Bonus

Les exercices qui suivent ne seront pas traités en TD. Leur but de comprendre explicitement *le théorème de représentation conforme de Riemann dans le cas des ouverts simplements connexes du plan délimités par un polygone. Ils sont à faire dans l'ordre. Le disque unité ouvert est noté D et le demi-plan supérieur H (on rappelle qu'ils sont biholomorphes).*

Exercice 1:

Soit $A_1 < \cdots < A_n$ n points sur l'axe réel, $\beta_1, \ldots, \beta_n \in]0,1[$ tels que $\sum \beta_k > 1$.

On note $(z-A_k)^{\beta_k}$ la fonction holomorphe sur $\mathbb{C}\backslash\{A_k + iy, y \leq 0\}$ définie par $(z-A_k)^{\beta_k} = r^{\beta_k} e^{i\beta_k\theta}$ si $z - A_k = re^{i\theta}$, $r > 0$, $\theta \in]-\pi/2, 3\pi/2[$. On définit alors l'intégrale de Schwarz-Christoffel par la formule

$$S(z) = \int_0^z \frac{d\zeta}{(\zeta - A_1)^{\beta_1} \ldots (\zeta - A_n)^{\beta_n}}.$$

1. Montrer que S est bien définie, holomorphe sur $\mathbb{C}\backslash\{A_k + iy, y \leq 0\}$, s'étend continûment en les A_k et a une limite quand z tend vers l'infini dans H.
   On note $a_k = S(A_k)$ et $a_\infty = \lim_{|z|\to\infty} S(z)$.
2. On suppose de plus que $\sum \beta_k \leq 2$. Montrer que l'image de la droite réelle par S est le polygone de sommets ordonnés $a_1, \ldots, a_n, a_\infty$ privé du point a_∞, dont on précisera les angles intérieurs. Quelle est la différence entre le cas $\sum \beta_k < 2$ et le cas $\sum \beta_k = 2$?

Exercice 2:

Soit P un ouvert polygonal de sommets ordonnés $a_1, \ldots, a_n$ ($n \geq 3$), d'angles externes $\pi\beta_k$. Soit f un biholomorphisme de H sur P. D'après le cours, f s'étend en un homéomorphisme de $H \cup \mathbb{P}^1(\mathbb{R})$ sur $\bar{P}$. On note A_k la préimage de a_k, avec $A_1, \ldots, A_n \in \mathbb{R}$ et $A_1 < \cdots < A_n$.

Le but est de montrer qu'il existe deux complexes c et d tels que f soit donnée par la formule

$$f(z) = cS(z) + d,$$

S étant l'intégrale de Schwarz-Christoffel introduite à l'exercice 1. On utilisera librement le *principe de réflexion de Schwarz*[1].

1. Que vaut la somme $\sum \beta_k$?
2. Pourquoi suffit-il de prouver que
   $$\frac{f''(z)}{f'(z)} = -\sum_{k=1}^{n} \frac{\beta_k}{z - A_k} \ ?$$
   Montrer qu'il suffit pour prouver cette égalité de montrer que f''/f' s'étend en une fonction méromorphe sur $\mathbb{C}\backslash\{A_1, \ldots, A_k\}$, nulle à l'infini, avec des pôles simples en les A_k de résidu $-\beta_k$.
3. Montrer que la fonction $h_k(z) = (f(z) - a_k)^{1/(1-\beta_k)}$ sur la demi-bande $\{z, A_{k-1} < \mathrm{Re}(z) < A_{k+1}, \mathrm{Im}(z) > 0\}$ s'étend en un biholomorphisme de la bande $\{z, A_{k-1} < \mathrm{Re}(z) < A_{k+1}\}$ sur son image.
4. En déduire f''/f' que se prolonge effectivement en une fonction méromorphe sur $\mathbb{C}\backslash\{A_1, \ldots, A_k\}$, nulle à l'infini, avec des pôles simples en les A_k de résidu $-\beta_k$.
5. Traiter le cas exclu plus haut où $A_n = \infty$.
6. Retrouver les formules pour les biholomorphismes entre H et un secteur d'angle ou une demi-bande vus dans le TD précédent comme cas dégénérés de la formule de Schwarz-Christoffel.

Exercice 3:

1. Montrer que la formule
   $$f(z) = \int_0^z \frac{d\zeta}{(1-\zeta^n)^{2/n}}$$
   réalise un biholomorphisme de D sur l'ouvert délimité par un polygone régulier à n côtés, envoyant les racines n-èmes de l'unité sur les sommets. Montrer que la distance d'un sommet de ce polygone à l'origine est
   $$R_n = \int_0^1 \frac{d\zeta}{(1-\zeta^n)^{2/n}}.$$

[1] Inventé par Schwarz à cet effet!

2. A l'aide du changement de variables $t = 1-\zeta^n$ et de la question 4 de l'exercice 2 du TD 8, montrer que

$$R_n = \frac{\Gamma(1-2/n)\Gamma(1/n)}{n\Gamma(1-1/n)}.$$

Montrer également que la longueur S_n d'un côté du polygone est

$$S_n = \frac{2\pi\Gamma(1-2/n)}{n\Gamma(1-1/n)^2}.$$

Exercice 4:

On se donne $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$ et $\beta \in i\mathbb{R}_+^*$. On pose $\Lambda = \alpha\mathbb{Z} + \beta\mathbb{Z}$.

1. Montrer que la formule

$$\wp(z) = \frac{1}{z^2} + \sum_{\lambda\in\Lambda\setminus\{0\}} \left(\frac{1}{(z-\lambda)^2} - \frac{1}{\lambda^2}\right)$$

définit une fonction méromorphe sur $\mathbb{C}$, Λ-périodique, paire, avec des pôles doubles en tous les points du réseau Λ. Que dire du nombre de zéros de $\wp$ dans un domaine fondamental ?

2. Montrer que $\wp(z)$ est réel si et seulement si z est sur une droite verticale ou horizontale passant par un point de $\frac{1}{2}\Lambda$.

3. Soit P l'intérieur du rectangle de sommets $0, \alpha/2, \beta/2, (\alpha+\beta)/2$. Montrer que $\wp_{|P}$ réalise un biholomorphisme de P sur $-H$. Déduire de la formule de Schwarz-Christoffel appliquée à $(-\wp_{|P})^{-1}$ que la fonction $\wp$ vérifie une équation de la forme

$$\wp'(z)^2 = 4\wp(z)^3 - g_2\wp(z) - g_3,$$

pour certaines constantes g_2, g_3, puis que l'application $\pi := (\wp, \wp')$ réalise un homéomorphisme entre la *courbe elliptique* $E = \mathbb{C}/\Lambda$ et la *courbe cubique* C de $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$ d'équation homogène $y^2z = 4x^3 - g_2xz^2 - g_3z^3$. Montrer que pour toute droite L, l'intersection $C \cap L$ est formée de trois points a, b, c (éventuellement confondus) dont la somme est nulle dans le quotient E.

Cela permet d'interpréter géométriquement la loi de groupe sur C donnée par son identification avec E.