

---

# Topologie des courbes algébriques réelles

---

Vincent BOUIS  
Matthias TRANNOY

Tuteur : Thomas BLOMME

## Résumé

La question de la nature du lieu des zéros d'un polynôme à coefficients réels en plusieurs variables se pose assez naturellement : pensez par exemple à la forme des paraboles ou des hyperboles. Quelques notions d'algèbre et de géométrie permettent de répondre à certaines de ces questions. Ces questions intéressaient déjà les mathématicien-ne-s du monde helléniste, et continuent d'intéresser (sous d'autres formes ...) la recherche actuelle.

Nous nous intéresserons ici aux polynômes à deux variables et plus précisément à la description des positions relatives des branches de courbes algébriques réelles. Ce problème a été notamment formulé par David Hilbert en 1900 comme la première partie du 16<sup>e</sup> de ses 23 problèmes. Celui-ci demeure aujourd'hui parmi les cinq problèmes de ces 23 problèmes actuellement non résolus.

Nous étudierons les avancées qui ont été apportées tout au long du siècle dernier. En particulier, nous nous intéresserons à la géométrie tropicale, domaine relativement récent des mathématiques, qui a permis la résolution partielle du problème soulevé par Hilbert - à l'aide de la méthode dite du "Patchwork".

# Table des matières

<b>1</b>	<b>Introduction</b>	<b>1</b>
<b>2</b>	<b>Harnack and Co</b>	<b>2</b>
2.1	Bézout (Énoncé et corollaire) . . . . .	2
2.2	Inégalité de Harnack . . . . .	2
2.2.1	Preuve par Bezout . . . . .	2
2.2.2	Preuve de Klein . . . . .	3
2.2.3	Preuve par Thom-Smith . . . . .	3
<b>3</b>	<b>Bref historique des travaux sur le seizième problème de Hilbert</b>	<b>4</b>
<b>4</b>	<b>Congruence de Rokhlin</b>	<b>4</b>
4.1	Congruence de ROKHLIN . . . . .	4
4.2	Impact de la congruence sur les courbes . . . . .	5
<b>5</b>	<b>Géométrie tropicale</b>	<b>7</b>
5.1	Introduction . . . . .	7
5.2	Patchwork . . . . .	7
5.2.1	Le principe général . . . . .	7
5.2.2	Théorème de Viro . . . . .	8
5.2.3	Exemple de construction, courbes de degré inférieur à 5 . . . . .	8
5.2.4	Démonstration du Patchwork de Viro . . . . .	9
<b>6</b>	<b>Conclusion</b>	<b>11</b>
<b>A</b>	<b>Théorème de Bezout</b>	<b>13</b>
<b>B</b>	<b>Théorie de Thom-Smith</b>	<b>14</b>
<b>C</b>	<b>Preuve de la congruence de Rokhlin</b>	<b>15</b>

# 1 Introduction

Bien qu'il paraisse au premier abord plus élémentaire de considérer les zéros d'un polynôme, ou d'une famille de polynômes, dans  $\mathbb{R}^n$  ou  $\mathbb{C}^n$ , il est en fait plus naturel de considérer des polynômes homogènes et leurs zéros dans les espaces projectifs réels ou complexes ; la compacité de l'espace ambiant, donc des ensembles fermés des points réels ou complexes des variétés considérées, ainsi que le degré supplémentaire d'invariance (puisque les points "à l'infini" qu'on ajoute pour compléter l'espace affine en l'espace projectif deviennent des points "comme les autres") simplifient la situation.

On en vient donc à la définition des courbes algébriques projectives :

**Définition 1.1.** Une courbe algébrique projective réelle  $X$  dans l'espace projectif de dimension 2 est la donnée d'un polynôme homogène  $f \in \mathbb{R}[X_0, X_1, X_2]$ . On peut considérer les points réels

$$X_{\mathbb{R}} = \{[x_0, x_1, x_2] \in \mathbb{R}P^2 \mid f(x_0, x_1, x_2) = 0\}$$

ou complexes

$$X_{\mathbb{C}} = \{[x_0, x_1, x_2] \in \mathbb{C}P^2 \mid f(x_0, x_1, x_2) = 0\}$$

de  $X$ .

Ce qui nous intéressera par la suite concernera uniquement les courbes algébriques projectives réelles dites **lisses** (ie qui n'ont pas de points critiques). De telles courbes définissent alors un ensemble de points  $X_{\mathbb{R}}$  qui est une sous-variété fermée de dimension 1 de  $\mathbb{R}P^2$ .

On en vient alors aux deux questions naturelles qui vont nous intéresser :

**Problème 1.1** (Classification topologique). À homéomorphisme près, quels sont les ensembles de points réels définis par une courbe algébrique projective réelle lisse de degré  $m$  ?

**Problème 1.2** (Classification isotopique). À homéomorphisme près, quels sont les paires  $(\mathbb{R}P^2, X_{\mathbb{R}})$  possibles, avec  $X$  une courbe algébrique projective réelle lisse de degré  $m$  ?

Le second problème se distingue du premier par le fait que la position relative des composantes connexes de  $X_{\mathbb{R}}$  importe dans la classification. Nous pouvons déjà remarquer le fait (classique en géométrie différentielle) qu'une composante connexe d'une variété fermée de dimension 1 est homéomorphe à un cercle. Ainsi, le problème de classification topologique est équivalent à celui de la détermination des nombres de composantes connexes possibles de  $X_{\mathbb{R}}$ . Cette question a été résolue par HARNACK en 1876. la section 2.

Pour ce qui concerne le second problème, nous avons bien à faire à l'isotopie, puisque tout homéomorphisme de  $\mathbb{R}P^2$  dans  $\mathbb{R}P^2$  est isotope à l'identité. On appellera courbe (lorsque qu'il n'y a pas de confusion possible) une sous-variété de  $\mathbb{R}P^2$  de dimension 1 fermée. Une courbe connexe peut donc être plongée dans  $\mathbb{R}P^2$  de deux manières topologiquement différentes ; en effet, un cercle plongé dans  $\mathbb{R}P^2$  peut séparer  $\mathbb{R}P^2$  en une composante connexe homéomorphe à un disque et une autre à un ruban de MÖBIUS (le cercle plongé est alors appelé *courbe bilatère*, ou *ovale*), ou ne pas séparer  $\mathbb{R}P^2$  (on parle de *courbe unilatère*, par exemple une *droite projective*). Cela peut se voir en considérant la pré-image d'un cercle plongé par le revêtement de  $\mathbb{R}P^2$  par la sphère  $S^2$ .

Comme deux courbes unilatères réalisent l'élément non nul de  $H_1(\mathbb{R}P^2, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ , deux courbes unilatères s'intersectent toujours. En particulier, une courbe lisse a au plus une composante connexe unilatère.

Quand  $X$  est de degré pair,  $X_{\mathbb{R}}$  n'a pas de composante unilatère. En effet, après avoir choisi un polynôme  $P \in \mathbb{R}[X_0, X_1, X_2]$  représentant  $X$ , le signe de  $P$  en un point  $[x_0, x_1, x_2] \in \mathbb{R}P^2$  est bien défini (car  $P$  est homogène de degré pair). On obtient ainsi une décomposition  $\mathbb{R}P^2 = \{P > 0\} \sqcup \{P = 0\} \sqcup \{P < 0\}$ . Par l'absurde considérons une composante connexe unilatère  $A$  de  $X_{\mathbb{R}}$ . Comme  $A$  est unilatère, le signe de  $X$  sur un voisinage de  $A$  est donc constant. Si l'on considère la restriction de  $X$  à une droite réelle qui intersecte  $A$  en  $a$ , on obtient donc un extremum local en  $a$  de  $f|_A$ . Ceci étant vrai pour toute droite passant par  $a$ , on en déduit que  $a$  est un point singulier de  $X$  : contradiction. Donc  $X$  n'a pas de composante unilatère.

Inversement, quand  $X$  est de degré impair,  $X_{\mathbb{R}}$  a exactement une composante unilatère. En effet, l'intersection de  $X_{\mathbb{C}}$  avec une droite réelle générique sera, par Bézout, un ensemble de  $d$  points distincts, invariant par conjugaison : il y aura donc un nombre impair de points d'intersection réels. Or l'intersection transverse d'une droite réelle de  $\mathbb{R}P^2$  avec un ovale est forcément de cardinalité paire (raisonner en termes de composantes connexes définies par l'ovale). Il y a donc au moins une composante connexe unilatère, et donc exactement une d'après ce qui précède.

## 2 Harnack and Co

### 2.1 Bézout (Énoncé et corollaire)

Nous énonçons ici l'un des théorèmes qui va être très important dans la classification des courbes, le théorème "faible" de BÉZOUT.

**Théorème 2.1** (BÉZOUT). *Soient  $X_1$  et  $X_2$  des courbes algébriques lisses de degrés  $m_1$  et  $m_2$ . Si l'ensemble  $X_{1,\mathbb{R}} \cap X_{2,\mathbb{R}}$  est fini, alors il est de cardinal au plus  $m_1 m_2$ .*

*Preuve* Voir Annexe A. ■

Ce résultat a de nombreuses conséquences en lien avec la classification des courbes à homéomorphismes et isotopies près. Voici quelques corollaires très utiles pour la suite.

**Corollaire 2.1.** Le nombre d'ovales dans deux *nids* (ovales imbriqués les uns dans les autres) d'une courbe lisse de degré  $m$  est au plus  $\frac{m}{2}$ . Si l'égalité est atteinte, alors la courbe est composée uniquement de ce nid de profondeur  $\frac{m}{2}$ .

*Preuve* Il suffit de tracer une droite passant par deux points à l'intérieur de chacun des ovales au cœur de chaque nid. On a alors  $2d$  intersections, si  $d$  est le nombre d'ovales, par le théorème de BÉZOUT on a  $2d \leq m$ .

Dans le cas d'égalité, un raisonnement par l'absurde tout à fait similaire permet de montrer le résultat voulu. ■

**Corollaire 2.2.** Il ne peut pas y avoir cinq nids (ou moins) disjoints, contenant au total plus de  $m$  ovales, et tels qu'il ne soient pas tous dans l'intérieur d'un ovale de la courbe.

*Preuve* Il suffit de tracer une conique passant par un point intérieur des ovales les plus "<profonds>" de chacun des nids. On a alors  $2d$  intersections, si  $d$  représente le nombre d'ovales. Et donc, par théorème de BÉZOUT,  $2d \leq 2m$ . ■

Le corollaire le plus important pour ce qui va suivre est le résultat suivant, l'inégalité d'HARNACK.

### 2.2 Inégalité de Harnack

**Théorème 2.2** (Inégalité de HARNACK). *Le nombre de composantes connexes d'une courbe algébrique lisse de degré  $m$  est au plus égal à  $\frac{(m-1)(m-2)}{2} + 1$ .*

Ce résultat permet notamment de résoudre le problème de la classification à homéomorphisme près. En effet, d'après les remarques faites dans l'introduction, il suffit de compter le nombre d'ovales, et donc de composantes connexes, que l'on peut obtenir avec une courbe de degré fixé  $m$ . Ce nombre est donc compris, d'après l'inégalité de Harnack, entre  $\frac{1+(-1)^{m+1}}{2}$  et  $\frac{(m-1)(m-2)}{2} + 1$ . Il est en fait possible de montrer que cette inégalité est optimale, et que toutes les valeurs intermédiaires de nombre de composantes connexes peuvent être obtenues (voir [1]); ce qui résout donc le problème de la classification des courbes à homéomorphismes près.

#### 2.2.1 Preuve par Bezout

Le cas  $m = 2$  se déduit de la classification des coniques. Le cas  $m = 3$  se traite comme ce qui suit. On suppose dans la suite  $m \geq 4$ . On considère une courbe  $X$  comme dans l'énoncé, de degré  $m$ , et on note  $N$  le nombre de ses composantes connexes. On suppose par l'absurde  $N \geq \frac{m^2-3m+6}{2}$ .

Si  $m$  est pair on appelle  $C_1, \dots, C_N$  ces composantes connexes (qui sont bilatères). On fixe alors  $A_1, \dots, A_k$  des points, avec  $A_i \in C_i$  pour tout  $i$  et  $k := \frac{m^2-3m+6}{2}$ . Comme pour  $m \geq 4$  on a  $\frac{m^2-m-2}{2} \geq \frac{m^2-3m+6}{2} = k$ ,

on peut choisir également  $(A_j)_{k+1 \leq j \leq \frac{m^2-m-2}{2}}$  d'autres points (distincts) tels que  $A_j \in C_k$ . On peut alors choisir une courbe  $Y$  de degré au plus  $m-2$  qui passe par tous les  $A_i$  (la quantité  $\frac{m^2-m-2}{2}$  de points étant bien maximale pour une courbe de degré  $m-2$ ). Les courbes  $X$  et  $Y$  s'intersectent donc en au moins  $\frac{m^2-m-2}{2}$ . Ce n'est pas suffisant pour conclure, mais quitte à translater légèrement l'origine dans la définition du polynôme définissant  $Y$ , on peut supposer que  $X$  et  $Y$  ne sont tangentes en aucun des points  $A_i$ . En particulier,  $Y_{\mathbb{R}}$  étant fermée,  $Y$  et  $C_i$  s'intersectent en au moins deux points pour tout  $i < k$ ; de plus  $Y$  et  $C_k$  s'intersectent aussi en un nombre pair de points, ce qui augmente encore d'au moins un le cardinal de  $X_{\mathbb{R}} \cap Y_{\mathbb{R}}$  (par un argument de parité). Ainsi on obtient au moins  $\frac{m^2-m-2}{2} + k \geq m^2 - 2m + 2 > m(m-2)$  points d'intersections, ce qui contredit le théorème de BÉZOUT.

Le cas  $m$  impair se traite presque de la même manière : on perd une constante 1 à la toute fin dans le cas où l'un des  $C_i$ ,  $i < k$  est unilatère, ce qui nous donne toujours au moins  $m^2 - 2m + 1 > m(m-2)$  points d'intersection entre  $X$  et  $Y$ .

Cette inégalité est optimale : il est possible de construire des courbes de degré  $m$  ayant exactement  $\frac{(m-1)(m-2)}{2} + 1$  composantes connexes. De telles courbes sont appelées "M-courbes".

### 2.2.2 Preuve de Klein

On se donne à nouveau  $X_{\mathbb{R}}$  une courbe algébrique réelle plane lisse, et  $X_{\mathbb{C}}$  sa complexifiée. On introduit alors  $T$  l'involution complexe sur  $X_{\mathbb{C}} : [x : y : z] \in \mathbb{P}^2(\mathbb{C}) \mapsto [\bar{x} : \bar{y} : \bar{z}] \in \mathbb{P}^2(\mathbb{C})$ . L'ensemble de ses points fixes est  $X_{\mathbb{R}}$ . On remarquera que  $g := \frac{(d-1)(d-2)}{2}$  est le genre de la surface  $C$  (voir [8]). Il y a alors deux cas, suivant que  $X_{\mathbb{R}}$  sépare  $X_{\mathbb{C}}$  ou non.

Dans le cas où  $X_{\mathbb{R}}$  ne sépare pas  $X_{\mathbb{C}}$ , les 1-cycles engendrés par les composantes connexes de  $X_{\mathbb{R}}$  (auxquels on assigne une orientation arbitraire) sont linéairement indépendants dans  $H_1(X_{\mathbb{C}}, \mathbb{Z})$  qui est de rang  $2g$ , et engendrent un espace isotrope pour la forme d'intersection. Dans ce cas le nombre de composantes connexes de  $X_{\mathbb{R}}$  est donc majoré par  $g$ .

Sinon, comme  $X_{\mathbb{C}}$  est connexe (car homéomorphe à une sphère à  $g$  anses),  $X_{\mathbb{R}}$  découpe  $X_{\mathbb{C}}$  en deux domaines  $B$  et  $B'$  échangés par  $T$ , et dont le bord est  $X_{\mathbb{R}}$ . En notant  $g'$  le genre de  $B$  et  $s$  le nombre de composantes connexes de  $X_{\mathbb{R}}$ , on obtient (en notant  $chi$  la caractéristique d'Euler) :

$$\chi(X_{\mathbb{C}}) = 2\chi(B) - \chi(X_{\mathbb{R}}) = 2(2 - 2g') - 2s$$

d'où :

$$s = g + 1 - 2g',$$

ce qui conclut la démonstration du théorème de Harnack. Remarquons que le cas d'égalité n'arrive que si  $X_{\mathbb{R}}$  sépare  $X_{\mathbb{C}}$  en deux domaines de genre nul.

### 2.2.3 Preuve par Thom-Smith

On énonce le résultat central de la théorie de Thom-Smith :

**Théorème 2.3.** *Etant donné  $X$  une variété sur laquelle agit continûment une involution  $T$ , et  $Y$  l'ensemble de ses points fixes, on a :*

$$\sum h_i(Y) \leq \sum h_i(X),$$

où  $h_i(Y)$  (resp.  $h_i(X)$ ) est la dimension du  $i$ -ème groupe d'homologie à coefficients dans  $\mathbb{F}_2$  de  $Y$  (resp. de  $X$ ).

On se rapporte à l'Annexe B pour la définition des concepts utilisés et la preuve de ce résultat.

Pour ce qui nous concerne, on considère donc  $X = X_{\mathbb{C}}$  l'ensemble des points complexes d'une variété algébrique projective réelle,  $T$  la conjugaison complexe, et  $Y = X_{\mathbb{R}}$  l'ensemble des points réels de  $X$ . L'inégalité de Harnack se déduit bien de ce théorème, puisqu'alors :

$$2h_0(X_{\mathbb{R}}) = h_0(X_{\mathbb{R}}) + h_1(X_{\mathbb{R}}) = \sum h_i(X_{\mathbb{R}}) \leq \sum h_i(X_{\mathbb{C}}) = h_0(X_{\mathbb{C}}) + h_1(X_{\mathbb{C}}) + h_2(X_{\mathbb{C}}) = 1 + (d-1)(d-2) + 1.$$

Ici, on a utilisé le fait que  $X = X_{\mathbb{C}}$  est homéomorphe à une sphère à  $g$  anses, avec  $g = \frac{(d-1)(d-2)}{2}$  son genre. Cette formule est un corollaire de la formule de Riemann-Hurwitz, et on pourra en trouver une démonstration dans [8].

### 3 Bref historique des travaux sur le seizième problème de Hilbert

Axel Harnack, un mathématicien germano-balte de la seconde moitié du XIX<sup>ème</sup> siècle, s'intéresse pendant sa thèse aux courbes algébriques. Il parvient notamment, à l'aide du Théorème des petites perturbations (voir [1]) à construire des courbes maximales (M-courbes) en tout degré.

En 1891, David Hilbert s'intéresse à son tour au problème de la classification des classes d'isotopie des courbes réelles projectives, et en particulier des M-courbes. Il se rend alors compte que la construction d'Harnack ne permet pas d'obtenir toutes les M-courbes possibles. Il utilise donc une autre construction, basée également sur le Théorème des petites perturbations, et pose la conjecture, pour  $m = 6$ , qu'il n'existe que deux classes d'isotopie pour les M-courbes : l'une déjà construite par Harnack, et une autre construite avec sa méthode. Cette conjecture sera invalidée par Dmitrii Gudkov en 1969, qui en trouve une autre, et montre qu'il n'en existe que trois.

En 1900, Hilbert propose à la Sorbonne sa célèbre liste de problèmes devant guider les mathématiques du XX<sup>ème</sup> siècle, et en seizième position y figurait, notamment, la classification des types d'isotopie des courbes réelles projectives de degré fixé (alors résolue jusqu'au degré 5).

Au cours du XX<sup>ème</sup> siècle, forcés par les circonstances, les mathématicien-ne-s ont du chercher des conditions restrictives plus fortes que celles entraînées par le théorème de Bézout et l'inégalité de Harnack. La plupart des conjectures et résultats actuels dans ce sens mettent en jeu une distinction entre les ovales : les ovales pairs, qui sont contenus dans un nombre pair d'autres ovales (on note  $p$  leur nombre) et les ovales impairs (dont on note  $n$  le nombre).

Le problème est actuellement résolu jusqu'au degré 7. La condition restrictive assez forte pour résoudre le problème en degré 6 (ce qui nous intéresse ici) a été conjecturée par Gudkov et démontrée par Vladimir Abramovitch Rokhlin au début des années 70.

Enfin, la construction des courbes algébriques ayant une classe d'isotopie fixée a été largement facilitée par l'introduction de la géométrie tropicale. Oleg Viro réussit alors, en 1979, à compléter la classification des classes d'isotopie jusqu'au degré 7 grâce à sa méthode, dite du Patchwork. Aujourd'hui encore, une partie conséquente de la recherche en géométrie tropicale repose sur l'étude des courbes obtenues par la méthode du Patchwork.

### 4 Congruence de Rokhlin

Nous allons à présent voir des théorèmes nous permettant de restreindre drastiquement le nombre de classes d'isotopie atteignable pour une courbe algébrique de degré pair. Notamment de diminuer le nombre de M-courbes (courbes avec un nombre de composantes maximales) grâce aux congruences de ROKHLIN et la théorie de THOM-SMITH.

#### 4.1 Congruence de Rokhlin

Avant d'aborder les congruence de ROKHLIN, nous devons donner quelques définitions des objets que nous allons manipuler.

Dans toute la suite nous considérerons des couples  $(X, T)$  où  $X$  sera une variété différentielle compacte de dimension réelle  $4k$ , ayant une structure de variété complexe de dimension  $2k$ ; et  $T$  un involution lisse préservant l'orientation, c'est-à-dire, pour tout vecteur  $v$  tangent à  $X$ , on a  $dT(iv) = -idT(v)$ . Et nous introduirons la notation suivante,  $X_{\mathbb{R}} = \{x \in X | T(x) = x\}$ .

Dans le cas particulier où  $X$  est une variété complexe et  $T$  est la conjugaison complexe, nous retrouvons que les points  $X_{\mathbb{R}}$  sont les points réels de la variété  $X$ .

Dans ce cas nous avons l'inégalité de THOM-SMITH suivante :

**Théorème 4.1.** *Soit  $(X, T)$ , définis précédemment, nous avons :*

$$\sum_{i=0}^{2k} h_i(X_{\mathbb{R}}) \leq \sum_{i=0}^{4k} h_i(X)$$

Où  $h_i(\cdot) = \dim_{\mathbb{F}_2}(H_i(\cdot, \mathbb{F}_2))$

On a de plus la différence des deux membres est congrue à 0 modulo 2.

La démonstration de cette inégalité sera faite en Annexe B.

Ce théorème donne suite à 2 définitions :

**Définition 4.1.**

- [M-variété différentielle] Variété  $(X, T)$  telle que l'inégalité de THOM-SMITH soit une égalité
- [(M-1)-variété différentielle] Variété  $(X, T)$  telle que l'inégalité de THOM-SMITH diffère de 2

Une fois ces définitions posées nous pouvons construire les théorèmes suivant, dis de congruence de ROKHLIN

**Théorème 4.2.** *Soit  $(X, T)$  une M-variété différentielle de dimension réelle  $4k$  alors :*

$$\chi(X_{\mathbb{R}}) \equiv \sigma(X) \pmod{16}$$

Où  $\sigma(X)$  désigne la signature de la forme quadratique  $cup : \smile : H^{2k}(X, \mathbb{R}) \times H^{2k}(X, \mathbb{R}) \rightarrow H^{4k}(X, \mathbb{R}) \simeq \mathbb{R}$

Et le deuxième théorème, dans le cas des  $(M - 1)$ -variétés

**Théorème 4.3.** *Si  $(X, T)$  est une  $(M - 1)$ -variété différentielle de dimension  $4k$  alors :*

$$\chi(X_{\mathbb{R}}) \equiv \sigma(X) \pm 2 \pmod{16}$$

Les démonstrations de ces théorèmes étant assez lourdes et faisant appel à de nombreux lemmes, elles seront traitées en Annexe C.

## 4.2 Impact de la congruence sur les courbes

Nous allons maintenant appliquer les théorèmes précédents aux courbes algébriques afin d'obtenir des restrictions sur les  $M$ -courbes et les  $M - 1$  atteignables. Pour ce faire nous allons introduire un revêtement  $Y$  de  $\mathbb{C}P^2$  ramifié selon  $X$ , de la manière suivante :

Soit  $X \subset \mathbb{C}P^2$  une courbe algébrique réelle et lisse de degré  $2k$  donné par l'équation  $f = 0$ .

Nous prendrons, quitte à changer  $f$  en  $-f$  la convention que  $B^+$  correspond à la composante non orientable.  $B^{\pm} = \{(x_0, x_1, x_2) \in \mathbb{R}P^2 \mid \pm f(x_0, x_1, x_2) \geq 0\}$ .

On construit alors la surface lisse  $Z = \{(x_i) \in \mathbb{C}P^3 \mid f(x_0, x_1, x_2) + x_3^{2k} = 0\}$ . Et on a la projection sur  $(x_0, x_1, x_2)$ ,  $Z \rightarrow \mathbb{C}P^2$ . On a  $Z$  qui est une variété de dimension  $2k$  recouvrant  $\mathbb{C}P^2$  ramifiée selon  $X$ . Cependant,  $Z$  n'est pas une  $M$ -variété différentielle en général. C'est pourquoi nous construisons  $Y$  de la manière suivante :

Soit  $G_k$  le groupe cyclique des racines  $k$ -ième de l'unité.  $G_k$  agit alors sur  $Z$  par l'application qui à  $\omega \in G_k$  et  $(z_0, z_1, z_2, z_3) \in Z$  associe  $(z_0, z_1, z_2, \omega z_3) \in Z$ .

On définit alors  $Y = Z/G_k$  et la projection canonique de  $Z$  sur  $\mathbb{C}P^2$  induit alors une projection de  $Y$  sur  $\mathbb{C}P^2$  qui donne alors que  $Y$  est un revêtement double de  $\mathbb{C}P^2$  ramifié selon  $X$ . C'est-à-dire, pour tout point de  $\mathbb{C}P^2$  la fibre de ce point a un élément si le point est dans  $X$  et 2 sinon. On note alors  $T^-$  l'involution dans  $Y$  induite par la conjugaison complexe dans  $Z$ . Il est important de noter que  $T^-$  est différent de la conjugaison complexe sur  $Y$ . On note alors  $Y_{\mathbb{R}}^-$  l'ensemble des points fixes de l'involution  $T^-$ .

**Proposition 4.1.**  $Y_{\mathbb{R}}^-$  est un revêtement double de  $B^-$  ramifié selon  $X_{\mathbb{R}}$ .

*Démonstration.* Il suffit de remarquer que  $(x_0, x_1, x_2, y) \in Y_{\mathbb{R}}^-$  si et seulement si  $y^2 = -f(x_0, x_1, x_2)$ . (on fera attention ici au fait que les coordonnées sont définies après passage au quotient)  $\square$

**Lemme 4.1.** *La variété  $Y$  est simplement connexe.*

*Démonstration.* Tout d'abord, le complémentaire d'une courbe lisse de degré  $d$  dans  $\mathbb{R}P^2$  a pour groupe fondamental  $\mathbb{Z}/d\mathbb{Z}$ .

On identifie ensuite  $X$  aux points fixes des revêtements  $Z \rightarrow Y \rightarrow \mathbb{C}P^2$ . On a alors  $Z - X$  qui est simplement connexe, car c'est un revêtement connexe à  $d$  feuillettes d'un espace de groupe fondamental  $\mathbb{Z}/d\mathbb{Z}$ . Ainsi, comme  $X$  est de codimension 2 dans  $Z$ ,  $Z$  est également simplement connexe.

Soit alors un lacet dans  $Y$ . Par compacité et comme  $X$  est de codimension 2 dans  $Y$ , on peut supposer que les points du lacet sont hors de  $X$ , exceptées ses extrémités (qui sont confondues). On peut alors relever ce lacet dans  $Z$ . Comme  $Z$  est simplement connexe, on peut déformer ce relèvement de lacet en un point, et donc le lacet dans  $Y$  est lui aussi homotopiquement trivial. Donc  $Y$  est simplement connexe.  $\square$

**Lemme 4.2.** *L'homologie sur  $\mathbb{Z}$  de  $Y$  est donnée par :*

$$H_0(Y) \cong H_4(Y) \cong \mathbb{Z}$$

$$H_1(Y) \cong H_3(Y) \cong 0$$

$$H_2(Y) \cong \mathbb{Z}^{2+2g},$$

en notant  $g$  le genre de  $X$ .

*Démonstration.*  $Y$  étant connexe et compacte (comme revêtement ramifié de  $\mathbb{C}P^2$ ), on peut utiliser la dualité de Poincaré pour montrer que :  $H_0(Y) \cong H_4(Y) \cong \mathbb{Z}$ . Ensuite, d'après le théorème d'Hurewicz, et le lemme précédent, on a  $H_1(Y) \cong 0$ . Encore par la dualité de Poincaré on a donc :  $H_3(Y) \cong 0$ . Enfin,  $Y$  étant un revêtement ramifié de  $\mathbb{C}P^2$  selon  $X$ , on a :

$$\chi(Y) = 2\chi(\mathbb{C}P^2) - \chi(X) = 6 - (2 - 2g) = 4 + 2g.$$

Ainsi on en déduit que :  $\dim H_2(Y) = 2 + 2g$ .  $\square$

**Lemme 4.3.** *L'homologie de  $Y_{\mathbb{R}}^-$  à coefficients dans  $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$  est donnée par :*

$$H_0(Y_{\mathbb{R}}^-) \cong H_2(Y_{\mathbb{R}}^-) \cong (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^{n+1}$$

$$H_1(Y_{\mathbb{R}}^-) \cong (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^{2p}.$$

*Démonstration.*  $Y_{\mathbb{R}}^-$  a clairement  $n + 1$  composantes connexes, car chaque ovale impair enclose une composante. Donc  $H_0(Y_{\mathbb{R}}^-) \cong (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^{n+1}$ . Or c'est une surface compacte orientable. Donc on peut appliquer la dualité de Poincaré pour trouver :  $H_2(Y_{\mathbb{R}}^-) \cong (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^{n+1}$ . Enfin,  $Y_{\mathbb{R}}^-$  est un revêtement ramifié de  $B^-$  selon  $X_{\mathbb{R}}$ . D'où :

$$\chi(Y_{\mathbb{R}}^-) = 2\chi(B^-) - \chi(X_{\mathbb{R}}) = 2\chi(B^-) = 2 - 2(p - n).$$

Ainsi on en déduit que :  $H_1(Y_{\mathbb{R}}^-) \cong (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^{2p}$ .  $\square$

On peut alors relier les derniers lemmes pour déduire les correspondances qui suivent.

**Proposition 4.2.**  *$(Y, T^-)$  est une  $M$ -variété si et seulement si  $X$  est une  $M$ -courbe.*

*Démonstration.* On déduit immédiatement l'homologie à coefficients dans  $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$  de  $Y$  à partir de celle à coefficients dans  $\mathbb{Z}$ .

On peut alors vérifier que :  $(n + 1) + 2p + (n + 1) = 1 + 0 + (2 + 2g) + 0 + 1$ , si et seulement si  $p + n = g + 1$ , ce qui est exactement l'équivalence recherchée puisque  $p + n$  est le nombre de composantes connexes de  $X_{\mathbb{R}}$ .  $\square$

**Proposition 4.3.**  *$(Y, T^-)$  est une  $(M - 1)$ -variété si et seulement si  $X$  est une  $(M - 1)$ -courbe.*

*Démonstration.* De même,  $(n + 1) + 2p + (n + 1) + 2 = 1 + 0 + (2 + 2g) + 0 + 1$  si et seulement si  $p + n = g$ ; d'où le résultat voulu.  $\square$

Enfin, pour pouvoir appliquer la congruence de Rokhlin, il faudrait savoir calculer la signature de  $Y$  ( $\sigma(Y)$ ). C'est ce que permet le lemme suivant.

**Lemme 4.4.** *Pour  $Y$  définie comme précédemment, et  $X$  de degré  $2k$ , on a :*

$$\sigma(Y) = 2 - 2k^2.$$

*Démonstration.* On renvoie à [5] pour cette preuve. □

On peut alors enfin conclure quant à l'impact de la congruence de Rokhlin sur la forme des courbes algébriques.

**Théorème 4.4.** *Si  $X$  est une  $M$ -courbe, alors*

$$p - n \equiv k^2 \pmod{8}.$$

*Si  $X$  est une  $(M - 1)$ -courbe, alors*

$$p - n \equiv k^2 \pm 1 \pmod{8}.$$

*Démonstration.* La preuve se déduit immédiatement des résultats précédents. □

## 5 Géométrie tropicale

### 5.1 Introduction

La géométrie tropicale est un branche récente des mathématiques. Elle s'intéresse à la compréhension des max-plus algèbre. Le concept de la géométrie tropicale est de modifier les opérations usuelles sur les nombres, en remplaçant l'addition par le maximum et le produit par l'addition usuelle. Ainsi en géométrie tropicale nous avons les opérations tropicales suivantes :

- $x \oplus y = \max(x, y)$
- $x \otimes y = x + y$
- L'absorbant est donc  $\infty$ ,  $x \oplus \infty = x$ ,  $x \otimes \infty = \infty$
- L'unité est 0,  $x \otimes 0 = x$

La géométrie tropicale est apparue naturellement en traçant des polynômes sur du papier logarithmique, c'est-à-dire, un graphe d'un polynôme  $y = P(x)$  sera tracé en fonction de  $u = \log(x)$  et  $v = \log(y)$ . On ne s'intéresse dès lors qu'aux quadrant supérieur droit du plan et des polynômes à coefficients positifs. En prenant des logarithmes dans différentes bases, cela revient alors à effectuer une dilatation sur les coordonnées  $u$  et  $v$ . On peut alors considérer les graphes de ces polynômes dans les systèmes de coordonnées  $P_h = (u_h, v_h)$  avec  $u = h \log(x)$  et  $v = h \log(y)$  pour  $h > 0$ . Ainsi, le graphe d'un polynôme correspond au graphe dans le système de coordonnées usuel de la fonction  $v = \log(P(e^u))$ .

On peut de plus remarquer qu'en se plaçant dans le semi-anneau (même propriétés qu'un anneau excepté l'inverse pour  $\oplus$ )  $S_h = (\mathbb{R}, \oplus_h, \otimes_h)$ , avec  $x \oplus y = h \log(e^{\frac{x}{h}} + e^{\frac{y}{h}})$  et  $x \otimes y = x + y$ , le graphe d'un polynôme  $P(x) = \sum_k a_k x^k$  dans  $P_h$  correspond au graphe de  $P(x) = \bigoplus_k b_k \otimes_h x^{\otimes_h k}$  dans  $S_h^2$  avec

$b_k = \log(a_k)$ . En remarquant que les opérations des semi-anneaux sont continues par rapport à  $h$  et que  $\lim_{h \rightarrow 0} x \oplus_h y = \max(x, y)$  On peut définir  $S_0 = (\mathbb{R}, \oplus, \otimes)$  le semi-anneau tropical.

On a alors que la représentation du polynôme tropical peut être vu comme un limite d'un polynôme usuel et on retrouve qu'un polynôme tropical peut être vu comme un fonction convexe linéaire par morceaux.

On peut maintenant s'intéresser à la représentation des racines d'un polynômes.  $P$  quelconque. Pour ce faire on décompose  $P = P^+ - P^-$  avec  $P^\epsilon = \sum_{\epsilon a_k \geq 0} \epsilon a_k x^k$ . On trace, pour  $x > 0$ ,  $P^+(x)$  et  $P^-(x)$ , et pour

$x < 0$ ,  $P^+(-x)$  et  $P^-(-x)$ , et on regarde leurs intersections.

De la même manière, cela permet de définir la notion de courbe tropicale, en suivant le même principe pour un polynôme à deux variables.

### 5.2 Patchwork

#### 5.2.1 Le principe général

La méthode du Patchwork est initialement une idée de VIRO afin de recrer à partir de courbes tropicales des courbes algébriques Elle consiste à exercer le procédé inverse de la déquantification. Cette méthode de Patchwork ne permet pas de reconstituer une courbe algébrique exacte car trop d'information est perdue dans le passage à la limite mais cependant elle permet de faire un lien avec notre problème car la courbe que l'on obtient après Patchworking présente le même arrangement qu'une courbe algébrique de même degré. Ainsi, cela nous donne une méthode de construction des arrangements.

### 5.2.2 Théorème de Viro

La méthode du Patchwork se déroule de la façon suivante :

- Choisir un entier  $m$ , le degré de la courbe
- Tracer le triangle  $\Delta = \text{conv}((0, 0); (0, m); (m, 0))$
- Choisir une triangulation convexe  $\tau$  de  $\Delta$
- A chaque sommet  $(i, j)$  de la triangulation associer un signe  $\sigma_{i,j} \in \{-; +\}$
- Si  $s_x$  et  $s_y$  sont les symétries par rapport à l'axe des abscisses et des ordonnées considérer le carré  $\tilde{\Delta} = \Delta \cup s_x(\Delta) \cup s_y(\Delta) \cup s_x(s_y(\Delta))$  en étendant la triangulation
- On étend ensuite les signes en respectant la condition,  $\sigma_{\epsilon_i i; \epsilon_j j} = \sigma_{i,j} \epsilon_i^i \epsilon_j^j$
- On trace alors la courbe  $L$  composée de plusieurs morceaux de segments tel que si dans un triangle de la triangulation si les sommets ont des signes distincts, on relie les centre des côtés dont les extrémités ont des signes différents. C'est-à-dire, on sépare les sommets avec des signes  $+$  et des signes  $-$

En considérant  $\text{Int}(\tilde{\Delta})$  comme le plan, la courbe  $L \cap \text{Int}(\tilde{\Delta})$  est isotope à une courbe algébrique de degré  $m$ . On peut donc à l'aide du patchwork reconstitué des courbes algébrique vérifiant les arrangements voulus pour un degré  $m$  fixé. Formellement, cela s'énonce de la façon suivante :

**Théorème 5.1** (Théorème de Viro). *Soit  $m$  un entier, on considère (avec les même notations)  $\Delta$  et une triangulation convexe  $\tau$ , avec  $f$  une fonction convexifiant la triangulation (c'est-à-dire une fonction linéaire sur chaque triangle de la triangulation et non linéaire sur l'union de deux triangles quelconques de la triangulation). Alors si  $b_t = \sum_{i+j \leq m} \sigma_{i,j} t^{-f(i,j)} x^i y^j$ , on a que pour  $\epsilon > 0$  et pour tout  $t \in ]0, \epsilon[$  :*

- $(\mathbb{R}B_t, \mathbb{R}^2) \simeq (\text{Int}(\tilde{\Delta}) \cap L, \text{Int}(\tilde{\Delta}))$

*Si on recolle les côtés de  $\tilde{\Delta}$  comme pour le plan projectif, c'est à dire en quotientant par la relation  $(x, y) \mathcal{R} (-x, -y)$  si  $|x| + |y| = m$ , on obtient  $\bar{\Delta} = \tilde{\Delta} / \mathcal{R}$  homéomorphe à  $\mathbb{R}P^2$ , on a :*

- $(\mathbb{R}B_t, \mathbb{R}P^2) \simeq (\bar{\Delta} \cap L, \bar{\Delta})$

### 5.2.3 Exemple de construction, courbes de degré inférieur à 5

On peut a titre d'exemple effectuer la classification des courbes jusqu'au degré 5 à l'aide des corollaire du théorème de BEZOUT et de l'inégalité d'HARNACK vu en section 2 et de la méthode du Patchwork, dont la démonstration est dans la section suivante.

#### Restriction sur les classes d'isotopie atteignable :

On a grâce aux corollaires que les seules courbes possibles sont celles dans le tableau ci-dessous (Il s'avère que chaque classe d'isotopie est atteignable). Avec les notations suivantes :

- $\langle J \rangle$  représente une composante unilatère
- $\langle 1 \rangle$  représente une composante bilatère
- $\langle 1 \langle A \rangle \rangle$  signifie que la courbe  $A$  est contenue dans la composante de  $\mathbb{R}^2 \setminus \langle 1 \rangle$  homéomorphe à un disque, c'est-à-dire,  $A$  est à l'intérieur d'un ovale
- $\langle n \rangle$  représentera  $\langle 1 \coprod \dots \coprod 1 \rangle$

Degré	Composantes	Courbes non-isotopiques possibles
$m = 1$	$d \leq 1$	$\langle J \rangle$
$m = 2$	$d \leq 1$	$\langle 0 \rangle; \langle 1 \rangle$
$m = 3$	$d \leq 2$	$\langle J \rangle; \langle J \coprod 1 \rangle$
$m = 4$	$d \leq 4$	$\langle 0 \rangle; \langle 1 \rangle; \langle 2 \rangle; \langle 3 \rangle; \langle 4 \rangle; \langle 1 \langle 1 \rangle \rangle$
$m = 5$	$d \leq 7$	$\langle J \rangle; \langle J \coprod 1 \rangle; \langle J \coprod 2 \rangle; \langle J \coprod 3 \rangle; \langle J \coprod 4 \rangle; \langle J \coprod 5 \rangle; \langle J \coprod 6 \rangle; \langle J \coprod 1 \langle 1 \rangle \rangle$

Il s'avère que chaque classe d'isotopie du tableau est atteignable, en effet, on peut construire pour les degré 4 et 5 les courbes correspondantes. (On ne se préoccupera pas des courbes de degré 1, 2 et 3 dont on peut trouver une équation très simplement)

**Exemple de construction d'une courbe :** En exemple du Patchwork, nous avons représenté ci-dessous la méthode du patwork afin de créer un courbe de degré 5 vérifiant les arrangements  $\langle J \amalg 2 \rangle$

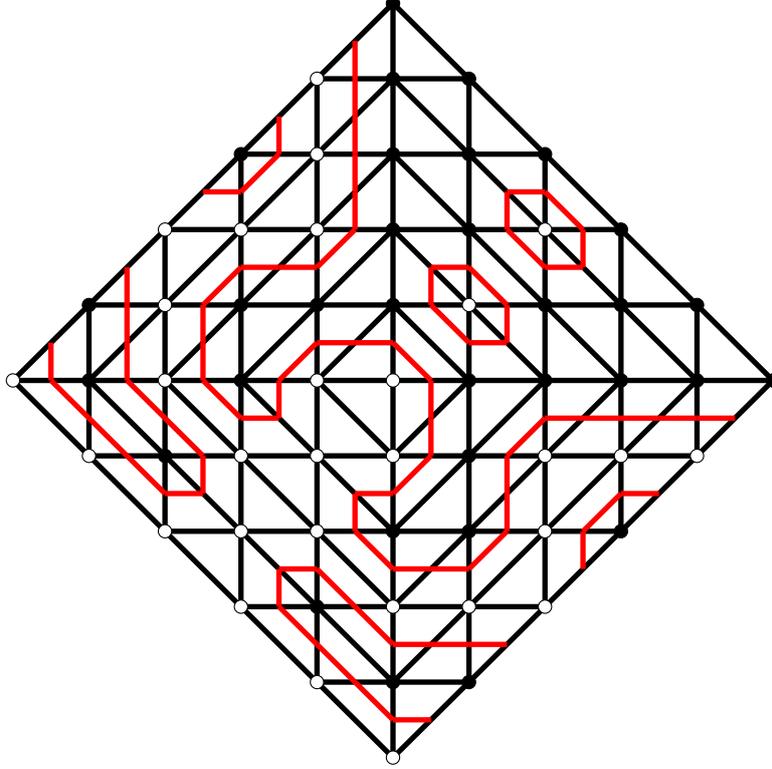


FIGURE 5.1 – Courbe de degré 5 via le Patchworking

### 5.2.4 Démonstration du Patchwork de Viro

Soit  $b_t$  le polynôme défini dans le théorème de VIRO.

$$\text{Soit } b_t^\epsilon(x, y) = \sum_{i,j | \sigma_{i,j} = \epsilon} t^{\nu(i,j)} x^i y^j.$$

$$\text{Soit } p(x, y) = \sum_{i,j} \sigma_{i,j} a_{i,j} x^i y^j \text{ avec } a_{i,j} = e^{-\nu(i,j)}.$$

$$\text{On obtient en déquantifiant avec } h = -\frac{1}{\ln(t)} : p_h(x, y)^\epsilon = \sum_{i,j | \sigma_{i,j} = \epsilon} a_{i,j}^{-\ln(t)} x^i y^j = \sum_{i,j | \sigma_{i,j} = \epsilon} t^{\nu(i,j)} x^i y^j =$$

$$b_t(x, y).$$

Ainsi on a la famille des polynômes  $(b_t)_{0 < t < 1}$  qui peut être vu comme une famille de déquantification du polynôme  $p$ .

Un monôme  $a_{i,j} x^i y^j$  de  $p$  sera représenté sur le papier logarithmique par le graphe  $w = iu + jv - \nu(i, j)$  et ainsi le graphe défini par  $f : (u, v) \mapsto \max\{ku + lv - \nu(k, l) | (k, l) \in V(\tau)\}$ , avec  $V(\tau)$  les sommets de la triangulation  $\tau$ , coïncide avec le graphe du maximum des formes affines définies par les monômes de  $p^+$  et  $p^-$ .

De plus on reconnaît que  $f$  peut être vu comme un polynôme tropical, aussi  $f$  correspond à la transformée de LEGENDRE de la fonction convexe  $\nu$ . Aussi le graphe de  $f$  est une surface convexe linéaire par morceaux, dont la stratification est duale à la triangulation  $\tau$ , au sens où :

- La face du graphe de  $f$  dans le plan  $w = ku + lv - \nu(k, l)$  correspond au somme  $(k, l)$  de  $\tau$  ;
- Deux faces se coupent en un coté du graphe si et seulement si les sommets correspondant dans  $\tau$  sont joint par une arrête ;
- Trois faces se coupent en un point si et seulement si les sommets correspondant dans  $\tau$  forment un triangle de  $\tau$ .

On a ensuite que certaines des faces de  $f$  correspondent aux monômes de  $p^+$  et les autres au monômes de  $p^-$  et les arrêtes de  $f$  qui séparent les faces de  $p^+$  et celles de  $p^-$  forment une ligne brisée  $L'$ . Or les arrêtes de  $L'$  sont duales aux arrêtes de  $\tau$  qui intersectent  $L$ .

On a alors que la topologie de la projection de la ligne brisée  $L'$  dans le plan  $(u, v)$  correspond à celle de  $L$  dans  $\Delta$  et donc pour  $\epsilon_{+,+} > 0$  que la topologie de la courbe  $b_t$  dans  $(\mathbb{R}_+^*)^2$  correspond à celle de  $L$  dans  $\Delta$  pour tout  $0 < t < \epsilon_{+,+}$ .

En procédant de même dans chaque quart de plan, la topologie de la courbe de  $b_t$  dans  $\mathbb{R}_\alpha^* \times \mathbb{R}_\beta^*$  correspond à celle de  $L$  dans le triangle  $\Delta_{\alpha,\beta}$  pour tout  $0 < t < \epsilon_{\alpha,\beta}$  (avec  $\alpha, \beta \in \{+, -\}$ )

Donc on a  $\epsilon > 0$  tel que pour tout  $t \leq \epsilon$ ,  $(\mathbb{R}B_t, \mathbb{R}^2)$  est homéomorphe à  $(L \cap \text{Int}(\tilde{\Delta}), \text{Int}(\tilde{\Delta}))$ .

## 6 Conclusion

Les congruences de ROKHLIN ainsi que les corollaires du théorème de BEZOUT nous permettent d'éliminer la plupart des classes d'isotopies non-atteignables. En effet, l'inégalité de HARNACK nous permet directement d'éliminer les courbes avec un nombre de composantes connexes supérieur strictement à 11. Ensuite, un corollaire du théorème de BEZOUT, élimine les classes d'isotopie ayant des nids de profondeur supérieure à 3, sauf dans le cas d'une courbe avec un seul nid de profondeur 3. Ensuite, les congruences de ROKHLIN nous permettent d'éliminer les trois quarts des  $M$ -courbes et  $(M - 1)$ -courbes. Ne laissant comme possibilités que les courbes suivantes (en gardant les notations définies dans la section 5.2.3) :  $\langle 1 \coprod 1 \langle 9 \rangle \rangle$ ;  $\langle 5 \coprod 1 \langle 5 \rangle \rangle$ ;  $\langle 9 \coprod 1 \langle 1 \rangle \rangle$ ;  $\langle 1 \langle 9 \rangle \rangle$ ;  $\langle 1 \coprod 1 \langle 8 \rangle \rangle$ ;  $\langle 5 \coprod 1 \langle 4 \rangle \rangle$ ;  $\langle 4 \coprod 1 \langle 5 \rangle \rangle$ ;  $\langle 8 \coprod 1 \langle 1 \rangle \rangle$ ;  $\langle 10 \rangle$ . Les courbes restantes sont résumées dans le tableau 6.1 ci-dessous :

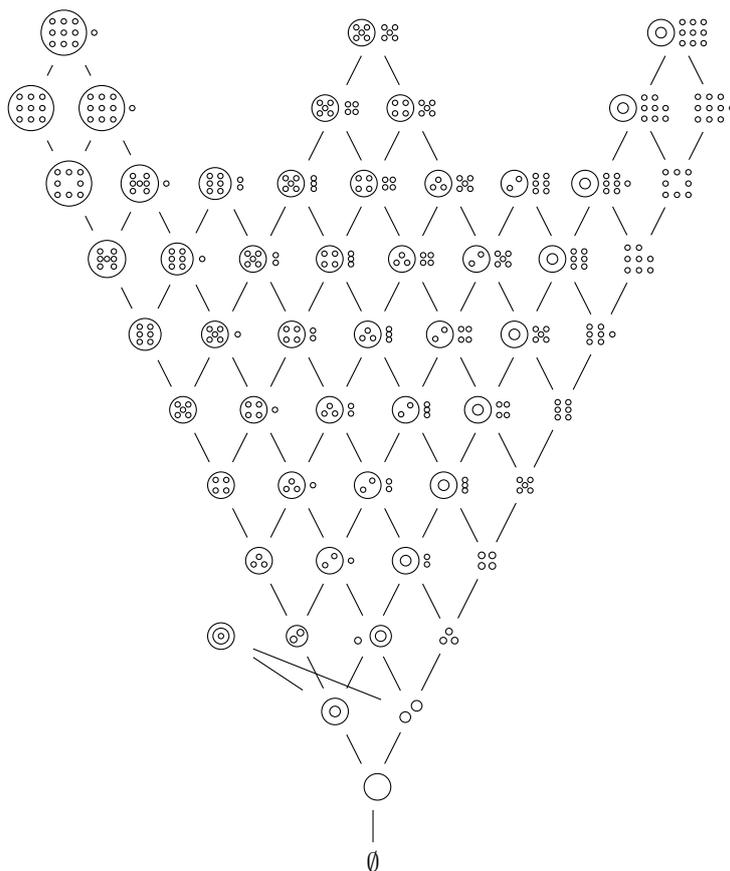


FIGURE 6.1 – Classes d'isotopie atteignables

Réciproquement, la méthode du Patchwork apportée par la géométrie tropicale, nous permet de construire chacune des courbes restantes. Chacune des constructions est répertoriée dans le tableau 6.3 ci-dessous. Un case du tableau est constituée de points de couleurs ainsi que d'une lettre. La lettre correspond à la triangulation utilisée pour le patchwork (c.f figure 6.2). Quant aux points de couleurs, ils symbolisent quel signe associer à chaque sommet de la triangulation.

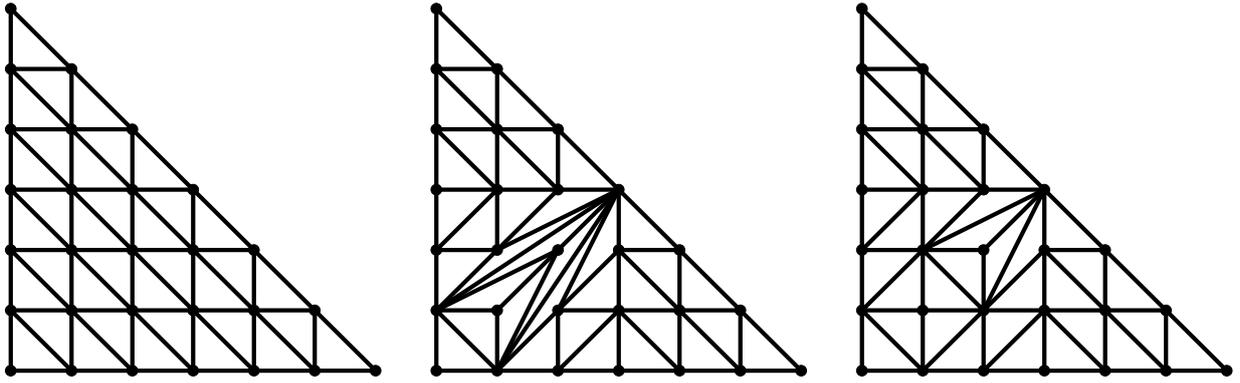


FIGURE 6.2 – Les trois triangulations utilisées pour le Patchwork, dans l'ordre, A B et C

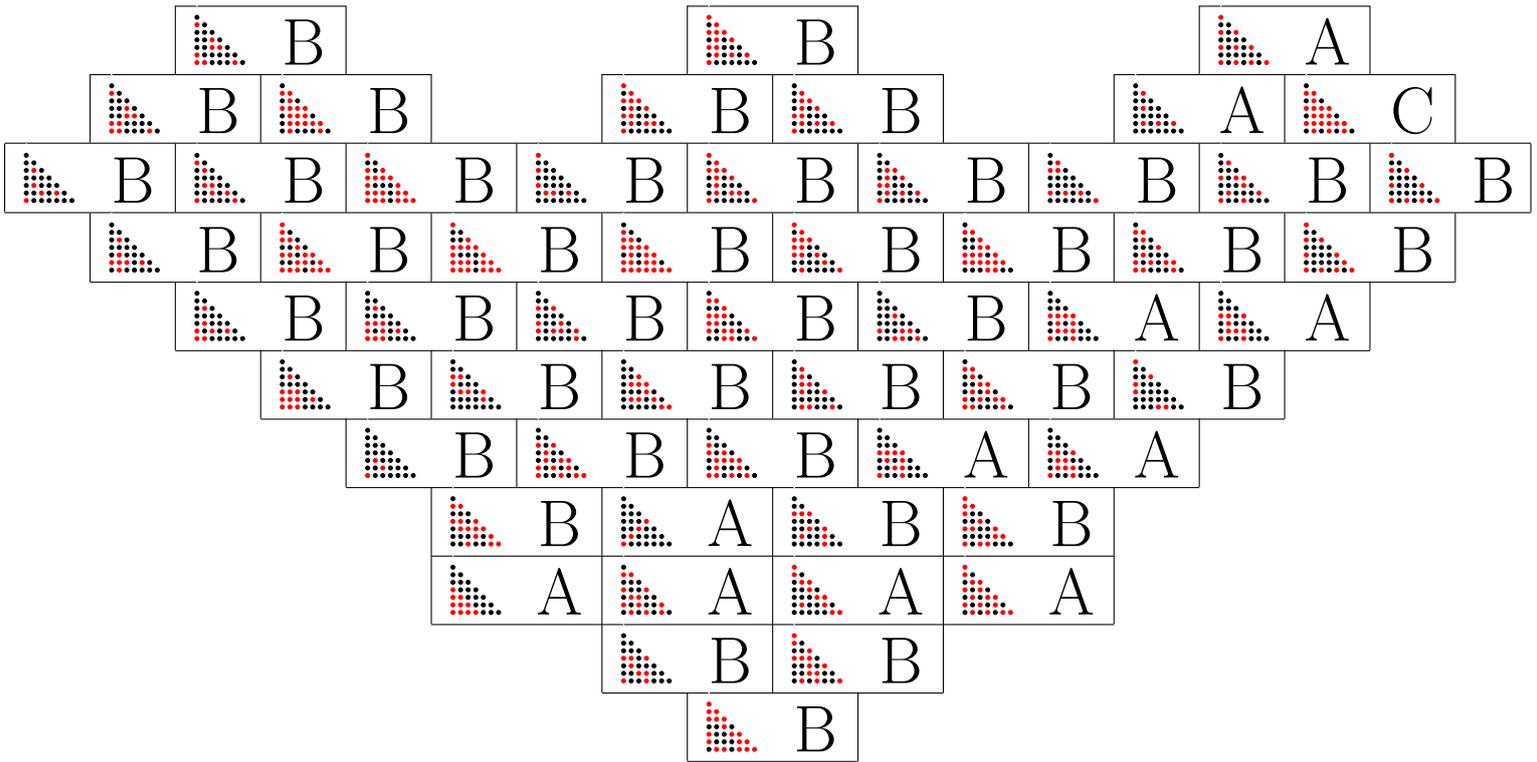


FIGURE 6.3 – Construction des courbes algébriques dans chacune des classes d'isotopie

## A Théorème de Bezout

Dans cette annexe, nous allons donner une preuve du théorème de BEZOUT sous sa forme faible. C'est-à-dire :

**Théorème A.1.** Soit  $P, Q \in \mathbb{C}[X, Y, Z]$  deux polynômes homogènes de degrés  $m$  et  $n$  respectivement, alors si  $P$  et  $Q$  sont premiers entre eux (pas de branche commune pour les courbes de  $P$  et  $Q$ ). Le nombre de point d'intersection est inférieur à  $m \times n$ .

Avant de passer à la démonstration du théorème nous allons introduire la notion de *Résultant* de deux polynômes.

Soient  $P, Q \in \mathbb{C}[X]$  de degrés  $n$  et  $m$  respectivement.  $P = \sum_{i=0}^n a_i X^i$  et  $Q = \sum_{j=0}^m b_j X^j$ . Considérons le morphisme  $\phi : \mathbb{C}_{m-1}[X] \times \mathbb{C}_{n-1}[X] \rightarrow \mathbb{C}_{m+n-1}[X]$  défini par  $\phi(U, V) = UP + VQ$ . Appelons  $A$  la matrice de  $\phi$  dans les bases  $((1, 0), (X, 0), \dots, (X^{m-1}, 0), (0, 1), \dots, (0, X^{n-1}))$  et  $(X^i)_{0 \leq i \leq n+m-1}$ .

**Définition A.1.** Le *résultant* des polynômes  $P$  et  $Q$  est défini comme le déterminant de  $A$ , et est noté  $\text{Res}(P, Q)$ .

On peut d'ailleurs remarquer en écrivant la matrice  $A$  que le résultant de  $P$  et  $Q$  est un polynôme en les variables  $a_0 \dots a_n, b_0, \dots, b_m$  homogène de degré  $m$  en les variables  $a_0 \dots a_n$  et homogène de degré  $n$  en les variables  $b_0, \dots, b_m$ .

Aussi, un rapide calcul permet de montrer qu'il existe deux polynômes  $U$  et  $V$  de degrés inférieurs à  $m - 1$  et  $n - 1$  respectivement tels que  $\text{Res}(P, Q) = UP + VQ$ .

Pour un polynôme à  $n$  variables  $X_0, \dots, X_{n-1}$  on définit le résultant par rapport à une variable  $X_i$  en considérant les polynômes  $P$  et  $Q$  comme des polynômes de  $(\mathbb{C}[X_0, \dots, X_{i-1}, X_{i+1}, \dots, X_{n-1}])[X_i]$ . On obtient alors  $\text{Res}_{X_i}(P, Q)$  qui est un polynôme des variables  $X_0, \dots, X_{i-1}, X_{i+1}, \dots, X_{n-1}$ .

On a maintenant tous les outils en main pour faire la démonstration du théorème :

*Théorème de BEZOUT.* Soit  $P$  et  $Q$  définis comme précédemment, et sans facteur commun. Considérons  $k$  points distincts  $P_i = (x_i : y_i : z_i)$  tels que  $P(x_i, y_i, z_i) = Q(x_i, y_i, z_i) = 0$ .

Quitte à prendre un point  $P_0$  en dehors des droites engendrées par les  $P_i$  et faire un changement de coordonnées projectives de sorte que  $P_0 = (0 : 0 : 1)$ , on peut supposer que  $(0 : 0 : 1)$  ne soit pas l'un des  $P_i$ .

On définit alors les projections  $\pi(P_i) = (x_i : y_i) \in \mathbb{R}P^1$  des points  $P_i$ . Ces projections sont deux à deux distinctes car  $P_i, P_j, (0 : 0 : 1)$  ne sont pas alignés pour  $i \neq j$ .

On considère le résultant par rapport à  $Z$  des polynômes  $P$  et  $Q$ , qui est un polynôme homogène en  $X$  et  $Y$  de degré  $mn$ , s'annulant en  $\pi(P_i)$  (par la formule  $\text{Res}(P, Q) = UP + VQ$ ).

Ainsi on trouve  $k \leq mn$ . □

## B Théorie de Thom-Smith

On se donne une variété topologique  $X$ ,  $T : X \rightarrow X$  une involution continue de  $X$ . On note  $F := X^T$  l'espace des points fixes par  $T$ , et  $X' := X/T$  l'espace quotient de  $X$  par  $T$ . On identifiera  $F$  à un sous-espace de  $X$ , et aussi de  $X'$ . On s'intéresse ici exclusivement à l'homologie à coefficients dans  $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ , et on cherche à démontrer le résultat suivant :

**Théorème B.1.** *On suppose que  $\dim H_\star(X) < +\infty$ . Alors :*

$$\dim H_\star(F) \leq \dim H_\star(X),$$

avec  $\dim H_\star(\cdot) = \sum_{k \in \mathbb{N}} \dim H_k(\cdot)$ . De plus, si on a l'égalité, alors  $T$  agit comme l'identité sur  $H_\star(X)$ . Enfin, la différence des deux termes de l'inégalité est toujours divisible par 2.

**Lemme B.1.** *Il existe une suite exacte courte de complexes de chaînes :*

$$0 \rightarrow C_\star(X', F) \oplus C_\star(F) \xrightarrow{\alpha} C_\star(X) \xrightarrow{\beta} C_\star(X', F) \rightarrow 0.$$

*Démonstration.* Pour simplifier, on suppose donnée une décomposition en complexe simplicial de notre variété, qui soit stable par  $T$  (en particulier telle que sa restriction à  $F$  soit simpliciale).

Les morphismes  $\alpha$  et  $\beta$  sont alors définis comme suit. À une cellule  $c$  de  $X'$ , qui n'est pas une cellule de  $F$ , et une cellule  $d$  de  $F$ , on renvoie par  $\alpha$  la cellule  $c + T(c) + d$  de  $X$  (et on étend à tout  $C_\star(X', F) \oplus C_\star(F)$  par linéarité). De même, à une cellule  $c$  de  $X$ , on renvoie par  $\beta$  la cellule  $\bar{c}$  de  $C_\star(X', F)$ .

Cette suite est bien exacte, car  $\beta$  est clairement surjective,  $\alpha$  injective, et  $\beta(x) = 0$  si et seulement si pour toute cellule  $c$  de  $x \cap X \setminus F$ ,  $T(c) \in x \cap X \setminus F$ . Comme les complexes de chaînes sont à coefficients dans  $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ , ceci est équivalent à  $x \in \text{Im}(\alpha)$ .  $\square$

**Lemme B.2.** *Il existe une suite exacte longue en homologie :*

$$\dots \xrightarrow{\beta_{r+1}} H_{r+1}(X', F) \xrightarrow{\gamma_{r+1}} H_r(X', F) \oplus H_r(F) \xrightarrow{\alpha_r} H_r(X) \xrightarrow{\beta_r} H_r(X', F) \xrightarrow{\gamma_r} \dots$$

*Démonstration.* Ceci résulte directement du lemme précédent, et d'un résultat classique de chasse au diagramme.  $\square$

*Démonstration.* On peut alors conclure la preuve de notre Théorème. Pour cela, on considère la dernière suite exacte longue. On a alors :

$$\begin{aligned} \dim H_r(X) &= \dim \ker(\beta_r) + \text{rg}(\beta_r) \\ \dim H_r(X', F) + \dim H_r(F) &= \dim \ker(\alpha_r) + \text{rg}(\alpha_r) \\ \dim H_r(X', F) &= \dim \ker(\gamma_r) + \text{rg}(\gamma_r) \end{aligned}$$

On somme alors selon  $r \in \mathbb{N}$ , avec des coefficients respectivement 1,  $-1$  et 1 devant les trois dernières équations (pour tout  $r$ ). On a alors (la suite étant exacte) :

$$\dim H_\star(X) - \dim H_\star(F) = 2 \sum_r \dim \ker(\beta_r).$$

Ainsi, on a bien  $\dim H_\star(X) \geq \dim H_\star(F)$ . De plus, la différence des deux termes de cette inégalité différent toujours d'un multiple de 2. Enfin, si on a l'égalité, alors  $\beta \equiv 0$ . Or il est aisé de montrer que  $T$  agit trivialement sur l'image de  $\alpha$ . Donc si on a l'égalité, et puisque la suite est exacte, alors  $T$  agit trivialement sur  $H_\star(X)$ .  $\square$

## C Preuve de la congruence de Rokhlin

Nous commençons par rappeler le contexte des résultats de Rokhlin.

On considère un couple  $(X, T)$ , avec  $X$  une variété différentielle compacte connexe de dimension  $4k$ , et  $T$  une involution lisse préservant l'orientation. On notera  $X_{\mathbb{R}} := X^T$  les points fixes de  $X$  par  $T$ . Dans le cas particulier où  $X$  est une variété complexe et  $T$  est la conjugaison complexe, nous retrouvons que les points  $X_{\mathbb{R}}$  sont les points réels de la variété  $X$ .

Dans ce contexte, il est tout à fait possible d'appliquer l'inégalité de Thom-Smith vus dans l'annexe précédente, ce qui nous amène aux définitions :

**Définition C.1.**

- [M-variété différentielle] Variété  $(X, T)$  telle que l'inégalité de THOM-SMITH soit une égalité ;
- [(M-1)-variété différentielle] Variété  $(X, T)$  telle que l'inégalité de THOM-SMITH diffère de 2.

Une fois ces définitions posées nous pouvons énoncer les théorèmes suivants, dis de congruence de ROKHLIN.

**Théorème C.1.** *Soit  $(X, T)$  une M-variété différentielle de dimension réelle  $4k$ . Alors :*

$$\chi(X_{\mathbb{R}}) \equiv \sigma(X) \pmod{16}$$

Où  $\sigma(X)$  désigne la signature de la forme quadratique  $cup : \smile : H^{2k}(X, \mathbb{R}) \times H^{2k}(X, \mathbb{R}) \rightarrow H^{4k}(X, \mathbb{R}) \simeq \mathbb{R}$ .

**Théorème C.2.** *Si  $(X, T)$  est une  $(M - 1)$ -variété différentielle de dimension  $4k$ , alors :*

$$\chi(X_{\mathbb{R}}) \equiv \sigma(X) \pm 2 \pmod{16}$$

Tout d'abord,  $T$  induit une action involutive sur  $H^{2k} := H^{2k}(X, \mathbb{Z})/(\text{torsion})$ . Cette action est une application linéaire sur le réseau (ie groupe abélien libre de type fini)  $H^{2k}(X, \mathbb{Z})/(\text{torsion})$ . On peut donc écrire :  $H^{2k} := H^{2k}(X, \mathbb{Z})/(\text{torsion}) \supseteq H_1 \oplus H_{-1}$ . On remarquera que l'égalité n'est pas assurée *a priori* : penser par exemple à l'application linéaire sur  $\mathbb{Z}^2 : (x, y) \mapsto (y, x)$ .

De plus, on sait que  $H_1$  et  $H_{-1}$  sont orthogonales pour le produit d'intersection sur  $H^{2n}$ . Ce produit d'intersection est une forme bilinéaire symétrique, non dégénérée d'après le théorème de dualité de Poincaré. Et comme l'action de  $T$  sur  $H^*$  et le produit d'intersection commutent, on a :  $Tx \cdot Ty = T(x \cdot y)$ , puis  $T(x \cdot y) = x \cdot y$  car  $T$  préserve l'orientation. Donc, en particulier pour  $x \in H_1$  et  $y \in H_{-1}$ , on a  $x \cdot y = -x \cdot y$ , donc  $x \perp y$ .

Enfin, on sait que si  $(X, T)$  est une M-variété, alors (voir Théorie de Thom-Smith), l'action de  $T$  sur  $H^{2k}(X, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$  est l'identité (ie  $T(x) \equiv x \pmod{2}$ ). Donc en particulier on peut bien écrire dans  $H^{2k}$ , pour tout  $x : x = \frac{x+T(x)}{2} + \frac{x-T(x)}{2}$ , et donc on en déduit que :  $H^{2k} = H_1 \oplus H_{-1}$ . (Si  $(X, T)$  est une  $(M - 1)$ -variété, les arguments s'adapteront sans changements majeurs dans la suite.) Nous pouvons alors restreindre la forme d'intersection sur chacun des sous-espaces  $H_1$  et  $H_{-1}$ . Cela définit deux nouvelles signatures (des formes quadratiques correspondantes), notées  $\sigma_1$  et  $\sigma_{-1}$  (telles que  $\sigma_1 + \sigma_{-1} = \sigma(X)$ ). On posera alors :

$$\sigma(T) := \sigma_1 - \sigma_{-1}.$$

Nous sommes alors prêts pour attaquer la preuve de la congruence de Rokhlin. On se placera dans la suite, jusqu'à mention du contraire, dans le cas où  $(X, T)$  est une M-variété.

**Lemme C.1.**  $\sigma(T) = (-1)^k \chi(X_{\mathbb{R}})$ .

*Démonstration.* Voir [5]. □

On en déduit alors immédiatement le résultat suivant :

**Lemme C.2.**  $\sigma(X) - \chi(X_{\mathbb{R}}) = 2\sigma_{(-1)^{k+1}}$ .

Il suffit donc à présent de montrer que  $\sigma_{(-1)^{n+1}} \equiv 0 \pmod{8}$ . Pour cela, on utilise un résultat classique sur les formes quadratiques :

**Théorème C.3.** *Soit  $E$  une forme quadratique unimodulaire (ie de déterminant  $\pm 1$ ), et paire (ou de type II) (ie telle que pour tout  $x$ ,  $E(x, x) = 0$  modulo 2). Alors :*

$$\sigma(E) \equiv 0 \pmod{8}.$$

*Démonstration.* Voir par exemple [Jean-Pierre Serre, Cours d'arithmétique, p91]. □

Reste donc à vérifier que l'on peut appliquer ce théorème.

**Lemme C.3.** *La forme d'intersection sur  $H^{2k}$ , et donc sur  $H_{\pm 1}$ , est unimodulaire.*

*Démonstration.* On sait que la forme quadratique sur  $H^{2k}$  est non dégénérée d'après le théorème de dualité de Poincaré. Donc, dans  $\mathbb{Z}$ , cela implique que sa matrice est inversible, et donc a déterminant  $\pm 1$ . Comme on a de plus  $H^{2k} = H_1 \oplus H_{-1}$ , on en déduit que les déterminants de la forme d'intersection restreinte aux  $H_{\pm 1}$  sont des entiers diviseurs de  $\pm 1$  ; d'où le résultat. □

**Lemme C.4.** *La forme d'intersection sur  $H_{(-1)^{n+1}}$  est de type II.*

*Démonstration.* On appelle classe de Wu de la forme quadratique (entière) en question une classe  $w_{2k} \in H^{2k}(X, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$  telle que  $u \cdot w_{2k} = u^2$  pour tout  $u \in H^{2k}(X, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ . Une telle classe existe bien puisque la forme bilinéaire symétrique non dégénérée sur  $\mathbb{Z}$  engendre, par restriction modulo 2, une forme linéaire non dégénérée :  $u \mapsto u^2 := u \cdot u$ .

Ainsi, il suffit de montrer que l'on peut choisir  $w_{2k}$  dans  $H_{(-1)^k}$  (par orthogonalité des  $H_{\pm 1}$ ).

Pour cela, on admettra que  $w_{2k}$  s'exprime comme un polynôme (dans  $H^*$  vue comme une algèbre) des classes de Stiefel-Whitney, les  $v_i$ . De plus, les  $v_{2i+1}$  sont nuls pour tout  $i$  dans notre cas, et les  $v_{2i}$  sont égaux aux restrictions modulo 2 des classes de Chern  $c_i$ , sur lesquelles on connaît l'action de  $T$  :  $Tc_i = (-1)^i c_i$ . Ainsi, par homogénéité et réduction modulo 2, on en déduit que  $Tw_{2k} = (-1)^k w_{2k}$ . Donc  $w_{2k}$  peut être choisi dans  $H_{(-1)^k}$ , ce qui conclut. □

On a donc bien obtenu la preuve de la congruence de Rokhlin dans le cas des  $M$ -variétés. Le cas des  $(M - 1)$ -variétés se traite de manière similaire. Il suffit d'utiliser une variante du théorème de classification des formes quadratiques unimodulaires aux formes quadratiques de déterminant  $\pm 2$ , et de montrer différemment le fait que la forme d'intersection est bien de déterminant  $\pm 2$  sur l'espace  $H_{(-1)^{n+1}}$ . Nous ne traiterons pas cette démonstration en détails, car elle fait intervenir des notions telles que la dualité de Serre et le théorème de Riemann-Roch, qui dépassent le cadre de ce texte.

**Remarque C.1.** En conservant les mêmes hypothèses que précédemment, il n'existe pas de résultat similaire (du type congruence de Rokhlin) pour les  $(M - i)$ -variétés, avec  $i \geq 2$ .

## Références

- [1] O. VIRO, "Introduction to topology of real algebraic varieties".
- [2] E. BRUGALLÉ, "Un peu de géométrie projective", arXiv 0911.2203v1, 2009.
- [3] C. ARNAL, "Géométrie tropicale et topologie des variétés algébriques réelles", 2017.
- [4] O. VIRO, "Patchworking real algebraic varieties", 2006.
- [5] G. WILSON, "Hilbert's sixteenth problem", 1977.
- [6] S. LANG, "Algebra ; third ed.,Addison Wesley", 1993.
- [7] I. ITENBERG, "Introduction à la géométrie tropicale"
- [8] Analysis Situs, [http ://analysis-situs.math.cnrs.fr/B-A-BA-de-topologie-des-varietes-algebriques-complexes.html](http://analysis-situs.math.cnrs.fr/B-A-BA-de-topologie-des-varietes-algebriques-complexes.html)