arêtes dans le réseau dual joignant les points de Λ_N^* , $\Omega_N^* = \{0, 1\}^{E_N^*}$, et $P_{p,N}^* = \otimes_{e \in E_N^*} \mu_e$ où les μ_e sont des mesures de Bernoulli de paramètre p . $P_{p,N}^*$ définit une mesure de probabilité sur Ω_N^* muni de la tribu engendrée par les cylindres.

On associe maintenant à toute configuration ω de Ω_N sa configuration duale ω^* dans Ω_N^* définie par $\omega^*(e^*) = 1 - \omega(e)$. On obtient par ce procédé un processus de percolation dual de paramètre $p' = 1 - p$ comme représenté sur la figure 8.

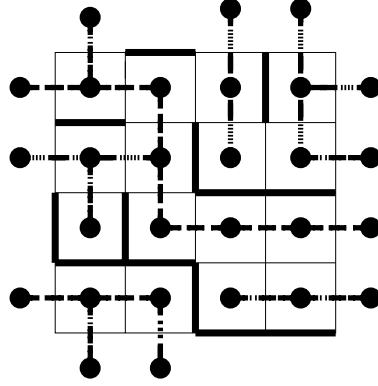


FIG. 8 – En plein une configuration aléatoire, en hachuré sa configuration duale.

Cette idée de percolation duale nous permet de voir que en dimension 2 et pour des valeurs de p proches de 1 l'hypothèse (H) introduite en (3.2) est vérifiée par p . On remarque en effet que le fait qu'il existe un chemin ouvert de droite à gauche pour la configuration ω est équivalent au fait qu'il n'existe pas de chemin ouvert de haut en bas pour la configuration duale ω^* . Ainsi :

$$P_p \left(\exists \text{ chemin de droite à gauche} \right) = P_{p'}^* \left(\nexists \text{ chemin de haut en bas} \right)$$

FIG. 9 –

Si l'on note V le coté vertical haut de Λ_N^* , on a clairement :

$$P_{p',N}^*(\exists \text{ un chemin de haut en bas}) = \sum_{x \in V} P_{p',N}^*(\exists \text{ un chemin joignant } x \text{ au bas}),$$

et pour x en haut du circuit ; un chemin joignant x au bas est de longueur $l \geq N$, donc de probabilité $(p')^l$. De plus, pour tout entier l il existe au plus 3^l chemins de longueurs l partant de x donc :

$$P_{p',N}^*(\exists \text{ chemin de haut en bas}) \leq \sum_{x \in V} \sum_{l \geq N} (3p')^l \leq N \frac{(3p')^N}{1 - 3p'} \leq 2N(3p')^l$$

la dernière inégalité étant réalisée dès que $p' < \frac{1}{6}$.

On en déduit que $P_p(\exists \text{ un chemin de gauche à droite}) \geq 1 - \exp\{N(\ln(3p') + \frac{\ln(N)}{N})\}$. Or pour N assez grand, $\frac{\ln(N)}{N} < 1$ donc en prenant $\alpha = -(\ln(3(1-p)) + 1)$ et comme p est proche de 1, on a $\alpha > 0$ et :

$$\exists \alpha > 0, P_{p,N}(\exists \text{ un chemin de gauche à droite}) \geq 1 - \exp(-\alpha N).$$

Par conséquent (H) est vérifiée.

4 Résistance effective

4.1 Cas déterministe ($p = 1$) : les matériaux homogènes

On s'intéresse à la résistance effective du circuit obtenu à partir de Λ_N^d en disant que chaque arête est une résistances de 1 Ohm (cf figure 10). On note R_{eff}^N la résistance effective de ce circuit.

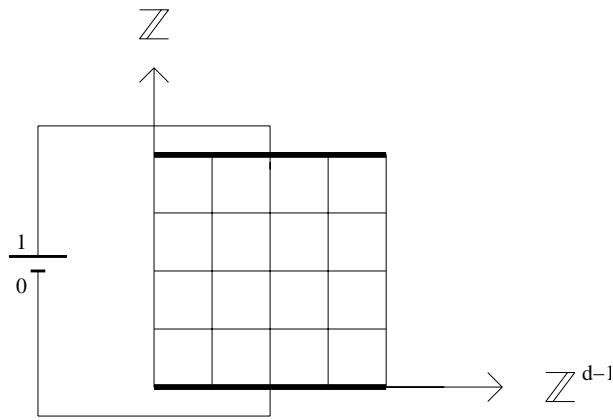


FIG. 10 -

(A)-Modifions le circuit en rendant R_{xy} infini lorsque les $d - 1$ premières coordonnées de x et y diffèrent comme le montre la figure 11.

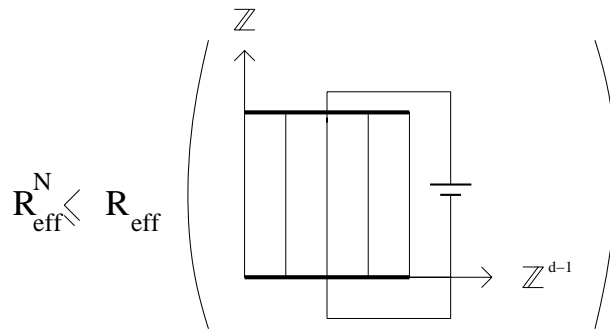


FIG. 11 -

On obtient des résistances en parallèle, au nombre de N^{d-1} , chacune valant N Ohms (car constituée de N résistances de 1 Ohm en série). La résistance effective du circuit obtenu vaut donc $\bar{R}_{eff}^N = (N^{d-1} \frac{1}{N})^{-1}$. On en déduit, par la loi de monotonie : $R_{eff}^N \leq N^{2-d}$.

(B) - Pour avoir une borne inférieure, on met tous les points dont la dernière coordonnée est identique au même potentiel (voir figure 12) ; i.e. on modifie R_{xy} en $R'_{xy} = 0$ si $x_d = y_d$.

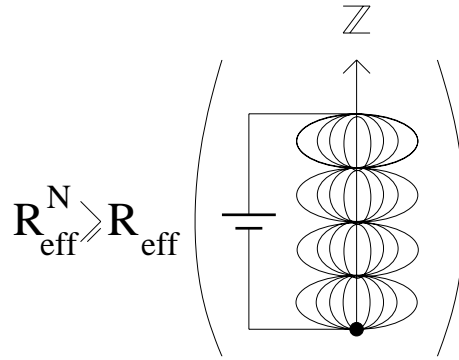


FIG. 12 -

On obtient ainsi N résistances en série ; chacune constituée de N^{d-1} résistances en parallèle, donc de conductance N^{d-1} ; ainsi la résistance totale vaut $\tilde{R}_{eff}^N = N \frac{1}{N^{d-1}}$ ce qui donne, par monotonie : $R_{eff}^N \geq N^{2-d}$. Finalement :

$$R_{eff}^N = N^{2-d}.$$

4.2 Cas aléatoire ($0 < p < 1$) : les alliages

Pour simplifier, on considère que l'alliage est constitué de 2 types de métaux, un conducteur - avec une proportion 'atomique' p - et un isolant ; ce qui correspond à une percolation de paramètre p en dimension $d = 3$ où $\omega(e) = 1$ si les atomes aux extrémités de e dans le réseau métallique ($\subset \mathbb{Z}^d$) sont conducteurs comme cela est représenté sur la figure 13.

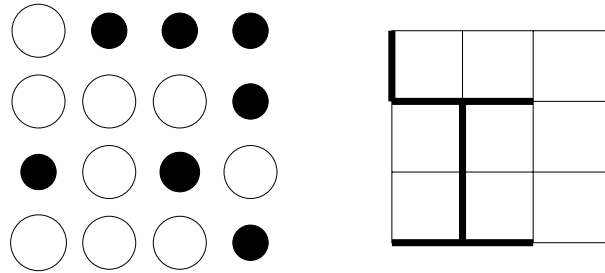


FIG. 13 -

Un morceau de cet alliage est une portion de réseau de taille N , N très grand (de l'ordre du nombre d'atomes présents dans ce morceau). Il s'agit de déterminer si le courant "passe", mais il faut avant cela préciser ce que l'on entend par là. Le cas idéal est celui de la section précédente, c'est la cas des matériaux homogènes, uniquement constitués de métal conducteur. Nous le prenons donc comme référence. On dira alors qu'un alliage est conducteur si la résistance effective du circuit obtenu par la méthode précédente, que l'on note $R_{N,p}$, est de l'ordre de la référence (qui vaut N^{2-d}). Plus précisément :

Définition 14 Un alliage est dit conducteur si il existe $C > 0$ et que pour tout N suffisamment grand il

existe $\Omega'_N \subset \Omega_N$ avec $P_{p,N}(\Omega'_N)$ proche de 1 tel que :

$$\forall \omega \in \Omega'_N, R_{N,p}(\omega)N^{d-2} < C.$$

On a alors le résultat suivant :

Proposition 15 Soit $d \geq 2$. Si $p > p_c$ alors l'alliage est conducteur. Si p est proche de 0, l'alliage n'est plus conducteur.

Démonstration.

Soit $S_{N,p}$ le cardinal de l'ensemble des connexions disjointes d'une borne à l'autre du générateur et on note par $(s_i)_{i=1..S_{N,p}}$ les chemins de longueur $|s_i|$.

Par la loi de monotonie, la conductance de l'alliage est supérieure à celle du circuit constitué de ces seuls chemins disjointes et la résistance de s_i est égale à sa longueur on a donc :

$$(R_{N,p})^{-1} \geq \sum_{i=1..S_{N,p}} |s_i|^{-1} \geq S_{N,p} \left(\sum_{i=1..S_{N,p}} \frac{|s_i|^{-1}}{S_{N,p}} \right) \geq S_{N,p} \left(\sum_{i=1..S_{N,p}} \frac{|s_i|}{S_{N,p}} \right)^{-1}.$$

La dernière inégalité étant obtenue en utilisant l'inégalité de Jensen. On a donc :

$$R_{N,p} \leq S_{N,p}^{-2} \left(\sum_{i=1..S_{N,p}} |s_i| \right) \leq S_{N,p}^{-2} N^d, \quad (10)$$

car, les s_i étant disjointes on a $\sum_{i=1..S_{N,p}} |s_i| \leq N^d$. D'après l'équation (9) de la partie 3.2, lorsque $p > p_c$ il existe $\delta > 0$ et $\alpha > 0$ qui vérifient :

$$P_p(S_{N,p} \geq \delta N^{d-1}) \geq 1 - \exp(-\alpha N^{d-1}). \quad (11)$$

Posons donc $\Omega'_N = \{S_{N,p} \geq \delta N^{d-1}\}$, c'est un évènement de probabilité proche de 1. On déduit de (10) et (11) que pour tout $\omega \in \Omega'_N$ on a :

$$R_{N,p}(\omega) \leq \frac{N^d}{\delta^2 N^{2d-2}} \leq \frac{N^{-(d-2)}}{\delta^2},$$

ce qui donne

$$\forall \omega \in \Omega'_N, R_{N,p}(\omega)N^{d-2} \leq \frac{1}{\delta^2}.$$

Ce qui termine la démonstration de la première assertion.

Pour la seconde assertion, on procède comme en (3.3). On choisit une direction privilégiée dans \mathbb{Z}^d et deux côtés opposés du cube que l'on note respectivement L et R . On a :

$$P_{p,N}(R_{N,p} < \infty) = P_{p,N}(L \leftrightarrow R) = \sum_{x \in L} P(x \leftrightarrow R), \quad (12)$$

or un chemin joignant $x \in L$ à R est de longueur $l \geq N$, donc de probabilité p^l . De plus, en dimension d , il existe au plus $(2d-1)^l$ chemins de longueur l partant de x et on déduit donc de (12) que :

$$P_{p,N}(R_{N,p} < \infty) \leq \sum_{x \in L} \sum_{l \geq N} (p(2d-1))^l \leq N \frac{(p(2d-1))^N}{1 - (2d-1)p},$$

ce qui donne pour p suffisamment petit, N suffisamment grand l'existence d'un $c > 0$ bien choisi tel que :

$$P_{p,N}(R_{N,p} < \infty) \leq \exp(-cN).$$

Donc pour tout N il existe un ensemble de configurations Ω'_N tel que $P_{p,N}(\Omega'_N) \geq 1 - \exp(-cN)$ et pour tout ω dans Ω'_N , $R_{p,N}(\omega) = \infty$. Ce qui termine la démonstration. ■

Références

- [1] Peter G. Doyle et J. Laurie Snell. *Random walks and electric networks*. The Mathematical Association of America, 1984.
- [2] Geoffrey R Grimmett. *Percolation*. New York NY Berlin Paris : Springer, 1989.