

# Pavages et théorie du potentiel

Nicolas Boissieu et Antoine Lallou  
Exposé proposé par Philippe Biane

24 juin 2004

## Résumé

On s'intéresse au problème suivant : peut-on paver un rectangle par des carrés de tailles différentes ? Nous utilisons une analogie entre les rectangles pavés par des carrés et les réseaux électriques (mise au point par Dehn en 1903). Nous appellerons *éléments* d'un pavage les carrés qui le composent (ou leurs côtés). Nous obtenons finalement deux résultats

- Tout rectangle pavé par des carrés a des côtés et des éléments commensurables
- Réciproquement, tout rectangle dont les côtés sont commensurables est pavable de façon parfaite (les éléments sont deux à deux distincts)

En associant un circuit électrique à chaque rectangle pavé, nous réduisons le problème à l'étude de certains courants dans des réseaux. Dans cette étude, nous nous appuyons essentiellement sur l'article de Brooks, Smith, Stone et Tutte à propos des pavages de rectangles ([3]).

# Table des matières

<b>1</b>	<b>Théorie électrique des réseaux</b>	<b>3</b>
1.1	Représentation matricielle . . . . .	3
1.2	Réseau électrique . . . . .	4
1.3	Modifications du réseau . . . . .	5
<b>2</b>	<b>Dipôle associé à un rectangle pavé</b>	<b>6</b>
2.1	Construction . . . . .	6
2.2	Analogie électrique . . . . .	7
<b>3</b>	<b>Dualité</b>	<b>8</b>
3.1	Définitions . . . . .	8
3.2	Propriétés . . . . .	9
3.3	Dualité polaire . . . . .	11
<b>4</b>	<b>Correspondance entre les dipôles et les rectangles pavés</b>	<b>12</b>
4.1	La forme normale d'un dipôle . . . . .	13
4.2	Correspondance . . . . .	14
<b>5</b>	<b>Construction des pavages</b>	<b>15</b>
5.1	Quelques pavages particuliers . . . . .	15
5.1.1	Méthode rotor-stator . . . . .	15
5.1.2	Construction de carrés parfaits . . . . .	15
<b>6</b>	<b>Conclusion</b>	<b>21</b>
	<b>Références</b>	<b>21</b>

# 1 Théorie électrique des réseaux

## 1.1 Représentation matricielle

**Définition 1.1.** Un graphe, (ou réseau)  $\mathcal{G}$  est un couple  $\mathcal{G} = (V, E)$ , où  $V$  est un ensemble fini de points, et  $E \subset V \times V \times \mathbb{N}^*$ , tel que :

$(i, j, n) \in E$  si et seulement si  $(j, i, n) \in E$ .

$(i, j, n) \in E \Rightarrow i \neq j$ . (On n'autorise pas les boucles)

Pour tous rappels utiles concernant la théorie des graphes, on se reportera à [1].

Les éléments de  $V$  sont appelés sommets.

Si  $(i, j, n) \in E$ , on dit que  $(i, j, n)$  et  $(j, i, n)$  représentent le même fil, ou arête. C'est le  $n$ -ième fil reliant  $i$  à  $j$ , dans ses deux orientations.

L'indice  $n \in \mathbb{N}^*$  est présent dans cette définition pour autoriser la présence de plusieurs fils reliant deux points  $i$  et  $j$ . On notera souvent les fils plus simplement  $(i, j)$ , s'il n'y a pas d'ambiguïté et  $i$  et  $j$  sont appelés les extrémités du fil  $(i, j, n)$

Un chemin est une suite  $a_1, \dots, a_n$  d'arêtes, telles que, pour  $i \neq 1, n$ ,  $a_i$  a une extrémité en commun avec  $a_{i-1}$  et l'autre avec  $a_{i+1}$ .

Un chemin est un circuit si de plus,  $a_{n-1}, a_n, a_1, a_2$  est encore un chemin.

Un graphe est dit connexe si pour tout  $(i, j) \in E$ , il existe un chemin reliant  $i$  à  $j$ .

**La matrice des conductances** Soit  $\mathcal{N}$  un graphe connexe de sommets  $P_1, \dots, P_N$  ( $N \geq 2$ ). On associe à chaque fil un réel positif, sa conductance. (Rappelons que  $(i, j, n)$  et  $(j, i, n)$  représentent un seul fil). Un graphe connexe sur lequel on définit ainsi des conductances s'appelle un réseau. Par analogie avec les réseaux électriques, on appellera souvent nœuds ses sommets.

Considérons la matrice  $\{c_{rs}\}$  définie par :

$$\text{Si } r \neq s, -c_{rs} = \begin{cases} \text{somme des conductances de tous les fils reliant } P_r \text{ et } P_s \\ 0 \text{ si } P_r \text{ et } P_s \text{ ne sont pas voisins} \end{cases}$$

$c_{rr} =$  somme des conductances de tous les fils reliant  $P_r$  à d'autres sommets

Lorsque toutes les conductances sont égales à 1, cette matrice est le produit de la matrice d'incidence du circuit électrique avec sa transposée(cf.[4]). Ainsi

$$c_{rs} = c_{sr}, \quad \sum_r c_{rs} = 0 \quad (1)$$

**Théorème 1.2.** Tous les cofacteurs de premier ordre sont égaux. On les note  $C$ , qu'on appelle la complexité du réseau

*Démonstration.*

$$\begin{vmatrix} c_{11} & \cdots & c_{1(s-1)} & 0 & c_{1(s+1)} & \cdots & c_{1N} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ c_{(r-1)1} & \cdots & c_{(r-1)(s-1)} & 0 & c_{(r-1)(s+1)} & \cdots & c_{(r-1)N} \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ c_{(r+1)1} & \cdots & c_{(r+1)(s-1)} & 0 & c_{(r+1)(s+1)} & \cdots & c_{(r+1)N} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ c_{N1} & \cdots & c_{N(s-1)} & 0 & c_{N(s+1)} & \cdots & c_{NN} \end{vmatrix}$$

En remplaçant la première ligne par la somme de toutes les lignes, puis en faisant  $r$  permutations de lignes, on obtient

$$(-1)^r \begin{vmatrix} 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ c_{21} & \cdots & c_{2(s-1)} & 0 & c_{2(s+1)} & \cdots & c_{2N} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ c_{(r-1)1} & \cdots & c_{(r-1)(s-1)} & 0 & c_{(r-1)(s+1)} & \cdots & c_{(r-1)N} \\ -c_{r1} & \cdots & -c_{r(s-1)} & 1 & -c_{r(s+1)} & \cdots & -c_{rN} \\ c_{(r+1)1} & \cdots & c_{(r+1)(s-1)} & 0 & c_{(r+1)(s+1)} & \cdots & c_{(r+1)N} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ c_{N1} & \cdots & c_{N(s-1)} & 0 & c_{N(s+1)} & \cdots & c_{NN} \end{vmatrix}$$

En utilisant le même procédé sur les colonnes, on aboutit au cofacteur  $C$  de  $c_{11}$ , indépendant de  $r$  et  $s$ . □

On montre plus tard (en 3.3) et de façon indépendante que  $C > 0$

**Définition 1.3.** On notera  $[rs, tu]$  le cofacteur d'ordre 2 obtenu en prenant le cofacteur de  $c_{su}$  dans le cofacteur de  $c_{rt}$ , avec  $r \neq s$  et  $t \neq u$ . On convient que  $[rr, tu] = [rs, tt] = 0$ .

On appelle ces quantités les transpédances de  $N$ , et on note  $V(r, s) = [rs, rs]$ , l'impédance de  $r, s$ .

**Lemme 1.4 (propriétés des transpédances).** Pour tous  $r, s, t, u \in [1, N]$ , on a :

- $[rs, tu] = [tu, rs] = -[rs, ut]$
- $\sum_x c_{tx} [rs, tx] = C \cdot (\delta_{ts} - \delta_{tr})$
- $[rs, tu] + [rs, uv] = [rs, tv]$

Dont on déduit,

- $V(r, s) = V(s, r), V(r, r) = 0$
- $2 \cdot [rs, tu] = V(ru) + V(st) - V(su) - V(rt)$

*Démonstration.* Nous ne détaillerons pas cette démonstration, qui consiste essentiellement à effectuer de simples manipulations matricielles. (transposition, multilinéarité du déterminant, ...) □

## 1.2 Réseau électrique

Nous allons introduire ici les outils permettant de fixer les notions intuitives de courant, de différence de potentiel, etc.

**Définition 1.5.** :

- (i) Un dipôle est un réseau  $\mathcal{G}$  connexe dont on distingue deux sommets particuliers  $x$  et  $y$ , qu'on appelle les pôles.
- (ii) Un courant électrique est une fonction  $I : E \rightarrow \mathbb{R}$  qui vérifie :

$$\begin{aligned} \forall (i, j, n), \quad (i, j, n) \in E &\Rightarrow I(i, j, n) = -I(j, i, n) \\ \text{Soient } X = \{(a, b, n) \in E; a = x\}, \quad Y = \{(a, b, n) \in E; b = y\} \\ \sum_{\alpha \in X} I(\alpha) &= \sum_{\beta \in Y} I(\beta) \end{aligned}$$

Cette quantité est le courant entrant en  $x$  et sortant en  $y$

$$\forall i \neq x, y \in V, \text{ soit } A = \{(a, b, n) \in E; a = i\}, \quad \text{alors } \sum_{\alpha \in A} I(\alpha) = 0$$

Ces deux dernières conditions s'appellent la loi des noeuds

- (iii) Une différence de potentiel est une fonction  $ddp : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$  qui vérifie :

$$\forall (i, j, n), (i, j, n) \in E \Rightarrow ddp(i, j) = c_{i,j,n}.I(j, i, n)$$

où  $c_{i,j,n}$  représente la conductance du fil  $(i, j, n)$

Cette condition s'appelle la loi d'Ohm.

$$\text{Pour tout circuit } (a_0, a_1), (a_1, a_2), \dots, (a_n, a_{n+1}=a_0),$$

$$\sum_{i=0}^{n+1} ddp(a_i, a_{i+1}) = 0.$$

Cette dernière condition s'appelle la loi des mailles.

La loi des mailles et la loi des nœuds sont appelées habituellement *lois de Kirchhoff*.

**Solution des lois de Kirchhoff** Soit  $\mathcal{N}$  un dipôle, on impose un courant  $I$  entrant en  $P_x$  et sortant en  $P_y$

**Théorème 1.6.** *Il existe une unique solution aux lois de Kirchhoff définie par*

$$ddp(P_s, P_r) = [xy, rs].I/C$$

**Lemme 1.7.** *On peut associer un potentiel  $V_r$  à chaque sommet  $P_r$ , tel que pour tous sommets  $P_r$  et  $P_s$  on ait  $V_r - V_s = ddpP_sP_r$ .*

*preuve du lemme.* On impose le potentiel  $V_x = 0$ , puis en utilisant la loi des mailles, on peut propager la valeur de  $V$  à tout le circuit.  $\square$

*Démonstration.* Pour  $r \in [2, N]$ , la loi des nœuds s'écrit

$$\sum_{s \neq r} (V_s - V_r).c_{rs} = -I.\delta_{r,N}$$

Ce qui s'écrit, puisque  $\sum_r c_{rs} = 0$  et  $V_x = 0$ , comme un système linéaire de  $N - 1$  équations à  $N - 1$  inconnues :

$$\sum_{s=2}^N V_s.c_{rs} = -I.\delta_{r,N}$$

Le déterminant vaut alors  $C \neq 0$ , et la résolution par les formules de Cramer donne :

$$V_r = [xy, xr].(-I)/C$$

En utilisant les propriétés élémentaires des transpédances présentées ci-dessus on obtient bien  $V_r - V_s = [xy, rs].I/C$   $\square$

### 1.3 Modifications du réseau

Nous allons maintenant voir quels sont les effets sur les transpédances de certaines modifications du réseau  $\mathcal{N}$ .

**Nouveau fil et nouveau sommet** On introduit un nouveau sommet  $P_0$  et un nouveau fil de conductance  $c$  qui joint  $P_m$  à  $P_0$ .

Dans le nouveau réseau  $\mathcal{N}_1$ , on a :

$$\begin{aligned} C_1 &= c.C, & V_1(m0) &= C \\ [ab, xy]_1 &= c[ab, xy] \text{ si } a, b, x, y \neq 0, & [ab, m0]_1 &= 0 \\ V_1(x0) &= V_1(xm) + V_1(m0) = c.V(xm) + C \end{aligned} \quad (2)$$

*Démonstration.* C'est immédiat en observant que la matrice est changée en

$$\begin{pmatrix} c & 0 & -c & 0 \\ 0 & & & \\ -c & & \mathcal{M} + c & \\ 0 & & & \end{pmatrix}$$

où  $\mathcal{M}$  est la matrice du réseau initial.  $\square$

**Identification de deux sommets** On identifie deux points  $P_x$  et  $P_y$ , en oubliant tous les fils qui les relient éventuellement.

Dans le nouveau réseau  $\mathcal{N}_2$ , on a :

$$\begin{aligned} C_2 &= [xy, xy] = V(xy) \\ [rs, tu]_2 &= \frac{[rs, tu].V(xy) - [rs, xy].[tu, xy]}{C} \\ \text{En particulier, } V_2(rs) &= \frac{V(rs).V(xy) - [rs, xy]^2}{C} \end{aligned} \quad (3)$$

*Démonstration.* La première égalité est immédiate en observant la matrice après modification.

Pour la deuxième égalité :

Considérons un courant  $I$  entrant en  $r$  et sortant en  $s$ . Posons alors  $ddp(t, u) = [rs, tu]_2.I/C_2$ . Il est rapide grâce aux équations 1.4 de voir que la fonction  $ddp$  ainsi définie satisfait les lois de Kirchhoff (loi des mailles, et loi des nœuds dans  $\mathcal{N}_3$ ).

De plus, on a bien  $\sum_u c_{su}[rs, su]_2 = C_2$ .

La fonction  $ddp$  est donc l'*unique* solution au problème de Kirchhoff 1.6, et donc les  $[rs, tu]_2$  sont correctement définies.  $\square$

**Nouveau fil entre deux sommets existants** On rajoute un fil de conductance  $c$  entre deux points  $P_x$  et  $P_y$

Dans le nouveau réseau  $\mathcal{N}_3$ , on a :

$$\begin{aligned} C_3 &= C + c.V(xy) = C + c.C_2 \\ [rs, xy]_3 &= [rs, xy], \text{ et en particulier } V_3(xy) = V(xy) \\ [rs, tu]_3 &= [rs, tu] + c[rs, tu]_2 \end{aligned} \quad (4)$$

*Démonstration.* Ces résultats s'obtiennent en procédant par étapes. Tout d'abord, on rajoute un nouveau sommet  $P_0$  et on relie  $P_x$  à  $P_0$  par un fil de conductance  $c$ . Puis on identifie les sommets  $P_0$  et  $P_y$ . Le résultat est alors immédiat en appliquant successivement (2) puis (3).  $\square$

## 2 Dipôle associé à un rectangle pavé

### 2.1 Construction

Considérons un rectangle  $R$  pavé par des carrés. Nous allons décrire ici comment construire un réseau à partir de ce rectangle. Les côtés des éléments de  $R$  sont parallèles à deux axes perpendiculaires. On définit arbitrairement l'un de ces axes comme étant l'axe horizontal.

Nous verrons plus tard que les deux choix ne diffèrent pas fondamentalement. Cependant, il est pratique pour la théorie de distinguer  $R$  du rectangle obtenu avec l'autre orientation, que nous appellerons rectangle *conjugué* de  $R$ .

Considérons l'ensemble formé des côtés horizontaux des carrés (ou *éléments*) du pavage. On note alors  $p_1, \dots, p_N$  les composantes connexes de

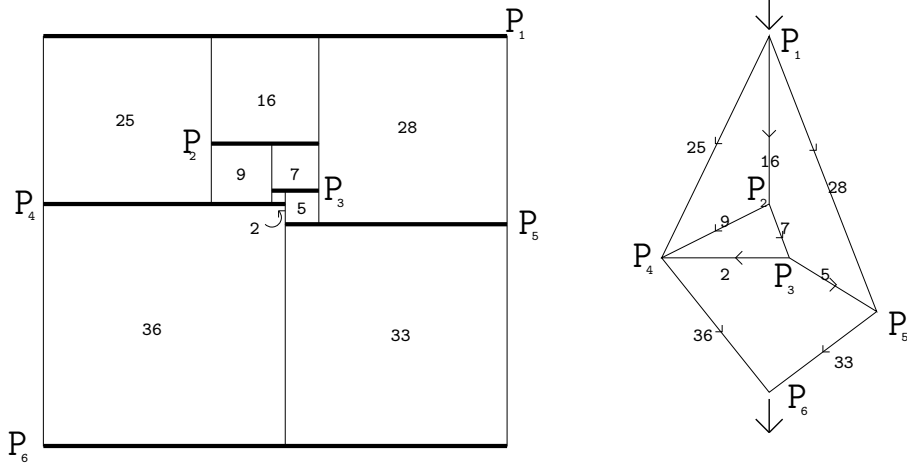


FIG. 1 – Exemple de réseau associé à un pavage de rectangle

cet ensemble. Chaque  $p_i$  est un segment horizontal. Choisissons ensuite  $N$  points  $P_1, \dots, P_N$  dans le plan.

Soit un élément  $E$  du pavage, son côté supérieur est inclus dans un des  $p_i$ , par exemple  $p_{i_0}$ . De même, son côté inférieur est inclus dans  $p_{j_0}$ .

On relie alors les points  $P_{i_0}$  et  $P_{j_0}$  par un fil, orienté de  $P_{i_0}$  à  $P_{j_0}$ .

En répétant cette opération pour tous les éléments du pavage, on obtient un graphe orienté associé au rectangle  $R$ .

Les points  $P_1$  et  $P_N$  sont appelés les *pôles* du réseau.

On peut réaliser, en choisissant judicieusement les points  $P_i$  (par exemple en prenant  $P_i$  au milieu de  $p_i$ ), et les arcs entre ceux-ci, les deux conditions suivantes :

**Lemme 2.1 (propriétés).** *Le réseau est plan et deux arêtes ne se croisent jamais sauf en un nœud.*

*Aucun circuit n'entoure un pôle.*

Considérons notre circuit comme un complexe cellulaire du plan, c'est-à-dire une partition du plan en points, segments ouverts de courbes de dimension 1 reliant deux points, et composantes connexes de l'ensemble restant, objets qu'on peut aussi appeler cellules de dimension 0,1 et 2. La condition «aucun circuit n'entoure un pôle» signifie : les pôles sont sur la frontière de la cellule infinie de dimension deux.

On voit également immédiatement qu'on a obtenu un graphe connexe, donc qu'on a bien défini un *réseau*.

## 2.2 Analogie électrique

Nous allons ici définir une fonction  $I$  sur l'ensemble des arêtes (orientées) du dipôle obtenu précédemment.

Associons à chaque fil  $P_i P_j$  orienté par la construction précédente, un réel positif  $I_{ij}$  égal à la longueur du côté du carré correspondant. On associe alors au fil orienté dans l'autre sens  $P_j P_i$  le réel  $I_{ji} = -I_{ij}$ .

De plus, imposons à chaque fil une *conductance* égale à 1. On appellera la fonction  $I$  fonction *courant*. Notons  $ddp(i, j) = I(j, i)$ .

Les propriétés du pavage donnent alors les :

**Lemme 2.2 (Lois de Kirchhoff).** :

- La somme algébrique des courants en un point  $P_i, (i \neq 0, N)$  est nulle.  
La fonction  $I$  vérifie donc la loi des nœuds.
- La somme algébrique des courants le long d'un circuit est nulle.  
La fonction  $ddp$  vérifie donc la loi des mailles.
- Le courant issu de  $P_1$  ou sortant en  $P_N$  est égal à la longueur du côté horizontal de  $R$  : C'est l'intensité totale du réseau électrique.

*Démonstration.* Ces propriétés sont faciles à obtenir en observant le pavage. Par exemple, la première exprime que pour chaque  $P_i, i \neq 1, N$ , le courant entrant et le courant sortant sont égaux, car ils valent tous les deux la longueur du segment  $p_i$ .  $\square$

Le deuxième alinéa permet d'étendre la fonction  $ddp$  de manière unique en un fonction qui respecte la loi des mailles.

Les propriétés (2.2) correspondent alors aux lois de Kirchhoff habituelles (1.5).

On peut donc appliquer les résultats (1.6). Dans ce cas, pour tous  $r, s, t, u$ , on a  $[rs, tu] \in \mathbb{Z}$ . Or l'intensité dans un fil est la longueur de l'élément correspondant dans le pavage. Donc les rapports entre les éléments du pavages sont toujours rationnels.

Nous venons donc d'obtenir un premier résultat intéressant :

**Théorème 2.3.** *Tout rectangle pavé par des carrés a des côtés et des éléments commensurables.*

## 3 Dualité

### 3.1 Définitions

On appelle *dipôle unitaire* un dipôle dont toutes les conductances valent 1. Par la suite, et sauf indication contraire, tous les dipôles considérés seront unitaires.

Remarquons que dans un dipôle unitaire, si une fonction courant est définie, alors la différence de potentiel est également bien définie par  $ddp(i, j) = -I(i, j)$ . Ainsi, la loi des mailles s'énonce en termes de courants :

la somme algébrique des courants le long d'un circuit est nulle.

Inscrivons un réseau électrique  $\mathcal{N}$  dans la sphère de dimension deux. Une *face* de  $\mathcal{N}$  est une composante connexe du complémentaire de  $\mathcal{N}$  sur la sphère. Étant donné un fil  $(P_i, P_j)$  du réseau, on peut mettre dans l'ordre les deux faces  $x$  et  $x'$  adjacentes à ce fil : lorsqu'on va de  $P_i$  à  $P_j$ , si c'est  $x$  qui se trouve sur la gauche, alors on pose  $(x, x') = *(i, j)$ . Pour davantage de détails, on peut se référer à l'article [2].

On définit ainsi un réseau dont les sommets sont les  $x$  correspondants aux faces de  $\mathcal{N}$ , et les arêtes les  $(x, x')$ . Un réseau  $\mathcal{N}^*$  ainsi défini est appelé *dual* de  $\mathcal{N}$ .

Ainsi,  $(x, x')$  est un fil du dual  $\mathcal{N}^*$  de  $\mathcal{N}$ , sa conductance est définie comme l'inverse de celle de  $(i, j)$ .



Le réseau $\mathcal{N}$	Le réseau $\mathcal{N}^*$
Une face	Un sommet
Un sommet	Une face
Une arête $(i,j)$	Une arête $(x, x') = *(i, j)$

FIG. 2 – Correspondance entre un réseau et son dual

On vérifie aisément que  $\mathcal{N}^{**} = \mathcal{N}$ .

Le dual d'un réseau unitaire est un réseau unitaire.

Nous allons désormais introduire un formalisme très pratique pour traiter des courants et des lois de Kirchhoff sur un réseau.

**Définition 3.1.** :

- Soit  $\mathcal{N}$  un dipôle à  $k$  fils. Chaque fil a deux orientations. On en fixe une arbitrairement. Le dipôle est alors orienté.
- Une chaîne sur un dipôle orienté à  $k$  fils  $(e_1, e_2, \dots, e_k)$  est un  $k$ -uplet  $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k)$ ,  $\alpha_i \in \mathbb{R}$ .  
Intuitivement, on associe à chaque fil un courant.
- L'opérateur bord  $\partial$  est l'opérateur  $k$ -linéaire défini de l'ensemble des chaînes sur  $\mathcal{P}$  à valeurs dans les  $N$ -uplets de réels où  $N$  désigne le nombre de nœuds  $(P_1, \dots, P_N)$  de  $\mathcal{P}$  par :

$$\partial(j, i) = P_i - P_j.$$

C'est une somme formelle de points.

Ainsi si  $\partial(\mathcal{K}) = (\alpha_1, \dots, \alpha_N)$ ;  $\alpha_i$  représente la somme des courants arrivant en  $P_i$  dans la chaîne  $\mathcal{K}$ .

- On définit alors l'opérateur cobord  $\delta$  de la façon suivante : soit une chaîne  $\mathcal{K}$  sur  $\mathcal{P}$ ,

$$\delta(\mathcal{K}^*) = (\partial(\mathcal{K}))^*$$

où :

$$(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_N)^* = (\alpha_1 e_1 + \dots + \alpha_N e_N)^* = \alpha_1 e_1^* + \dots + \alpha_N e_N^*$$

- Une chaîne  $\mathcal{K}$  sur  $\mathcal{P}$  est dite de Kirchhoff lorsque ses coefficients définissent des courants vérifiant les lois de Kirchhoff dans  $\mathcal{P}$ .
- Soit  $\mathcal{K}$  une chaîne dans un réseau orienté  $\mathcal{K}$  est un cycle lorsque son bord est nul :  $\partial(\mathcal{K}) = 0$ .  
 $\mathcal{K}$  est un cocycle lorsque son cobord est nul :  $\delta(\mathcal{K}) = 0$ , ou, de manière équivalente, si sa chaîne duale est un cycle.

## 3.2 Propriétés

**Lemme 3.2 (Traduction des lois de Kirchhoff).** Une chaîne  $\mathcal{K}$  sur un dipôle  $\mathcal{P}$  est de Kirchhoff si, et seulement si c'est un cycle modulo ses pôles et un cocycle (absolu).

*Démonstration.* C'est un cycle modulo les pôles si, et seulement si la loi des nœuds est vérifiée. C'est un cocycle *absolu* (ie. sans avoir besoin d'identifier les pôles) si, et seulement si la loi des mailles est vérifiée partout.

Pour se convaincre de cette seconde affirmation, il suffit de remarquer que la loi des noeuds en un point équivaut à celle des mailles exprimée à propos du chemin qui entoure la surface duale de ce point. Or le dual de la chaîne de Kirchhoff que nous considérons respecte la loi des noeuds **partout** puisque la loi des mailles s'applique tout autour de **chacune** des surfaces de la sphère où l'on a inscrit le dipôle. Donc la chaîne de Kirchhoff considérée est bien un cocycle. La réciproque ne pose aucun problème.  $\square$

On dit qu'une chaîne de Kirchhoff  $\mathcal{K}$  définie sur un dipôle  $\mathcal{P}$  de pôles  $P_a$  et  $P_b$  est la *chaîne de Kirchhoff entière* associée à  $\mathcal{P}$  lorsque  $I = C$ , où  $I$  est le courant sortant de  $P_a$  (qui est égal à celui sortant de  $P_b$  parce que  $\mathcal{K}$  est un cycle quand on identifie ses deux pôles). En effet, d'après 1.6, on a unicité des courants dans une chaîne de Kirchhoff à un facteur près, qui est précisément  $C/I$ .

On dit qu'une chaîne de Kirchhoff  $\mathcal{K}$  définie sur un dipôle  $\mathcal{P}$  de pôles  $P_a$  et  $P_b$  est la *chaîne de Kirchhoff réduite* associée à  $\mathcal{P}$  lorsque  $I = C/\rho$ , où  $\rho$  est le p.g.c.d. des  $[xy, rs] = \overrightarrow{P_s P_r} \cdot \frac{C}{I}$ . On rappelle que la chaîne de Kirchhoff est interprétée comme donnant les  $\overrightarrow{P_r P_s}$  dans le réseau  $\mathcal{P}$ .

**Sous-arbres** Un *sous-arbre*  $\mathcal{M}$  d'un réseau  $\mathcal{N}$  est un sous-réseau de  $\mathcal{N}$  (c'est-à-dire un réseau qui a les mêmes nœuds et qui a pour fils une sous-partie de l'ensemble de ceux de  $\mathcal{N}$ ) qui est connexe et sans circuit.

Étant donnée une énumération de tous les sous-arbres de  $\mathcal{N}$ , on note  $M_r$  le produit des conductances des fils du  $r$ -ième arbre. On pose alors :

$$H = \sum_r M_r$$

Lorsqu'un nouveau fil de conductance  $c$  est inséré entre  $P_x$  et  $P_y$ , la nouvelle valeur de  $H$  est :

$$H_3 = H + c.H_2$$

où  $H_2$  est la nouvelle valeur de  $H$  lorsqu'on identifie  $P_x$  et  $P_y$ .

On remarque que c'est la même relation qui lie les complexités de ces réseaux.

Ainsi, dans le cas d'un réseau à deux sommets et un fil,

$$C = \text{somme des conductances de tous les fils reliant } P_x \text{ à } P_y = H.$$

Par récurrence sur le nombre de fils on a donc :

**Théorème 3.3.** *Soit  $\mathcal{N}$  un réseau électrique (ie. connexe et défini avec des inductances) à au moins deux nœuds,  $C = H$ . Si les conductances sont toutes positives,  $C > 0$ .*

**Remarque** Dans le cas d'un dipôle, toutes les conductances sont égales à 1, donc  $C$  est exactement le nombre de sous-arbres du dipôle.

**Complexité du dual d'un réseau unitaire** Soit  $\mathcal{N}$  un réseau inscrit dans une sphère. On note  $\mathcal{N}^*$  son dual sur la sphère. On appelle *codual* d'un sous-réseau  $\mathcal{M}$  de  $\mathcal{N}$  le sous-réseau  $\mathcal{M}^c$  de  $\mathcal{N}^*$  dont les fils sont ceux des fils de  $\mathcal{N}^*$  qui ne sont le dual d'aucun fil de  $\mathcal{M}$ .

**Proposition 1.** *Un sous-réseau  $\mathcal{M}$  d'un réseau  $\mathcal{N}$  est un sous-arbre si, et seulement si  $\mathcal{M}$  et  $\mathcal{M}^c$  sont connexes.*

*Démonstration.* Il suffit de remarquer que  $\mathcal{M}$  est connexe si, et seulement si  $\mathcal{M}^c$  est sans circuits. C'est équivalent à ce qu'on veut prouver car on vérifie aisément que  $\mathcal{M}^{cc} = \mathcal{M}$ .

L'existence d'un circuit dans  $\mathcal{M}^c$  signifie que une ou plusieurs faces sont incluses dans une surface exclusivement délimitée par des fils de  $\mathcal{M}^c$ . De façon équivalente, les deux de ces faces forment une sous partie de l'ensemble des points du réseau, qui ne peut être reliée au reste sans utiliser au moins un fil du complémentaire de  $\mathcal{M}$  dans  $\mathcal{N}$ , ce qui fait que  $\mathcal{M}$  n'est pas connexe.  $\square$

**Corollaire 3.4.** *Un sous-réseau  $\mathcal{M}$  de  $\mathcal{N}$  est un sous-arbre si, et seulement si  $\mathcal{M}^c$  est un sous-arbre de  $\mathcal{N}^*$ .*

**Théorème 3.5.** *Un réseau électrique unitaire (ie. où toutes les conductances valent 1) a la même complexité que son dual.*

*Démonstration.* Soit  $\mathcal{N}$  un réseau électrique quelconque. Soit  $M_r^*$  le produit des conductances des fils dans le sous-arbre de  $\mathcal{N}^*$  qui est le dual du  $r$ -ième sous-arbre de  $\mathcal{N}$ . Soit  $\omega$  le produit des conductances de tous les fils de  $\mathcal{N}$ . Alors,

$$M_r = \omega.M_r^*$$

Puis, en notant  $C^*$  la complexité de  $\mathcal{N}^*$  on trouve que  $\omega.C^* = C$ . Dans le cas où  $\mathcal{N}$  est un réseau unitaire, on trouve  $C^* = C$ .  $\square$

### 3.3 Dualité polaire

**Définitions** Soit  $\mathcal{P}$  un dipôle, tracé dans le plan. On peut relier ses pôles en ajoutant un nouveau fil  $e_0$  sans remettre en cause la propriété 2.1.

Le réseau  $\mathcal{C}$  obtenu est appelé le *complété* de  $\mathcal{P}$ . On inscrit ce complété dans la sphère de dimension deux. Soit  $C^*$  son dual. En ôtant dans  $C^*$  le fil  $e_0^*$  (le dual de  $e_0$ ) et en choisissant ses extrémités comme pôles, on obtient un dipôle  $\mathcal{P}'$ , qu'on appelle le *dual polaire* de  $\mathcal{P}$ .

**Théorème 3.6.** *Le dual polaire de la chaîne de Kirchhoff entière sur un dipôle  $\mathcal{P}$  est la chaîne de Kirchhoff entière sur le dual polaire  $\mathcal{P}'$  de  $\mathcal{P}$ .*

*Démonstration.* On convient de noter  $\mathcal{SN}$  le complexe cellulaire donné par un réseau inscrit sur la sphère de dimension deux. Comme d'habitude,  $*$  désigne la dualité sur cette sphère.

La chaîne de Kirchhoff pleine  $\mathcal{K}$  sur  $\mathcal{P}$  est un cycle relativement à  $P_1$  et  $P_N$  et un cocycle absolu. On en déduit que sur  $\mathcal{SC}$  ( $\mathcal{C}$  étant le complété de  $\mathcal{P}$ )  $\mathcal{K}$  est :

- (i) un cycle modulo  $P_1, P_N$
- (ii) un cocycle modulo les cellules de dimension deux (ou faces), notées  $\sigma_1$  et  $\sigma_2$ , qui sont adjacentes à  $e_0$ , le fil supplémentaire.

En dualisant ces résultats, dans  $\mathcal{SC}^*$ , il vient :

- (i')  $\mathcal{K}^*$  est un cocycle modulo les cellules (de dimension deux)  $P_1^*$  et  $P_N^*$
- (ii')  $\mathcal{K}^*$  est un cycle modulo  $\sigma_1^*$  et  $\sigma_2^*$ , qui sont les pôles de  $\mathcal{P}'$ .

Or  $\mathcal{K}$  a un coefficient nul pour  $e_0$  donc  $\mathcal{K}^*$  a un coefficient nul pour  $e_0^*$ . On en déduit que  $\mathcal{K}^*$  est (d'après (i')) un cycle sur  $\mathcal{SP}'$  modulo ses pôles et, d'après (ii'), un cocycle sur  $\mathcal{SP}'$  modulo la cellule de dimension deux résultant de la refonte de  $P_1^*$  et  $P_N^*$  en une seule face. C'est donc un cocycle *absolu* (ie. sans avoir besoin d'identifier deux points), car la loi des mailles étant vraie sur le complémentaire de la cellule infinie, elle reste vraie sur cette cellule.

$\mathcal{K}^*$  est donc une chaîne de Kirchhoff sur  $\mathcal{P}'$ . Il reste à voir que c'est la chaîne entière. Posons  $\mathcal{K}'$  la chaîne entière. Soit  $k$  tel que  $\mathcal{K}^* = k.\mathcal{K}'$ .

Notons  $C$  la complexité et  $V = V(1N)$  dans le réseau  $\mathcal{P}$  et  $C', V'$  les quantités correspondantes dans  $\mathcal{P}'$ . on a

$$\partial\mathcal{K} = C.(P_1 - P_N)$$

En dualisant, on obtient,

$$\delta\mathcal{K}^* = C.(P_1^* - P_N^*)$$

Ainsi  $C$  correspond à la somme des courants autour de  $P_1^*$  dans  $\mathcal{K}^*$ .

C'est donc également la somme des courants le long d'un chemin reliant les deux extrémités de  $e_0^*$ , c'est à dire, la différence de potentiel total entre les pôles de  $\mathcal{P}'$ , dans la chaîne  $\mathcal{K}^*$

Ainsi,

$$C = k.V'$$

On obtient de même  $C' = (1/k).V$

Or on sait par (4) que la complexité de  $\mathcal{C}$  est  $C + V$ . De même, celle de  $\mathcal{C}^*$  vaut  $C' + V'$ .

Les égalités précédentes donnent  $C' + V' = k(C + V)$ . Or on sait que les complexités de deux réseaux polaires duaux sont égales.

Donc  $k = 1$ . Au passage, on a montré que  $C' = V$  et  $V' = C$ .  $\square$

## 4 Correspondance entre les dipôles et les rectangles pavés

Le but de cette partie est d'établir qu'à chaque dipôle (unitaire) correspond un rectangle pavé. Nous cherchons aussi à expliciter les classes d'équivalence de dipôles pour la relation «donner le même rectangle pavé». Nous verrons aussi qu'un dipôle et son dual polaire donnent des rectangles pavés conjugués.

**Lemme 4.1.** *Soit  $\mathcal{K}$  une chaîne de Kirchhoff sur un dipôle  $\mathcal{P}$ , de pôles  $P_1$  et  $P_N$  (dans le bon ordre). Alors,*

- (i) *le potentiel en chaque nœud est compris entre les potentiels des pôles*
- (ii) *aucun courant positif n'arrive à  $P_1$  et aucun ne part de  $P_N$*
- (iii) *pour tout nœud  $P_i$ , il existe un secteur angulaire qui contient tous les courants qui arrivent à  $P_i$  et dont le complémentaire contient tous ceux qui partent de  $P_i$*
- (iv) *sur la frontière d'une cellule de dimension deux de  $\mathcal{SP}$ , il existe deux nœuds  $P_i$  et  $P_j$  tels qu'aucun courant n'arrive en  $P_i$  et aucun ne part de  $P_j$ .*

*Démonstration.* Appelons les pôles  $P_1$  et  $P_N$  de sorte que  $P_1$  ait un potentiel supérieur à  $P_N$ .

- (i) Soit  $P_i$  un nœud, supposons qu'un courant non nul entre dans  $P_i$ . Alors, par la loi des nœuds un courant non nul sort nécessairement de  $P_i$ , par au moins un fil, qui relie  $P_i$  à un autre nœud qu'on appelle  $P_j$ . On peut répéter cette opération jusqu'à atteindre un pôle. En effet, à chaque étape le potentiel descend strictement, donc on ne revient pas à un nœud déjà visité. On a montré que le potentiel de  $P_i$  est supérieur à celui du pôle ainsi atteint. On montre pareillement que le potentiel de  $P_i$  est inférieur à celui de l'autre pôle, qui est donc nécessairement  $P_1$ .  
Si tous les courants sont nuls dans les fils adjacents à  $P_i$  on peut le relier à un autre nœud de même potentiel, pour qui ce n'est pas le cas. On a donc le même résultat.
- (ii) C'est une conséquence directe de (i).
- (iii) C'est évident pour les pôles. Soit  $i \neq 1, N$ , tel que deux courants non nuls entrant dans  $i$  séparent dans le plan deux courants non nuls sortant de  $i$ . En faisant une construction identique à celle de la démonstration (i), on peut prolonger chacun des quatre fils en quatre chemins dont deux vont directement à  $P_1$  (ceux des fils entrants) alors que les deux autres vont directement à  $P_N$ . Nécessairement, un des chemins allant à  $P_1$  croise un de ceux allant à  $P_N$ , en un nœud  $P_k$ , qui se trouve alors avoir un potentiel strictement plus haut et strictement plus bas que  $P_i$ , ce qui est absurde.
- (iv) Cette proposition est la duale de la précédente pour chacune des faces finies. Pour la face extérieure (la seule infinie), elle est vraie en prenant les pôles. On dira métaphoriquement que  $P_i$  est le point *en amont* et  $P_j$  le point *en aval*.

□

## 4.1 La forme normale d'un dipôle

Considérons un dipôle  $\mathcal{P}$  inscrit dans le plan de telle sorte que ses pôles  $P_1$  et  $P_N$  puissent être reliés par un fil extérieur. Pour le rendre le plus proche possible d'un dipôle associé à un rectangle pavé, nous effectuons les opérations ci-dessous :

- Considérons une chaîne de Kirchhoff  $\mathcal{K}$  sur  $\mathcal{P}$ . Ôtons tous les fils où le courant est nul, ainsi que tous les nœuds où tous les courants sont nuls.
- Nous obtenons ainsi un nouveau dipôle dont les pôles sont  $P_1$  et  $P_N$ . En effet, le graphe reste connexe car  $C > 0$ , donc  $I > 0$ . Par ailleurs, il résulte de 3.2 que  $\mathcal{K}$  est une chaîne de Kirchhoff sur ce nouveau dipôle  $\mathcal{N}$ .
- Considérons maintenant chacune des cellules de dimension deux de  $\mathcal{SP}$ , hormis celle par laquelle les deux pôles sont susceptibles d'être reliés (qui est infinie dans le plan). Le lemme précédent nous permet de dire qu'une telle surface  $\sigma$  est homéomorphe à un polygone convexe possédant un point d'amont et un point d'aval, ie. tels que les potentiels aux différents nœuds de sa frontière augmentent avec leur altitude. Comme il n'y a, par hypothèse, aucun courant nul, les potentiels augmentent strictement. Il est donc clair que les sommets équipotents forment des singletons ou des paires sur la frontière de  $\sigma$ . Identifions ces paires par déformation du dipôle, en passant exclusivement par la surface  $\sigma$ .

- À la suite de ces opérations, nous obtenons un nouveau dipôle  $\mathcal{N}_0$ , doté des mêmes pôles, et sur lequel  $\mathcal{K}$  est une chaîne de Kirchhoff. Il n’y a maintenant plus de paires de nœuds équipotents qu’on puisse joindre sans faire se croiser des fils. En particulier, il n’y a aucun courant nul.

**Définition** Le dipôle  $\mathcal{N}_0$  est appelé la *forme normale* du dipôle  $\mathcal{P}$ . Il est facile de remarquer que le dipôle associé à rectangle pavé se présente toujours sous sa forme normale.

## 4.2 Correspondance

**Théorème 4.2.** *À tout dipôle  $\mathcal{P}$  du plan correspond un rectangle pavé  $R$ , dont le dipôle associé est la forme normale de  $\mathcal{P}$ . Un dipôle et son dual correspondent nécessairement à un rectangle pavé et à son conjugué.*

*Démonstration.* Soit  $\mathcal{K}$  la chaîne de Kirchhoff entière sur  $\mathcal{P}$  (sa chaîne duale est  $\mathcal{K}'$ , la chaîne de Kirchhoff entière sur  $\mathcal{P}'$  d’après 3.6). On note  $C$  sa complexité et  $V$  la différence totale de potentiel, ainsi on aura pour  $\mathcal{K}'$  une complexité  $V$  et une d.d.p.  $C$ . On fixe le plus petit potentiel à zéro dans  $\mathcal{P}$  comme dans  $\mathcal{P}'$ .

Considérons maintenant un fil  $e$ , entre deux nœuds de potentiels respectifs  $V_1$  et  $V_2$ .

On a :  $V_1 - V_2 = \text{courant dans } E = \text{courant dans } e^* = V_2' - V_1'$ , par définition du dual d’une chaîne de Kirchhoff.

Construisons alors un rectangle pavé de hauteur  $V$  et de base  $C$  en associant à chaque fil le carré de côtés horizontaux placés aux hauteurs  $V_1$  et  $V_2$ , et de côtés verticaux placés aux distances  $V_1'$  et  $V_2'$  du côté gauche du rectangle. Il nous reste à prouver que les carrés ne se chevauchent pas et qu’ils recouvrent bien le rectangle.

**Définition** On dit qu’un fil  $e$  *contient*  $(\lambda, \cdot)$  lorsque  $V_1' < \lambda < V_2'$ . On dit que  $e$  *contient*  $(\cdot, \mu)$  ou *passé par le potentiel*  $\mu$  lorsque  $V_1 < \mu < V_2$ . Enfin,  $e$  *contient*  $(\lambda, \mu)$  lorsque les deux conditions sont vérifiées.

**Lemme 4.3.** *Soit  $\lambda < C$ . Les fils de  $\mathcal{P}$  contenant  $(\lambda, \cdot)$  forment un unique chemin d’un pôle à l’autre, où la direction du courant est constante.*

*preuve du lemme.* Tout d’abord, il ne peut y avoir qu’un seul de ces fils partant du pôle supérieur et un seul arrivant au pôle inférieur. En effet, considérons les fils duaux de ceux partant de  $P_1$ , ils constituent un chemin direct entre les pôles  $P_1'$  et  $P_N'$  où le courant ne change pas de sens (sinon par dualité on aurait un courant qui entre dans le pôle  $P_1$ ) donc un seul de ces fils passe par le potentiel  $\lambda$ , ce qui équivaut à dire qu’un seul fil partant de  $P_1$  contient  $(\lambda, \cdot)$ .

Ensuite, remarquons que d’un sommet  $P_i$  où arrive un tel fil, un et un seul fil de ce genre peut repartir. C’est ce qu’on obtient en dualisant le nœud  $P_i$  en une maille, qui se présente comme un polygone convexe avec un point amont et un point aval pour les potentiels (d’après le lemme 4.1). Une fois que la question se présente comme cela, il est évident qu’il n’y a que deux fils autour de cette maille qui passent par le potentiel  $\lambda$ , donc on a notre résultat.

Finalement, par récurrence, on obtient que les fils contenant  $(\lambda, \cdot)$  forment un chemin de pôle à pôle où le courant ne change jamais de sens.  $\square$

**suite de la preuve du théorème** Les potentiels augmentent tout au long d'un tel chemin, donc il y a un fil, et un seul, qui contient  $(\lambda, \mu)$ , pour  $\mu < V$ . Or, pour  $\lambda < C$  et  $\mu < V$ ,  $(\lambda, \mu)$  correspond à un point du rectangle. On a ainsi montré que chaque point du rectangle appartient à un carré et un seul.

Il apparaît clairement, à la lumière de cette construction, que le dual polaire  $\mathcal{P}'$  de  $\mathcal{P}$  donne le rectangle conjugué de  $R$ , c'est-à-dire le même rectangle pavé, en inversant l'axe des abscisses et celui des ordonnées.  $\square$

**Notation** Comme le suggère la construction effectuée pour démontrer le théorème, il est souvent pratique d'appeler *côté horizontal* du rectangle la complexité du dipôle correspondant. On note cela  $H = C$ .

## 5 Construction des pavages

### 5.1 Quelques pavages particuliers

On construit ici certains pavages particuliers qui nous serviront par la suite dans le cas général.

#### 5.1.1 Méthode rotor-stator

Soit  $\mathcal{P}$  un dipôle contenant une partie  $\mathcal{Q}$  reliée au reste par les sommets  $A_1, \dots, A_N$ , et ne contenant pas de pôle (sauf éventuellement parmi les sommets  $A_i$ ), et qui possède une symétrie de rotation pour laquelle les  $A_i$  forment une orbite. Supposons également que  $\mathcal{Q}$  n'est pas invariant par une certaine réflexion qui laisse globalement fixe les  $A_i$ .

Alors on peut modifier le réseau de cette façon :

On remplace  $\mathcal{Q}$  par sa réflexion, et on laisse  $\mathcal{P} - \mathcal{Q}$  fixe.  $\mathcal{Q}$  s'appelle le *rotor* et  $\mathcal{P} - \mathcal{Q}$  le *stator*. Pour une illustration, se reporter aux figures 6 et 7.

On montre alors que les *courants entiers* (ie, ceux lorsque  $I = C$ ) sont inchangés dans le stator. Ceci nous donne des rectangles équivalents avec des éléments différents.

#### 5.1.2 Construction de carrés parfaits

**Définitions** On dit qu'un rectangle pavé est *parfait* lorsque tous les *éléments* du pavage (les carrés qui le composent) sont deux à deux distincts. On dit de deux rectangles pavés qu'ils sont *conformes* s'ils ont des côtés proportionnels (même forme)

Deux rectangles conformes sont *totalement différents* si aucun élément de l'un n'est présent dans l'autre (après avoir redimensionné les rectangles)

Si l'on dispose de deux rectangles totalement différents, alors la figure 3 nous montre comment obtenir simplement un *carré parfait*.

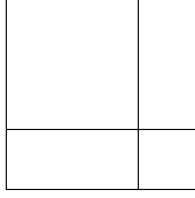


FIG. 3 –

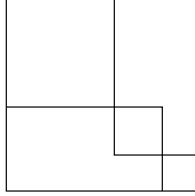


FIG. 4 –

**Méthode de symétrie** Les rectangles obtenus par la méthode de rotor-stator peuvent également nous fournir un carré parfait.

En effet, dans le cas où le stator consiste en un unique fil dont une extrémité est un pôle, et situé à l'extérieur du réseau, les rectangles équivalents obtenus ont, *en général*, un seul élément en commun, celui qui correspond au fil du stator. Le cas contraire peut se produire, mais pas dans l'exemple qui nous intéresse par la suite. Cet élément commun est situé dans le coin, et on peut ainsi, comme le montre la figure 4, créer un carré en superposant ces deux éléments identiques.

**Les rectangles  $\mathcal{R}_n$**  On considère le dipôle représenté sur la figure 5.

$$\text{Posons } \phi_r = \frac{(2+\sqrt{3})^r - (2-\sqrt{3})^r}{2\sqrt{3}}$$

$(2 + \sqrt{3})$  et  $(2 - \sqrt{3})$  sont les deux racines du polynôme  $X^2 - 4X + 1$   $\phi_r$  est donc défini par la relation de récurrence :

$$\begin{cases} \phi_{r+1} - 4\phi_r + \phi_{r-1} = 0 \\ \phi_0 = 0 \\ \phi_r = 1 \end{cases}$$

Ce qui nous donne en particulier que  $\forall r, \phi_r \in \mathbb{Z}$

Alors les solutions aux équations de kirchhoff sont donnés par

**Lemme 5.1.** *Le courant dans  $P_0P_r$  est  $a_r$ , où*

$$a_r = 1/2.[5\phi_n + \phi_{n-1} + 3\phi_r - 3\phi_{r-1}] \quad \text{si } 0 < r < n; \quad \text{et } a_{n+1} = 3\phi_n.$$

*Le courant dans  $P_rQ_0$  est  $b_r$  où*

$$b_r = 1/2.[5\phi_n + \phi_{n-1} - 3\phi_r - 3\phi_{r-1}] \quad \text{si } 0 < r < n; \quad \text{et } b_{n+1} = 2\phi_n + \phi_{n-1}.$$

*Le courant dans  $P_rP_{r+1}$  est  $c_r$  où*

$$c_r = 3\phi_r, \quad \text{si } 0 < r < n; \quad \text{et } -c_n = \phi_n - \phi_{n-1}.$$

*Démonstration.* □



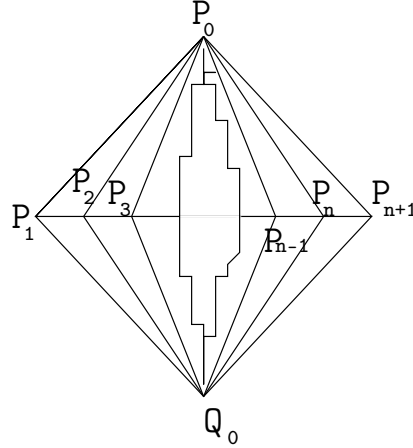


FIG. 5 –

On en déduit immédiatement que le courant total  $p_n$  (qui représente le côté horizontal de  $\mathcal{R}_n$ ), et la différence de potentiel totale  $q_n$  (le côté vertical) sont donnés par :

$$p_n = 1/2 \cdot [(5n + 1)\phi_n + (n + 2)\phi_{n-1}], \quad q_n = 5\phi_n + \phi_{n-1}$$

On observe alors que, pour  $n > 2$ ,

$$0 < c_1 < \dots < c_{n-2} < -c_n < c_{n-1} < b_n < b_{n+1} < b_{n-1} \\ < b_{n-2} < \dots < b_1 < a_1 < a_2 < \dots < a_{n-1} < a_{n+1}$$

Donc, si  $n > 2$ , alors  $\mathcal{R}_n$  est parfait.

On en déduit également que  $q_n \rightarrow \infty$  et  $\frac{p_n}{q_n} \rightarrow \infty$

**Lemme 5.2.** *Pour la suite de notre construction, montrons dès à présent que  $(p_n, q_n) | 9$ .*

*Démonstration.* D'après 5.1.2,

$$(n + 2)q_n - 2p_n = 9\phi_n \quad \text{et} \quad (5n + 1)q_n - 10p_n = 9\phi_{n-1}.$$

Donc  $(p_n, q_n) | 9\phi_n$  et  $(p_n, q_n) | 9\phi_{n-1}$ . À partir de la relation  $\phi_{r+1} - 4\phi_r = \phi_{r-1}$ , on montre par récurrence que pour tout entier  $r$ ,  $(\phi_r, \phi_{r+1}) = 1$ . En effet, soit  $d = (\phi_r, \phi_{r+1})$ , alors  $d | \phi_{r-1}$  par l'équation, donc  $d | (\phi_n, \phi_{n-1})$ , d'où  $d | 1$ .

On obtient donc bien  $(p_n, q_n) | 9$ .

□

**Théorème 5.3.** *Pour  $n$  assez grand, le carré pavé  $\mathcal{S}_n$  est parfait.*

*Démonstration.* Considérons les dipôles équivalents représentés par les figures 6 et 7, où les «couronnes» représentent un certain dipôle  $\mathcal{R}$  de côté horizontal  $p$  et de côté vertical  $q$ . Nous utilisons clairement la **méthode du rotor-stator**, et le stator est ici le fil qui relie  $A_1$  à  $A_3$ .

Alors que tous les autres fils ont pour conductance 1, on pose  $c = \frac{p}{q} =$  conductance effective de chacune des occurrences du dipôle  $\mathcal{R}$ . La résolution du problème de Kirchhoff associé aux deux dipôles obtenus est

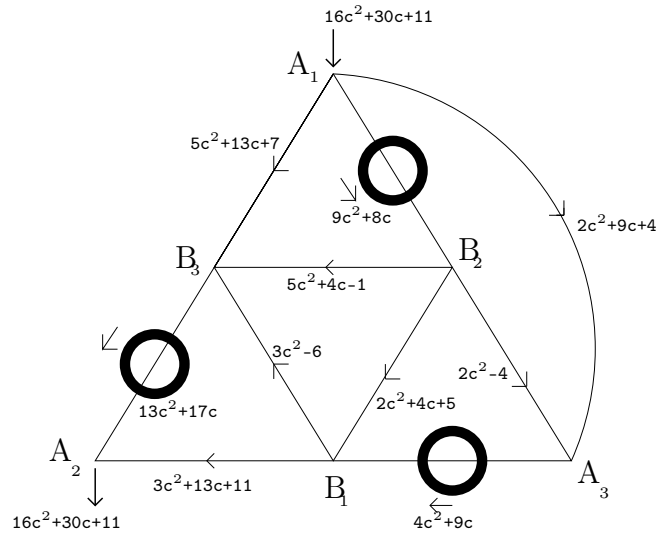


FIG. 6 – Première position du rotor

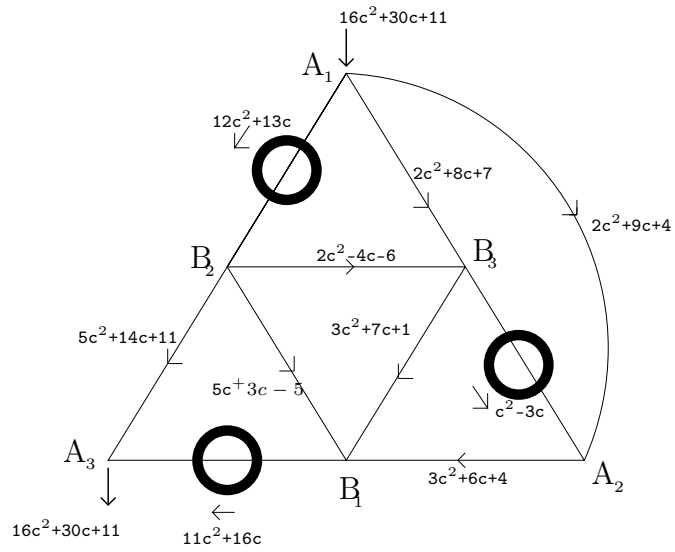


FIG. 7 – Seconde position du rotor

indiquée sur les diagrammes en termes de courants passant dans les fils.

Multiplions toutes ces quantités par  $q^2$ , puis ajoutons les éléments supplémentaires nécessaire à l'obtention d'un carré parfait  $\mathcal{S}$  avec la **méthode de symétrie**. Les éléments de  $\mathcal{S}$  (égaux à un facteur près aux éléments réduits, comme toujours), sont énumérés ci-dessous :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{(A)} \quad 14p^2 + 21pq + 7q^2, \quad 5p^2 + 14pq + 11q^2, \quad 5p^2 + 13pq + 7q^2, \\ \quad 5p^2 + 4pq - q^2, \quad 5p^2 + 3pq - 5q^2, \quad 3p^2 + 17pq + 20q^2, \\ \quad 3p^2 + 13pq + 11q^2, \quad 3p^2 + 7pq + q^2, \quad 3p^2 + 6pq + 4q^2, \\ \quad 3p^2 - 6q^2, \quad 2p^2 + 9pq + 4q^2, \quad 2p^2 + 8pq + 7q^2, \\ \quad 2p^2 + 4pq + 5q^2, \quad 2p^2 - 4q^2, \quad 2p^2 - 4pq - 6q^2. \\ \text{(B)} \quad \text{Les multiples des éléments de } R, \text{ les facteurs de multiplication} \\ \quad \text{étant} \\ \quad 13p + 17q, \quad 12p + 13q, \quad 11p + 16q, \quad 9p + 8q, \quad 4p + 9q, \quad p - 3q. \end{array} \right. \quad (5)$$

On trouve aussi, dans ces conditions, que le côté du carré  $\mathcal{S}$  est  $19p^2 + 47pq + 31q^2$ .

On remplace maintenant  $\mathcal{R}$  par  $\mathcal{R}_n$ , la construction que nous avons détaillée plus haut. Ainsi, on a  $p = p_n$  et  $q = q_n$ . On choisit  $n$  assez grand pour que  $p_n > 180q_n$ . Nous allons maintenant montrer que, sous ces conditions,  $\mathcal{S} = \mathcal{S}_n$  est parfait.

*Les éléments de (A) sont deux à deux différents et aucun élément de (A) n'est égal à un élément de (B)*

En effet, les éléments de (A) énumérés par la liste le sont en ordre strictement décroissant, donc ils sont tous distincts. De plus, le dernier élément de (A) est  $2p^2 - 4pq - 6q^2$ , qui est plus grand que tous les éléments de (B).

*Les éléments de (B) sont deux à deux différents*

En effet, supposons que deux d'entre eux soient égaux :

$$\xi(\alpha p + \beta q) = \eta(\gamma p + \delta q)$$

où  $\xi$  et  $\eta$  sont des éléments de  $\mathcal{R}_n$ , et  $\alpha p + \beta q$  et  $\gamma p + \delta q$  apparaissent dans la liste donnée ci-dessus pour les facteurs de multiplication des éléments de (B). Ce sont donc des facteurs *distincts*, car  $\mathcal{R}_n$  est parfait. Dès lors, il apparaît en regardant à nouveau la liste que  $\alpha\delta - \beta\gamma \neq 0$ . Mais on a :  $(\alpha\xi - \gamma\eta)p = (\delta\eta - \beta\xi)q$ . D'où

$$p | (\delta\eta - \beta\xi) \cdot (p, q)$$

Maintenant, si  $\delta\eta - \beta\xi = 0$  on a  $\alpha\xi - \gamma\eta = 0$  car  $p \neq 0$ , d'où l'on déduit alors que  $\alpha\delta - \beta\gamma = 0$  car  $\xi, \eta \neq 0$ . C'est absurde, par ce qui précède. Donc, en se référant une nouvelle fois à la liste des facteurs et en utilisant que  $\eta < q$  et  $0 < \xi$ , on trouve :  $0 < \delta\eta - \beta\xi < 20q$ .

On rappelle le lemme 5.2 :  $(p_n, q_n) | 9$ . Cela permet d'obtenir  $p < 180q$ , ce qui contredit le choix de  $n$  que nous avons effectué.

Nous concluons de tout cela que les carrés  $\mathcal{S}_n$  sont parfaits lorsque  $n$  est choisi assez grand, comme nous l'avions annoncé.  $\square$

**Théorème 5.4.** *Soit un entier  $n$  assez grand pour que le carré  $\mathcal{S}_p$  soit parfait quel que soit  $p > n$ . Alors, pour tout  $N$  suffisamment grand,  $\mathcal{S}_n$  et*

$\mathcal{S}_N$  sont totalement différents, c'est-à-dire qu'ils n'ont aucun élément en commun.

*Démonstration.* Commençons par noter  $p_n = p$ ,  $q_n = q$ ,  $p_N = P$  et  $q_N = Q$ . Au cours de la démonstration précédente, on a remarqué que la valeur du côté du carré  $\mathcal{S}_n$  était  $19p^2 + 47pq + 31q^2$ . Donc nous pouvons ramener à une même taille les carrés  $\mathcal{S}_n$  et  $\mathcal{S}_N$  en multipliant les éléments de  $\mathcal{S}_n$  par  $19P^2 + 47PQ + 31Q^2$  et ceux de  $\mathcal{S}_N$  par  $19p^2 + 47pq + 31q^2$ . Montrons maintenant que tout élément du type (B) dans  $\mathcal{S}_N$  est plus petit que tous les éléments de  $\mathcal{S}_n$ .

En effet, un tel élément s'écrit

$$e = (\alpha P + \beta Q).(19p^2 + 47pq + 31q^2), \quad \text{où } |\alpha|, |\beta| \leq 17.$$

Si  $n$  et  $N$  sont assez grands, on trouve alors  $e < 3398Pp^2$  en utilisant le fait que  $\frac{p_n}{q_n} \rightarrow \infty$  (fin du lemme 5.1). Par ailleurs, chaque élément de  $\mathcal{S}_n$  est supérieur ou égal à  $P^2p$  fois une constante non nulle. Donc à partir d'un certain rang  $n_0$  pour  $n$  et d'un certain rang  $N_0$  pour  $N$ , suffisamment grands pour que  $P$  soit grand par rapport à  $p$  (car  $p_n \rightarrow \infty$ ),  $e$  sera inférieur à tous les éléments de  $\mathcal{S}_n$ , ce qu'on voulait obtenir.

Tout élément de la catégorie (A) de  $\mathcal{S}_N$  est supérieur à tous les éléments de la catégorie (B) de  $\mathcal{S}_n$ .

En effet, un tel élément est supérieur à  $P^2p^2$  fois une constante positive, alors qu'un élément de la catégorie (B) de  $\mathcal{S}_n$  est nécessairement inférieur à  $3600P^2p^2$ .

Aucun élément de la catégorie (A) de  $\mathcal{S}_N$  n'est égal à un élément de la catégorie (A) de  $\mathcal{S}_n$ .

Dans le cas contraire, on aurait

$$\begin{aligned} (aP^2 + bPQ + cQ^2).(19p^2 + 47pq + 31q^2) = \\ (a'p^2 + b'pq + c'q^2).(19P^2 + 47PQ + 31Q^2) \end{aligned}$$

où  $a, a'$ , etc. sont des entiers inférieurs à 14 d'après la liste des éléments.

On peut alors écrire :

$$P^2.[(19a - 19a')p^2 + (47a - 19b')pq + (31a - 19c')q^2] = \text{termes similaires en } PQ \text{ et } Q^2.$$

Remarquons maintenant que  $47a - 19b' \neq 0$ , sans quoi on aurait  $19|a|$ , alors que  $0 < a < 19$ , d'après la liste des éléments. Nous en déduisons que le terme de gauche de l'égalité est minoré par  $P^2pq$  fois une constante strictement positive. En outre, le terme de droite est majoré par  $PQp^2$  fois une constante. Donc, pour  $N$  choisi assez grand (ie. pour que  $P$  soit assez grand par rapport à  $Q$  d'une part, et  $p$  d'autre part), cette égalité devient absurde.

Par ces trois étapes, on s'est bien assuré qu'il n'y a aucun élément commun entre  $\mathcal{S}_n$  et  $\mathcal{S}_N$ , pour peu qu'on choisisse des indices assez grands et assez distants l'un de l'autre. □

**Corollaire 5.5.** *Il existe une suite  $T_n$  de carrés parfaits, deux à deux totalement différents, c'est-à-dire sans éléments communs.*

*Démonstration.* Ce résultat découle du théorème précédent et de la construction de carrés parfaits qu'on a détaillée jusqu'ici.  $\square$

## 6 Conclusion

**Théorème 6.1.** *Tout rectangle dont les côtés sont commensurables peut être pavé d'une infinité de façons totalement différentes.*

*Démonstration.* Quitte à en multiplier les côtés par une constante bien choisie, on peut supposer que la hauteur  $h$  et la largeur  $k$  du rectangle sont entières. On le divise alors en  $hk$  carrés de surface 1. Soit  $n$  un entier choisi arbitrairement, on remplace le  $i$ -ème carré par  $T_{nhk+i}$  ramené à la surface 1 par l'homothétie qui convient. Pour chaque valeur de  $n$  on obtient un pavage parfait du rectangle. Ces subdivisions sont deux à deux totalement différentes : elles n'ont pas deux éléments en commun.

Au passage, puisqu'on a démontré au début de cet exposé qu'un rectangle pavé par des carrés (de façon quelconque) a nécessairement des côtés commensurables, on en déduit le corollaire suivant :  $\square$

**Corollaire 6.2.** *Un rectangle peut être pavé par des carrés si, et seulement si il peut l'être de façon parfaite.*

## Références

- [1] Franck Harary. *Graph Theory*. Addison-Wesley publishing company, 1968.
- [2] Richard Kenyon. Tilings and discrete dirichlet problems. *Israel Journal of Mathematics*, 105(1), 1998.
- [3] R. Brooks, C. Smith, A. Stone et W. Tutte. The dissection of rectangles into squares. *Duke Mathematical Journal*, 7, 1940.
- [4] András Recski. *Matroid Theory and its Applications in Electric Network Theory*. Springer-Verlag, 1980.