

Département de mathématiques et applications

Mémoire de première année

Contributions au transport branché

Auteurs :

Youcef AKROUT

Samuel BRONSTEIN

Pierre MONTEILLER

Encadrants :

Bertrand MAURY

Filippo SANTAMBROGIO



19 juin 2018

Résumé — Ce mémoire est consacré à l'étude du transport branché, en particulier dans le cas de masses ponctuelles, entre une source et N puits. Le problème du transport branché consiste à connecter deux mesures de même masse par le biais d'un réseau en minimisant un certain coût, qui sera pour notre étude proportionnel à mL^α afin de déplacer une masse m sur une distance L . Plus simplement, l'objectif est de trouver la manière optimale de transporter une certaine quantité de matière des sources vers des puits. Ce coût rend compte aussi bien de problématiques économiques que biologiques. Nous avons dans un premier temps décrit un algorithme permettant d'obtenir le graphe optimal explicitement. Des simulations numériques permettant d'obtenir la structure optimale du réseau ont ensuite été effectuées. Puis, nous nous sommes intéressés à la "robustesse" d'un réseau optimal, i.e. nous avons étudié l'ajout d'un puits de petite masse $\varepsilon > 0$ à un réseau optimal déjà existant, et nous avons cherché des conditions pour que le réseau pré-existant ne soit pas trop perturbé. Des résultats d'unicité de l'ajout optimal de ce puits ont notamment été prouvés.

Mots clés : transport branché, transport optimal, graphe, analyse convexe

Abstract — This bachelor thesis is devoted to the study of branched transport, particularly in the case of point masses, between one source to N wells. The branched transport problem consists in connecting two measures of same mass through a network minimizing a certain cost, which in our study will be proportional to mL^α in order to move a mass m over a distance L . The aim is to find the optimal way to transport a certain quantity from one source to several wells distributed in the space. First, we described an algorithm that gives explicitly the optimal graph in our case, then we performed numerical simulations to test the efficiency of that method compared to more common ones. Afterwards, we tackled the issue of the "robustness" of an optimal network, i.e. we studied the addition of a small mass > 0 to an pre-existing optimal network. Unicity results were in particular proved.

Keywords : Branched transport, optimal transport, graph, convex analysis

Table des matières

| | |
|---|-----------|
| Introduction | 5 |
| 1 Position du problème | 7 |
| 2 Le problème de Gilbert-Steiner | 9 |
| 2.1 Localisation du graphe solution dans l'enveloppe convexe des sources et des puits | 9 |
| 2.1.1 Énoncé du théorème | 9 |
| 2.1.2 Démonstration | 10 |
| 2.1.3 Questions | 12 |
| 2.2 Résolution explicite du cas une source deux puits | 12 |
| 2.2.1 Détermination des angles optimaux | 12 |
| 2.2.2 Position du point de branchement | 13 |
| 2.2.3 Structures optimales du cas une source deux puits | 16 |
| 2.3 Algorithme du pivot et réseau optimal à topologie fixée | 19 |
| 2.3.1 Topologie d'un graphe | 20 |
| 2.3.2 Algorithme du pivot | 20 |
| 3 Méthodes numériques pour trouver le réseau optimal | 23 |
| 3.1 Présentation du problème avec une source et deux puits | 23 |
| 3.2 Résolution du problème présenté | 25 |
| 3.2.1 Méthode de descente du gradient | 25 |
| 3.2.2 Utiliser les formules des angles | 27 |
| 3.2.3 Méthode du point pivot | 29 |

| | | |
|----------|---|-----------|
| 3.3 | Problème à une source et trois puits | 29 |
| 4 | Perturbation d'un réseau optimal par ajout d'un puits | 31 |
| 4.1 | Position du problème | 31 |
| 4.1.1 | Existence et Unicité | 32 |
| 4.2 | Majoration du nombre de minimiseurs | 32 |
| 4.3 | Caractérisation angulaire du branchement d'un nouveau puits | 33 |
| 4.3.1 | Raccord sur un sommet intérieur à une arête | 34 |
| 4.3.2 | Les extrémités | 34 |
| 4.3.3 | Questions | 35 |
| 4.4 | Caractérisation des minimas pris en des points de bifurcations | 36 |
| 4.4.1 | Conditions de minimum local en une bifurcation | 36 |
| 4.4.2 | Cas limites | 37 |
| 4.5 | Minima en amont l'un de l'autre | 37 |
| 4.5.1 | Deux résultats d'unicité | 37 |
| 4.5.2 | Comportement pour ε proche de 0 | 39 |
| 4.5.3 | Questions : | 41 |
| 4.6 | Propriétés topologiques de l'ensemble des points où le problème est bien posé | 41 |
| 4.6.1 | Questions | 45 |
| 5 | Une autre approche du problème d'ajout d'un puits | 46 |
| 5.1 | Définition d'une distance | 46 |
| 5.2 | Identification de la distance pour ε proche de 0 | 48 |

Introduction et Motivations

Il existe de nombreux réseaux de distributions permettant de transporter des biens d'un site de production à des sites de grandes distributions. On peut notamment citer le réseau routier mais aussi les réseaux de distribution électrique ou encore les réseaux de gazoducs. Ces réseaux ont la particularité de ressembler très fortement à des systèmes biologiques existant tels que les racines d'un arbre ou encore le poumon. Ces réseaux semblent résulter d'une minimisation du coût en énergie sous des contraintes topologiques. Ils prennent la forme d'arbres faits de bifurcations, de branchements. Une explication intuitive à cette forme prise par le réseau est qu'il est plus économique de faire une grosse route plutôt que des dizaines de petites routes. Ce sont des économies d'échelle.

Ce type de coût apparaît en réalité de manière très naturelle, dès lors qu'il existe un phénomène d'économie d'échelle : transporter ou construire quelque chose de taille m coûte davantage lorsque m augmente mais proportionnellement moins, rapporté à la taille m . C'est le cas par exemple du transport routier, où un certain coût doit être payé pour construire les routes, mais il ne coûte pas beaucoup plus cher d'augmenter le trafic ou d'élargir le réseau. De manière générale, ce phénomène apparaît lorsqu'une partie du coût réside dans le coût de construction d'une certaine structure. Cette économie d'échelle se traduit par le fait que $C(m)/m$ (où C est la fonction coût) est décroissante en m , ce qui implique que C est sous-additive.

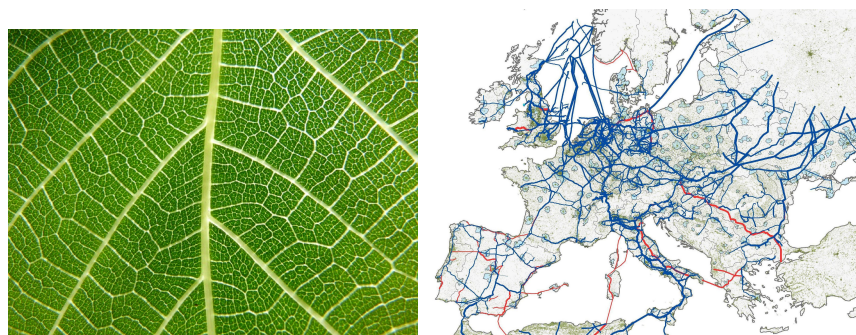


FIGURE 1 – Veines d'une feuille (à gauche) et réseau des gazoducs en Europe (à gauche)

Dans ce mémoire, on s'est donc intéressé au problème suivant : on cherche un réseau

pour transporter une masse m d'un endroit à un autre avec une énergie minimale. On fait l'hypothèse que le réseau obtenu rende compte d'économies d'échelle comme les réseaux biologiques décrits ci dessus. Le transport branché correspond à l'étude de ces réseaux ; c'est donc un développement du problème de transport optimal de Monge-Kantorovich. On peut résumer ce dernier en disant qu'il s'agit de trouver le chemin qui permet de transporter un tas de sable d'un endroit à un autre avec un effort minimal. On rajoute simplement une condition sur l'effort à fournir pour aller d'un endroit un à un autre. Cet ajout induit une différence fondamentale dans le réseau résultant. Dans le cas simple d'une source de masse 1 reliant une barre de masse homogène, les deux réseaux sont :

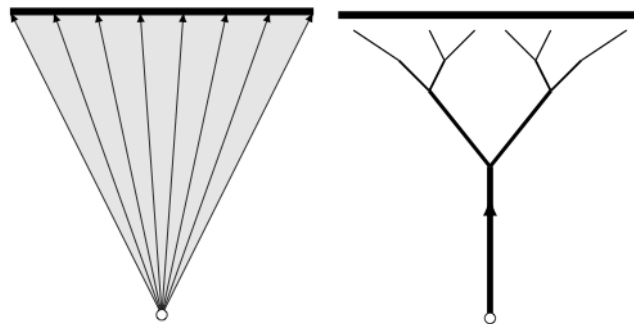


FIGURE 2 – Transport de Monge (à gauche) et transport branché (à droite) provenant de [1]

On peut dès lors poser comme condition sur le réseau cherchée que le coût en énergie est sous-additif en masse, i.e. que le coût pour transporter une masse $m = m_1 + m_2$ est plus faible que la somme des coûts associés aux masses m_1 et m_2 . On le pose alors égal à $l \times m^\alpha$ avec $0 \leq \alpha \leq 1$. Le but de ce mémoire est donc de développer quelques aspects des réseaux optimaux sous cette contrainte, i.e quelques aspects du transport branché dans le cas discret.

Nous nous sommes tout d'abord intéressés à l'étude du chapitre 12 de [2], à savoir la résolution du problème pour une topologie dyadique fixée. Puis nous avons étudié des méthodes numériques associées à cette étude. Enfin, nous nous sommes posés le problème de la perturbation d'un réseau optimal déjà connu : nous avons développé deux approches d'étude. Tout au long de ce mémoire, nous avons exposé plusieurs questions, qui se posaient naturellement au fil de notre progression.

Chapitre 1

Position du problème

On cherche dans ce court chapitre à définir les grandeurs et les principales notions permettant de poser le problème étudié de façon rigoureuse. On se place dans \mathbb{R}^d . Dans notre problème, on dispose de n points sources $(S_i)_{1 \leq i \leq n}$ et m points puits $(M_j)_{1 \leq j \leq m}$, pondérés respectivement par les masses $(a_i)_i$ et $(b_j)_j$. Le but est de connecter ces sources à ces puits sous la condition de sous-additivité du coût par rapport à la masse. On lui donne la forme particulière $l \times m^\alpha$ avec $0 \leq \alpha \leq 1$. Le cas $\alpha = 1$ est le cas du problème de Monge-Kantorovich et le cas $\alpha = 0$ est le cas du problème de minimisation des distances, le problème de Steiner.

De la même façon que pour le transport optimal, on peut associer à ces deux ensembles de points deux mesures atomiques

$$\mu = \sum_i a_i \delta_{S_i}$$

$$\nu = \sum_j b_j \delta_{M_j}$$

Le but devient alors de trouver un plan de transport, i.e. une mesure sur l'espace produit dont les mesures marginales sont μ et ν , optimisant le coût. Nous nous sommes intéressés dans ce mémoire aux plans de transport concentrés dans un graphe, si bien que parler de plan de transport ou de graphe pondéré connectant les mesures revient au même. Nous devons alors définir ce qu'est un graphe pondéré, notion centrale dans ce mémoire, et le coût qui lui est associé. Dès lors, on pourra poser le problème du transport branché simplement.

Définition 1.1 (Graphe pondéré). Un graphe pondéré est un triplet $G = (V, E, \Theta, \gamma)$ où :

- V est un ensemble de points (les sommets du graphe)
- E est un ensemble de couples de points de V (les arêtes)
- $\Theta = (\theta_e)_{e \in E}$ représente pour chaque arête e un poids associé

- $\gamma : E \longrightarrow V \times V$ associe à chaque arête la paire de points associés

Dans le cas du transport branché, on omettra souvent la fonction γ car les arêtes sont toujours simples. De plus, on confondra dans la suite graphe et réseau optimal ou alors ensemble des arêtes du graphe et réseau selon les cas. On dit qu'il connecte les mesures μ et ν si la loi de Kirchoff est respecté, i.e si pour tout sommet, la masse entrante est la même que la masse sortante.

Intuitivement, le coût associé à un graphe est la somme des coûts associés aux différentes arêtes, c'est une grandeur extensive.

Définition 1.2 (Coût associé à un graphe). On associe à un graphe pondéré $G = (V, E, \Theta)$ la quantité suivante, appelée énergie de Gilbert :

$$E^\alpha(G) = \sum_{e \in E} \theta_e^\alpha |e|$$

où $|e|$ désigne la longueur de l'arête.

Ainsi le problème du transport branché dans le cas discret est de trouver le réseau optimal G connectant μ et ν en minimisant le coût de transport. On recherche alors :

$$\operatorname{argmin}_G \{E^\alpha(G) = \sum_{e \in E} \theta_e^\alpha |e|, \mu \xrightarrow{G} \nu\}$$

Chapitre 2

Le problème de Gilbert-Steiner

Le but de ce chapitre est de présenter un algorithme permettant d'obtenir la structure du réseau optimal pour une topologie dyadique fixée. Tout d'abord, on résout le cas une source deux puits. Puis, à partir de cette résolution, on présente l'algorithme du pivot permettant d'obtenir le réseau optimal souhaité. Ce chapitre reprend les principaux résultats du chapitre 12 de [2].

2.1 Localisation du graphe solution dans l'enveloppe convexe des sources et des puits

2.1.1 Énoncé du théorème

On simplifie le problème considéré en ne prenant en compte qu'une seule source S . On souhaite montrer que le graphe est inclus dans l'enveloppe convexe fermée de la source S et des puits $(M_j)_j$.

Théorème 2.1. *Soit $G = (V, E)$ un réseau optimal constitué de bifurcations entre la source S et les puits $(M_j)_j$. Alors l'union des arêtes du réseau est incluse dans l'enveloppe convexe fermée de la source et des puits.*

Tout d'abord, on remarque que, de façon triviale, $V \subset \bigcup_{e \in E} e$. De même, on sait que toute arête est segment de deux sommets, et donc est dans l'enveloppe convexe des sommets. Pour montrer le résultat, il suffit donc de montrer que V est inclus dans l'enveloppe convexe fermée de la source et des puits, i.e, on est ramené à montrer le résultat suivant

$$V \subset \overline{\text{conv}(S, \{M_j\})}$$

Pour cela, nous procédons par récurrence sur le nombre de puits N .

2.1.2 Démonstration

Initialisation : Le cas une source deux puits (N=2)

Soient M_1, M_2, S trois points de \mathbb{R}^N . Soit $\mu_+ = m_3\delta_S$ et $\mu_- = m_1\delta_{M_1} + m_2\delta_{M_2}$ les mesures de départ et d'arrivée. On a la relation $m_1 + m_2 = m_3$ et on suppose $m_1, m_2 > 0$ pour écarter tous les cas triviaux.

Lemme 2.1. *Dans le cas où M_1, M_2, S sont alignés, le réseau optimal de μ_+ à μ_- est inclus dans le segment minimal contenant les trois points. Sinon, M_1, M_2, S ne sont pas alignés et le réseau optimal est contenu dans le triangle M_1M_2S . De plus, c'est un graphe à au plus 3 arêtes.*

Démonstration. Dans le cadre d'une configuration où il n'y a pas de branchement (comme dans un réseau issu du transport de Monge), chaque arête est un segment d'extrémités la source et un puits, ou bien de deux puits. Ainsi il n'y a rien à démontrer. Dans le cas d'une configuration avec branchement, i.e. en Y , le point de bifurcation B minimise l'énergie de Gilbert sur l'ouvert $\mathbb{R}^2 \setminus \{S, M_1, M_2\}$

$$E^\alpha(G) = \|\vec{SB}\| (m_1 + m_2)^\alpha + m_1^\alpha \|\vec{BM_1}\| + m_2^\alpha \|\vec{BM_2}\|$$

En posant $B = (x, y)$ et en écrivant la condition d'optimalité du réseau $dJ(B) = 0$, on vérifie aisément

$$\left(\frac{(m_1 + m_2)^\alpha}{\|\vec{SB}\|} + \frac{m_1^\alpha}{\|\vec{BM_1}\|} + \frac{m_2^\alpha}{\|\vec{BM_2}\|} \right) B = \frac{(m_1 + m_2)^\alpha}{\|\vec{SB}\|} S + \frac{m_1^\alpha}{\|\vec{BM_1}\|} M_1 + \frac{m_2^\alpha}{\|\vec{BM_2}\|} M_2$$

Finalement, B est combinaison convexe de S, M_1, M_2 , ce qui est la propriété cherchée. \square

Hérédité

Supposons le résultat démontré pour $N \geq 2$. Montrons le résultat pour $N + 1$. Soit G un réseau optimal pour $(M_j)_{1 \leq j \leq N+1}$. On se place dans le cas où le graphe n'est constitué que de bifurcations, dans le sens où de tout branchement partent au maximum trois segments. Il n'existe pas alors de trifurcations. Ceci a été démontré dans le cas $0 \leq \alpha < 0.5$, seulement conjecturé si $\alpha \geq 0.5$

On sait alors que il existe i, j tel que on ait la configuration reportée dans la figure 2.1 avec les points P et T , M_i, M_j correspondants.

En remplaçant M_i et M_j par P associé à la masse $m_i + m_j$, on obtient un nouveau réseau optimal de la source S vers les N puits $(M_k)_{k \neq i, j} \cup P$. Ce réseau est alors solution du problème de minimisation de l'énergie de Gilbert avec comme puits les points $(M_k)_{k \neq i, j} \cup P$. Appliquons alors l'hypothèse de récurrence, il vient alors

$$G \setminus \{[PM_i] \cup [PM_j]\} \subset \overline{\text{conv}(S, P, \{M_k\}_{k \neq i, j})}$$

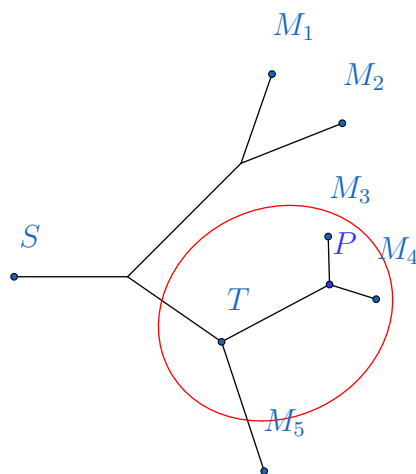


FIGURE 2.1 – schéma de la procédure utilisée

Toutefois, la preuve du cas $N = 2$ nous indique que le réseau de source T et de puits M_i et M_j étant optimal

$$[PM_i] \cup [PM_j] \subset \overline{\text{conv}(T, M_i, M_j)}$$

Et donc, finalement

$$\overline{\text{conv}(G)} \subset \overline{\text{conv}(S, \{M_k\}, T)} \quad (\star)$$

On définit la notion de point extrémal de la manière suivante :

Définition 2.1. Soit C un ensemble. On dit que $P \in C$ est un point extrémal de C si pour tout A et B points de C , si $P \in [AB]$ alors $P = A$ ou $P = B$

Pour conclure, il nous faut alors utiliser le lemme suivant

Lemme 2.2. Soit C un convexe fermé et $M \in C$. Si M est combinaison convexe de N points de $C \setminus \{M\}$, alors M est non extrémal.

Démonstration. En effet, $M = \sum_{i=1}^N \lambda_i M_i$ avec $\forall i, \lambda_i > 0$ et $\sum_{i=1}^N \lambda_i = 1$ et $\forall i, M_i \in C \setminus \{M\}$.

En particulier, $0 < \lambda_1 < 1$. Soit $M^* = \frac{\sum_{i=2}^N \lambda_i M_i}{\sum_{i=2}^N \lambda_i}$. Alors $M^* \in C$ et $M \in]M^* M_1[$

Donc M n'est pas extrémal, ce qui est la propriété voulue. □

Fin de la preuve

Soit Ξ l'ensemble des points extrémaux de $\overline{\text{conv}(G)}$. D'après (★) et le lemme, on sait que $\Xi \subset \{M_k\} \cup S \cup T$. Or T n'est pas extrémal. Ainsi $\Xi \subset \{M_k\} \cup S$. Par le théorème de Krein-Milman, on a $\overline{\text{conv}(G)} \subset \overline{\text{conv}(\Xi)}$. D'où le résultat.

□

2.1.3 Questions

- Si $\alpha \geq 0.5$, il faut gérer le cas où le réseau optimal n'est pas constitué uniquement de bifurcations. Est-il possible de considérer les éventuels sommets à plus de 4 arêtes comme des cas limites de réseaux à bifurcations ?
- La démonstration peut-elle se généraliser au cas M sources, N puits ?

2.2 Résolution explicite du cas une source deux puits

Dans cette section on s'intéresse au cas où il n'y a qu'une seule source et 2 puits, cas fondamental dans l'algorithme du pivot permettant d'obtenir la structure optimal d'un arbre dyadique.

2.2.1 Détermination des angles optimaux

Proposition 2.1. *Soit G un réseau optimal de μ_+ à μ_- contenant trois arêtes. Le point de bifurcation B satisfait les contraintes suivantes :*

$$\cos \theta_1 = \frac{k_1^{2\alpha} + 1 - k_2^{2\alpha}}{2k_1^\alpha} \quad (2.1)$$

$$\cos \theta_2 = \frac{k_2^{2\alpha} + 1 - k_1^{2\alpha}}{2k_2^\alpha} \quad (2.2)$$

$$\cos(\theta_1 + \theta_2) = \frac{1 - k_2^{2\alpha} - k_1^{2\alpha}}{k_1^\alpha k_2^\alpha} \quad (2.3)$$

Avec $k_1 = \frac{m_1}{m_1+m_2}$ et $k_2 = \frac{m_2}{m_1+m_2}$

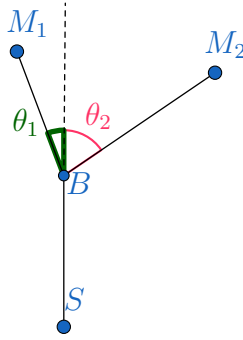


FIGURE 2.2 – Structure en Y respectant les conditions angulaires

Démonstration. Par le lemme précédent, on peut simplement prouver le résultat en dimension 2. Soit $B \in \mathbb{R}^2$, considérons alors le graphe pondéré $G(B)$ fait des sommets (M_1B, m_1) , (M_2B, m_2) et (SB, m_3) avec $B \in \mathbb{R}^2 \setminus \{M_1, M_2, S\}$.

Le coût de ce réseau est :

$$E^\alpha(G(B)) = m_1^\alpha \|\overrightarrow{M_1B}\| + m_2^\alpha \|\overrightarrow{M_2B}\| + m_3^\alpha \|\overrightarrow{BS}\|$$

$G(B)$ est optimal si c'est un point critique de l'énergie. On pose alors $\vec{e}_i = \frac{\overrightarrow{M_iB}}{\|\overrightarrow{M_iB}\|}$ le vecteur unitaire qui va de M_i à B . On a alors le développement suivant :

$$\|\overrightarrow{M_iB} + \vec{v}\| = \overrightarrow{M_iB} + \vec{e}_i \cdot \vec{v} + o(\|\vec{v}\|)$$

Donc la condition d'annulation du gradient de l'énergie s'écrit :

$$m_1^\alpha \vec{e}_1 + m_2^\alpha \vec{e}_2 + m_3^\alpha \vec{e}_3 = 0$$

On pose $k_1 = \frac{m_1}{m_1+m_2}$ et $k_2 = \frac{m_2}{m_1+m_2}$. Par projection de cette équation sur \vec{e}_i , on obtient les trois expressions avec les θ_i comme sur la figure. \square

Remarque 2.1. Le cas où $\alpha = \frac{1}{2}$ est particulièrement intéressant car alors $\theta_1 + \theta_2 = \frac{\pi}{2}$. Cette disposition ne dépend pas du point A_3 .

2.2.2 Position du point de branchement

Lemme 2.3 (Angle au centre). *Soit M_1 et M_2 deux points d'un cercle de centre O et B le plus grand des deux arcs de cercles M_1M_2 . Alors l'angle au centre M_1OM_2 vaut la moitié de l'angle M_1BM_2 .*

Démonstration. On utilise le fait que la somme des angles d'un triangle vaut $\frac{\pi}{2}$ et que les angles à la base d'un triangle isocèle sont égaux.

Proposition 2.2. Pour deux points donnés M_1, M_2 et un angle $\theta \leq \frac{\pi}{2}$, l'ensemble des points B tels que $M_1BM_2 = \theta$ est l'union de deux arcs de cercles passant par ces deux points et de rayon $\frac{|A_1A_2|}{2\sin\theta}$. On appelle ces arcs, arcs équiangles.

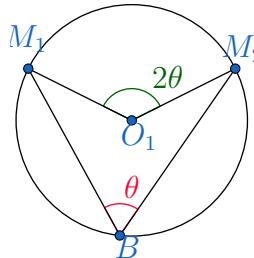


FIGURE 2.3 – Angle au centre

Démonstration. Soient O_1 et O_2 deux points équidistants de M_1 et M_2 et tel qu'ils interceptent l'arc M_1M_2 avec un angle 2θ . On peut alors appliquer l'angle au centre au cercle centré en O_1 de rayon O_1M_1 : on sait alors que le deuxième arc de cercle est fait de point B tels que l'angle M_1BM_2 vaut θ . De même pour le cercle de centre O_2 de rayon O_2M_2 . Soit maintenant B tel que $M_1BM_2 = \theta$. Le cercle passant par B, M_1 et M_2 est tel que B soit situé sur le grand arc de cercle M_1M_2 . Il en résulte que le centre du cercle O est soit O_1 ou O_2 et que son rayon vaut alors O_1M_1 \square

Proposition 2.3 (Indépendance du point pivot). Soit \mathbf{G} un réseau optimal de μ_+ à μ_- contenant trois arêtes. Soit C l'arc équiangle défini associé à M_1, M_2 et θ dans la proposition précédente. Il existe un point que l'on appellera point pivot $P \in C'$ qui ne dépend pas de S et tel que le point de bifurcation B soit l'intersection de PS avec C

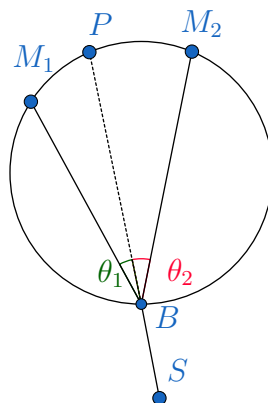


FIGURE 2.4 – Point pivot et point de bifurcation

Démonstration. Notons P le point d'intersection de SB avec C' . Comme le réseau est supposé optimal, les conditions d'angle du théorème sont vérifiées.

On alors $PBM_1 = \theta_1$. Donc le plus grand arc de cercle M_1M_2 est un arc équiangle pour l'angle θ_1 . Soit O son centre. Par l'angle au centre on a : $M_1OP = 2\theta_1$.

On peut donc en conclure que le point P est l'image de M_1 par la rotation d'angle $2\theta_1$ et de centre O . Le point pivot ne dépend alors pas de S le point source et le point B est obtenu comme intersection de SP avec C . \square

Théorème 2.2 (Inégalité de Ptolémée). *Soient A, B, C, D quatre points tel que $ABCD$ soit un quadrilatère convexe. Alors on a l'égalité*

$$|AC||BD| + |AB||CD| \geq |AD||BC|$$

Il y a égalité si et seulement si A, B, C, D sont cocycliques

Ce théorème nous permet d'affirmer que si quatre points sont cocycliques, le produit des deux diagonales est égal à la somme des produits des côtés opposés.

Démonstration. Pour prouver cette inégalité, on utilise l'égalité algébrique :

$$(d - a)(c - b) + (d - c)(b - a) = (d - b)(c - a)$$

On passe ensuite au module et on utilise l'inégalité triangulaire. \square

Lemme 2.4. *Soit \mathbf{G} un réseau optimal de μ_+ à μ_- contenant trois arêtes et P le point pivot de la proposition précédente. Alors l'énergie de Gilbert vaut $E^\alpha(\mathbf{G}) = m_3^\alpha |SP|$.*

Démonstration. Cela résulte de l'inégalité de Ptolémée appliquée au quadrilatère M_1BM_2S qui donne

$$|BP||M_1M_2| = |BM_1||P| + |BM_2||PM_1|$$

De plus, $|M_1P| = \left(\frac{m_2}{m_3}\right)^\alpha |M_1M_2|$ (on calcule simplement $\sin \theta_1$ et on utilise le lemme précédent). De même, $|M_2P| = \left(\frac{m_1}{m_3}\right)^\alpha |M_1M_2|$. Il en résulte que

$$\begin{aligned} E^\alpha(\mathbf{P}) &= m_1^\alpha |BM_1| + m_2^\alpha |BM_2| + m_3^\alpha |SB| \\ &= m_3^\alpha (|BP| + |SB|) \\ &= m_3^\alpha |SP| \end{aligned}$$

\square

2.2.3 Structures optimales du cas une source deux puits

Définition 2.2. Soit G un réseau optimal de μ_+ à μ_- . Il y a trois structures optimales possibles :

- La structure en Y faite de trois arêtes.
- La structure en V faite de deux arêtes (SM_1, m_1) et (SM_2, m_2) .
- La structure en L, il en existe deux possibles : (SM_1, m_3) et (M_1M_2, m_2) ou (SM_2, m_3) et (M_2M_1, m_1)

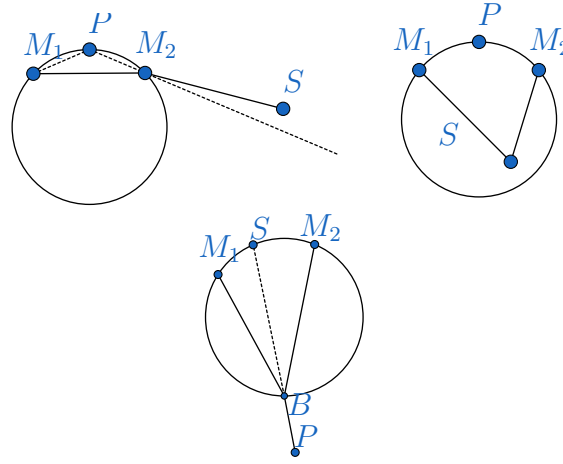


FIGURE 2.5 – Trois des quatre structures optimales possibles : structure en L (en haut à gauche), en V (en haut à droite) et en Y (en bas)

Théorème 2.3. Soit G un réseau optimal de μ_+ à μ_- . Soit P le point pivot associé aux points (M_1, m_1) et (M_2, m_2) . Soit C l'arc équiangle contenu dans le même demi plan que S . On distingue trois structures possibles selon la position de S :

- Si $SP \cap C = \{B\}$ et $B \in [SP]$, alors G a une structure en Y
- Si $SP \cap C = \{B\}$ et $B \notin [SP]$, alors G a une structure en V
- Si $SP \cap C = \emptyset$, alors G a une structure en L

Démonstration. Sans perte de généralités, on peut supposer $m_3 = 1$ et $|M_1M_2| = 1$. Pour alléger les calculs notons $a = |SM_1|$, $b = |SM_2|$, $c = |M_1P|$ et $d = |M_2P|$ et $e = |SP|$ comme d'après la 2.6. On sait alors que $|M_1P| = m_2^\alpha$ et $|M_2P| = m_1^\alpha$

Cas 1 : $SP \cap C = \{B\}$ et $B \in [SP]$. Comparons alors le coût des différentes structures.

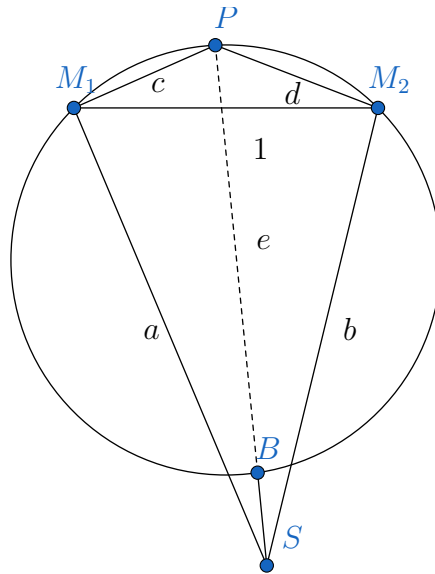


FIGURE 2.6 – Démonstration de théorème 2.3

- la structure en Y a un coût égal à e par le lemme précédent
- la structure en V a un coût égal à $am_1^\alpha + bm_2^\alpha = ad + bc$ car $c = m_2^\alpha$
- les structures en L ont pour coût : $a + c$ et $b + d$

Par inégalité triangulaire, on peut éliminer les deux structures en L car leurs coûts sont supérieurs à celui de la structure en Y . Comme A_3 n'est pas cocyclique avec M_1, M_2 et P . L'inégalité de Ptolémée nous donne :

$$ad + bc > e$$

car $|M_1M_2| = 1$. Il en résulte que la structure en Y est optimale.

Il reste alors deux cas à considérer $SP \cap C = \emptyset$ et $B \notin [SP]$. Dans les deux cas, il n'existe pas de point de bifurcation pouvant satisfaire les conditions d'angles de la première proposition. Les deux seuls types de structures à considérer sont alors les structures en V et en L .

Cas 2 : $B \notin [SP]$

Montrons que la structure optimale est la structure en V.

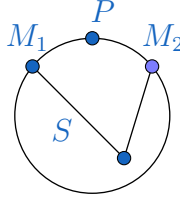


FIGURE 2.7 – Structure en V

Dans ce cas, l'angle M_1SM_2 est supérieur à $\theta_1 + \theta_2$. Montrons que la structure en V est optimale par rapport aux structures en L. Si on permute les masses sur les points M_1 et M_2 échange leurs rôles : on peut donc simplement montrer que la structure en V est optimale par rapport à une des structures en L.

Le coût de la structure en V est $ad + bc$, et celui de la structure en L est $a + c$. Il suffit alors de montrer que

$$ad + bc < a + c$$

Si $S \in C \cup [M_1M_2] \setminus A_1$, cette inégalité est vérifiée. En effet, si $A_3 \in C \setminus A_1$, par le théorème de Ptolémée $ad + bc = e$ et par l'inégalité triangulaire, $e < a + c$. Par ailleurs, si $S \in]M_1M_2[$ alors $b \in [0, 1[$ et $d < 1$, d'où l'inégalité.

Par l'absurde, supposons qu'il existe un point $A_{3,0}$ tel qu'il y ait égalité, i.e. tel que $a_0d + b_0c = a_0 + c$. Montrons alors qu'il existe un point vérifiant cette égalité tout en appartenant à $C \cup [M_1M_2] \setminus M_1$, ce qui nous permettra de conclure.

On remarque que tous les points S_λ tels que $(a_\lambda, b_\lambda) = (a_0 + \lambda cb_0 \lambda (1 - d))$ avec λ positif vérifient l'égalité. Cherchons une condition sur λ pour qu'il existe un point $A_{3,\lambda}$ tel que $|S_\lambda M_1| = a_\lambda$ et $|S_\lambda M_2| = b_\lambda$. Cela revient à avoir une intersection du cercle de centre A_1 de rayon a avec celui de centre M_2 de rayon b . Comme on a posé $|M_1M_2| = 1$, cela revient à montrer les inégalités suivantes :

$$1 - b_\lambda \leq a_\lambda \leq 1 + b_\lambda$$

Tout d'abord, on a bien toujours $a_\lambda + b_\lambda = a_0 + b_0 + \lambda(c + 1 - d) \geq a_0 + b_0 > 1$ car par l'inégalité triangulaire $a_0 + b_0 > |M_1M_2| = 1$.

De plus, $a_\lambda - b_\lambda = a_0 - b_0 + \lambda(c + d - 1)$. Or, $a_0 - b_0 < 1$ et par inégalité triangulaire $c + d - 1 > 0$. Il en résulte qu'il existe une valeur $\lambda_M > 0$ telle que $a_0 - b_0 + \lambda_M(c + d - 1) = 1$. Ainsi, pour $0 \leq \lambda \leq \lambda_M$, on a $a_\lambda \leq 1 + b_\lambda$. On peut donc trouver un $A_{3,\lambda}$ convenable.

Concluons par un argument de continuité. Pour $\lambda = \lambda_M$, on a $a_\lambda = b_\lambda + 1$ ce qui signifie que A_1, A_2 et A_{3,λ_M} sont alignés. Soit $\varphi : \lambda \in [0, \lambda_M] \rightarrow A_{3,\lambda}$, cette fonction est continue, donc son image est un intervalle. Il existe alors $\lambda_0 \in]0, \lambda_M[$, tel que $S_{\lambda_0} \in C \cup [M_1M_2]$. Comme $a_0 + \lambda_0 c > 0$, $S_{\lambda_0} \in C \cup [M_1M_2] \setminus M_1$. On obtient une contradiction car alors A_{3,λ_0}

vérifie à la fois l'inégalité stricte comme élément de $C \cup [M_1M_2] \setminus M_1$ mais aussi l'égalité par définition des S_λ .

Finalement, **la structure optimale est une structure en V.**

Cas 3 : $M_1P \cap C = \emptyset$

Sans perte de généralité supposons que S soit localisé dans la zone délimitée par M_1M_2 et PM_2 , ce qui signifie que l'angle entre M_1M_2 et SM_2 est plus petit que θ_1 .⁷ Prouvons que la structure en L est optimale par rapport à la structure en V, i.e. $b + d < bc + ad$. Or par le théorème d'al-Kashi, on a $a = \sqrt{b^2 + 1 + 2b \cos \theta}$.

De plus, comme $\cos \theta \geq \cos \theta_2$, on peut simplement prouver

$$bc + d\sqrt{b^2 + 1 + 2b \cos \theta_2} > b + d$$

Après calculs, ceci est équivalent à

$$\cos \theta_2 > \frac{1-c}{d} - \frac{a}{2} \left(1 - \left(\frac{1-c}{d}\right)^2\right)$$

Par l'inégalité triangulaire, on a l'inégalité $\frac{1-c}{d} < 1$. Il faut alors montrer que $\cos \theta_2 > \frac{1-c}{d}$ ce qui est vrai car $\cos \theta_2 = \frac{1+d^2-c^2}{2c}$ par Al-Kashi. **La structure optimale est en L.** \square

On a ainsi résolu le cas d'une source et de deux puits, cas fondamental pour la résolution générale, lorsqu'on considèrera N puits.

2.3 Algorithme du pivot et réseau optimal à topologie fixée

Pour chercher le réseau optimal dans le cas discret, on traite deux problèmes d'optimisation :

- Optimisation de la topologie : chercher "l'allure" de la structure (en un sens à préciser).
- Optimisation du coût : pour une topologie fixée, on cherche le lieu optimal pour les points de bifurcation.

Dans cette section, on présente une construction récursive donnant les points de bifurcation (appelés les points de Steiner) d'une structure optimale qui a une topologie prescrite en dimension 2. Afin d'expliquer cette construction, on considère le cas simple des arbres avec une topologie de Steiner complète.

2.3.1 Topologie d'un graphe

Définition 2.3. Une topologie \mathcal{T} pour un ensemble $\{v_i, i \in \llbracket 1, n \rrbracket\}$ donné de points de \mathbb{R}^N est un graphe connexe non orienté $G = (V, E)$ où E est l'ensemble des arêtes et $V = \{v_i, i \in \llbracket 1, n + m \rrbracket\}$ est l'ensemble des sommets. Les points $\{v_i, i \in \llbracket 1, n + m \rrbracket\}$ qui ne sont pas présents dans l'ensemble initial de points $\{v_i, i \in \llbracket 1, n \rrbracket\}$ sont les points de Steiner.

Définition 2.4 (Coût d'une topologie). Un plan de transport fini induit une structure de graphe, et donc une topologie. On note $TP(\mu^+, \mu^-, \mathcal{T})$ l'ensemble des plans de transport avec la topologie \mathcal{T} . Le coût de la topologie se note

$$C(\mu^+, \mu^-, \mathcal{T}) := \inf_{G \in TP(\mu^+, \mu^-, \mathcal{T})} E^\alpha(G)$$

Définition 2.5. Une topologie de Steiner est une topologie \mathcal{T} telle que tous les sommets de Steiner ont un degré 3, i.e qu'il n'existe pas de trifurcations. Une topologie de Steiner complète est tel qu'elle possède $2n - 2$ sommets $\{v_i, i \in \llbracket 1, 2n - 2 \rrbracket\}$ et $2n - 3$ arêtes.

2.3.2 Algorithme du pivot

Présentons à présent la méthode pour trouver le réseau optimal associé à une topologie donnée. On suppose que c'est une topologie de Steiner complète non dégénérée (les $2n - 2$ sommets sont bien distincts deux à deux, i.e. on a uniquement des structures en "Y").

- Cas de base : on considère le problème à une source S (un Dirac) et 2 puits : 2 masses de Dirac en M_1 et en M_2 . Le problème est non dégénéré. On note B l'unique point de bifurcation du réseau optimal. D'après ce qui précède, il existe un point pivot P tel que B est l'intersection de la droite (SP) avec le cercle qui passe par M_1 , M_2 et P . Il suffit donc de déterminer P pour avoir B et donc le graphe optimal.
- Cas général : on applique la construction précédente récursivement. Par exemple, on considère μ^- une mesure cible constituée de 4 masses de Dirac en A , B , C et D , et μ^+ la masse de Dirac en S . On suppose que la structure optimale suit la topologie suivante (voir la figure) : il y a une première bifurcation B_1 , le premier sous-arbre irrigue A et B et le second irrigue C et D . B_2 est le point de bifurcation pour le sous-graphe (source = B_1 , puits = A et B), de même pour B_3 et le sous-graphe (source = B_1 , puits = C et D).
- Point clé du raisonnement récursif : on considère le réseau optimal. On a alors que chaque sous-arbre doit être optimal pour le problème d'irrigation qu'il induit. Donc, les sous-arbres (source = B_1 , puits = A et B) et (source = B_2 , puits = C et D) sont tous les deux optimaux. Donc, les points B_2 et B_3 peuvent être construits grâce aux points pivots P_2 et P_3 . Ensuite, le sous-arbre (source = S , puits = B_2 et B_3)

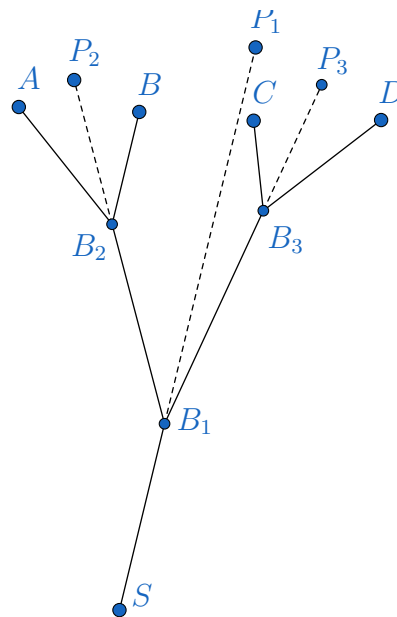


FIGURE 2.8 – Topologie de la structure optimale

est optimal. L'irrigation de S vers P_1 et P_2 est aussi optimale car B_1 , B_2 et P_2 sont alignés et B_1 , B_3 et P_3 le sont aussi. Par conséquent, on peut construire B_1 via le point pivot P_1 associé à P_2 et P_3 .



FIGURE 2.9 – Construction des deux premiers points pivots

On présente maintenant la construction étape par étape.

- La topologie donnée est telle que A est associé à B et C avec D . Ainsi, on construit les deux points pivots P_2 et P_3 .
- On groupe ensuite les points P_2 et P_3 pour construire le dernier point pivot P_1 .
- Le point de bifurcation B_1 est obtenu comme l'intersection de la droite (SP_1) et du cercle $(P_2P_1P_3)$ (i.e. le cercle passant par ces points).

- On obtient le point de bifurcation B_2 comme l'intersection de la droite (B_1P_2) et du cercle (AP_2B) .
- Enfin, on obtient le point de bifurcation B_3 comme l'intersection de la droite (B_1P_3) et du cercle (CP_3D) .

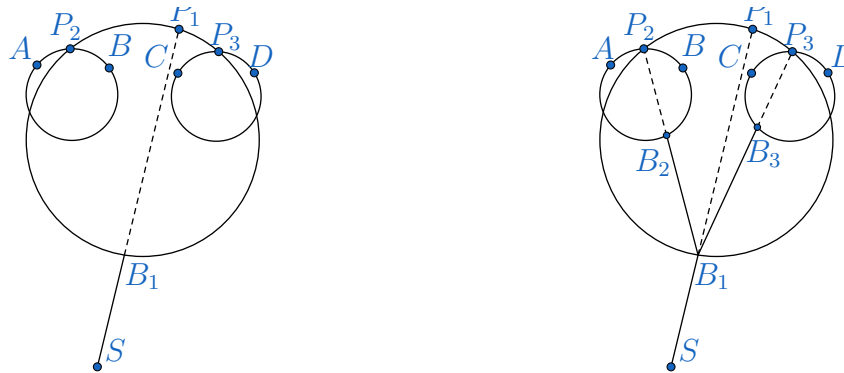


FIGURE 2.10 – Construction des points de bifurcation

Chapitre 3

Méthodes numériques pour trouver le réseau optimal

3.1 Présentation du problème avec une source et deux puits

On considère le problème de transport à une source S et deux puits M_1 de masse m_1 et M_2 de masse m_2). On note $M := m_1 + m_2$. On a vu précédemment qu'il y avait trois types de structure possible pour le graphe optimal.

- Structure en "Y" : Toute la masse M est transportée vers un point de bifurcation appelé $B \in \text{conv}(S, M_1, M_2) \setminus \{S, M_1, M_2\}$, une masse m_1 est transmise vers le point M_1 et une masse m_2 vers le point M_2 . On pose $\theta_1 := (\overrightarrow{SB}, \overrightarrow{BM_1})$ et $\theta_2 := (\overrightarrow{SB}, \overrightarrow{BM_2})$ les angles géométriques associés et on note également $k_1 = \frac{m_1}{M}$ et $k_2 = \frac{m_2}{M}$. On a alors 3 équations vérifiées :

$$\cos \theta_1 = \frac{k_1^{2\alpha} + 1 - k_2^{2\alpha}}{2k_1^\alpha} \quad (3.1)$$

$$\cos \theta_2 = \frac{k_2^{2\alpha} + 1 - k_1^{2\alpha}}{2k_2^\alpha} \quad (3.2)$$

$$\cos(\theta_1 + \theta_2) = \frac{1 - k_2^{2\alpha} - k_1^{2\alpha}}{k_1^\alpha k_2^\alpha} \quad (3.3)$$

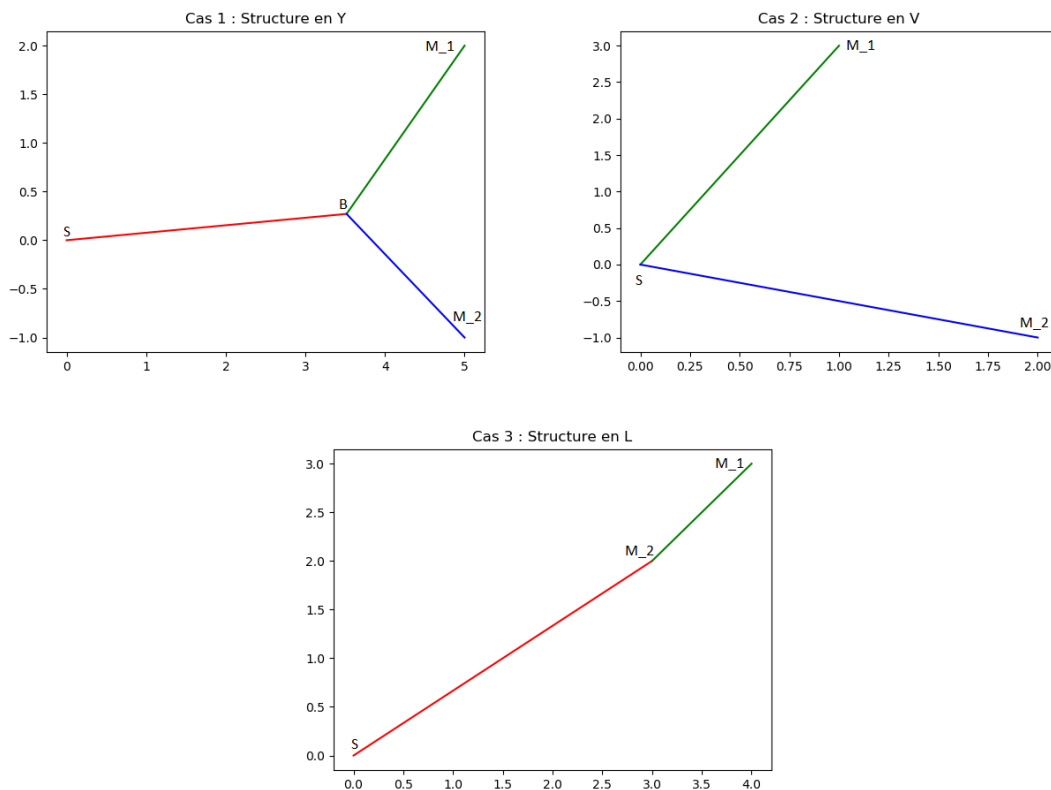
- Structure en "V" : La masse M est directement séparée en deux : les masses m_1 et m_2 partent respectivement vers M_1 et M_2 au départ de S . On peut donc considérer que S est le point de bifurcation du réseau.

- Structure en "L" : Toute la masse M est transportée du point S vers un certain M_k pour $k \in \{1, 2\}$. Ensuite, la masse $m_{k'}$ passe de M_k vers $M_{k'}$ avec $\{k, k'\} = \{1, 2\}$. Ainsi, on peut considérer que M_k est le point de bifurcation du réseau.

On en déduit donc que, dans tous les cas, trouver le réseau optimal associé à une source et deux puits revient à trouver les coordonnées $(x_B, y_B) \in \mathbb{R}^2$ du point de bifurcation B . Ce couple de réels réalise le minimum de la fonctionnelle suivante représentant le coût (notons que ce minimum est bien défini et qu'il est unique si le graphe est non dégénéré, i.e. les 3 points S , M_1 et M_2 sont distincts deux à deux) :

$$E^\alpha : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R} \\ P(x, y) \mapsto M^\alpha \|\overrightarrow{SB}\| + m_1^\alpha \|\overrightarrow{BM_1}\| + M^\alpha \|\overrightarrow{BM_2}\|$$

Ainsi, grâce à la commande `scipy.optimize.minimize` de Python, permettant de minimiser E^α en partant d'un point initial que l'on a choisi égal au barycentre de (S, M) , (M_1, m_1) et (M_2, m_2) , on obtient les figures suivantes.



On donne les différentes valeurs numériques pour les 3 cas (ce sont celles que l'on garde pour vérifier que les méthodes proposées dans la suite marchent effectivement) :

- Cas 1 : $S = (0, 0)$, $M_1 = (5, 2)$, $M_2 = (5, -1)$, $m_1 = 1$, $m_2 = 1$

- Cas 2 : $S = (0, 0)$, $M_1 = (1, 3)$, $M_3 = (2, -1)$, $m_1 = 1$, $m_2 = 1$
- Cas 3 : $S = (0, 0)$, $M_1 = (4, 3)$, $M_3 = (3, 2)$, $m_1 = 1$, $m_2 = 1$

3.2 Résolution du problème présenté

3.2.1 Méthode de descente du gradient

Étant donné que le problème se ramène à la minimisation d'une fonctionnelle sur \mathbb{R}^2 , on peut utiliser les méthodes d'optimisation de fonctions à plusieurs variables. Nous avons choisi d'en présenter une ici : la méthode de descente du gradient. Une description de ces méthodes ont été lues dans [3].

Proposition 3.1 (convergence de l'algorithme). *Soit $n \geq 1$ un entier et $f \in C^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ une fonction minorée. On suppose que ∇f est L -lipschitzienne avec $L \in \mathbb{R}_+$. On se fixe $\alpha \in]0, \frac{2}{L}[$. On définit la suite suivante par récurrence : $\begin{cases} x_0 \in \mathbb{R}^n \\ \forall k \in \mathbb{N}, x_{k+1} = x_k - \alpha \nabla f(x_k) \end{cases}$ Alors, la suite $(f(x_k))$ est décroissante et converge vers une limite finie. De plus, $(\nabla f(x_k))$ converge vers 0 dans \mathbb{R}^n .*

Démonstration. La démonstration de cette propriété repose sur l'inégalité suivante :

$$\forall x, y \in \mathbb{R}^n, f(y) \leq f(x) + \langle \nabla f(x), y - x \rangle + \frac{L}{2} \|y - x\|^2 \quad (3.4)$$

En effet, on fixe $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. On pose $h := y - x$. On a par la formule de Taylor à l'ordre 1 en x :

$$f(x + h) = f(x) + \int_0^1 \langle \nabla f(x + th), h \rangle dt$$

Donc,

$$\begin{aligned} f(x + h) - f(x) - \langle \nabla f(x), h \rangle &= \int_0^1 \langle \nabla f(x + th), h \rangle dt - \int_0^1 \langle \nabla f(x), h \rangle dt \\ &= \int_0^1 \langle \nabla f(x + th) - \nabla f(x), h \rangle dt \\ &\leq \int_0^1 Lt \|h\| \|h\| dt = \frac{L}{2} \|h\|^2 \\ &\quad (\text{Cauchy-Schwarz et lipschitzianité de } \nabla f) \end{aligned}$$

Cela termine la preuve de l'équation 3.4. On l'applique pour la suite (x_k) . On a :

$$\forall k \in \mathbb{N}, f(x_{k+1}) - f(x_k) \leq -\alpha \|\nabla f(x_k)\|^2 + \frac{L}{2} \alpha^2 \|\nabla f(x_k)\|^2 = -\alpha \|\nabla f(x_k)\|^2 (1 - \frac{1}{2} L \alpha)$$

Comme $\alpha \in]0, \frac{2}{L}[$, on a que la suite $f(x_k)$ est décroissante et minorée. Donc, elle a bien une limite finie $l \in \mathbb{R}$. Enfin, comme $0 \leq \|\nabla f(x_k)\|^2 \leq \frac{f(x_k) - f(x_{k+1})}{\alpha(1 - \frac{1}{2}L\alpha)}$, en passant à la limite quand $k \rightarrow +\infty$, $\nabla f(x_k) \rightarrow 0$. \square

La convergence de l'algorithme est vérifiée si la fonction à optimiser est suffisamment régulière (classe C^1 pour la fonction et lipschitzianité du gradient). Étudions donc la fonction que l'on considère : E^α est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{S, M_1, M_2\}$ mais elle ne peut pas se prolonger en une fonction de classe C^1 car ∇f n'a pas de limite quand $P(x, y)$ tend vers l'un de ces 3 points. Il y a donc deux cas à distinguer :

- La structure est en "Y" : le minimum de E^α est un point $B \notin \{S, M_1, M_2\}$. On se restreint alors la fonction à un ouvert Ω contenant B et inclus dans le compact

$$K_\varepsilon = \text{conv}(S, M_1, M_2) \setminus \bigcup_{X \in \{S, M_1, M_2\}} B(X, \varepsilon)$$

avec $\varepsilon > 0$ vérifiant que $\forall X \in \{S, M_1, M_2\}, \|\overrightarrow{XB}\| > \varepsilon$ (pour garantir que $B \in K_\varepsilon$). Notons qu'un tel ε existe toujours car la structure est en "Y". De plus, comme $f \in C^2(K_\varepsilon, \mathbb{R})$ et que K_ε est compact, on a que $f \in C^1(\Omega, \mathbb{R})$ et ∇f est lipschitzien sur Ω . Or, il existe une généralisation de la propriété pour des ouverts inclus dans \mathbb{R}^2 . Ainsi, pour α suffisamment petit, on a bien convergence effective de l'algorithme.

- La structure est en "V" ou en "L" : le minimum est un point $B \in \{S, M_1, M_2\}$. Il s'agit des points en lesquels la fonctionnelle du coût est non lisse. La proposition ne garantit pas la convergence de l'algorithme (ce qui ne signifie pas pour autant que, numériquement, le programme ne termine pas).

En pratique, lorsqu'on essaie avec $\alpha = 1$ et les coordonnées des points S, M_1 et M_2 associés au cas 2 et 3, on voit que l'algorithme se rapproche du minimum mais il n'arrive pas à converger vers lui et ne cesse d'osciller autour. Afin de remédier à ce problème, on a rajouté un nombre maximal d'itérations N pour la méthode de descente du gradient. S'il est dépassé, on note X le dernier point trouvé (censé être proche du minimum) et on compare à la main les coûts pour $B \in \{S, M_1, M_2, X\}$ et on prend celui qui est optimal. Cette technique fonctionne bien en pratique si on prend $N = 100$ (la méthode du gradient se termine vite s'il y a convergence) et on retrouve le graphe optimal donné par la fonction `scipy.optimize.minimize` de Python.

Remarque 3.1. L'algorithme du gradient se généralise aisément pour des réseaux avec une source et N puits. En effet, pour chaque topologie possible, on cherche la configuration optimale (revient à un problème de minimisation sur \mathbb{R}^{N-1}). Ensuite, on compare ces configurations entre elles et on choisit la meilleur.

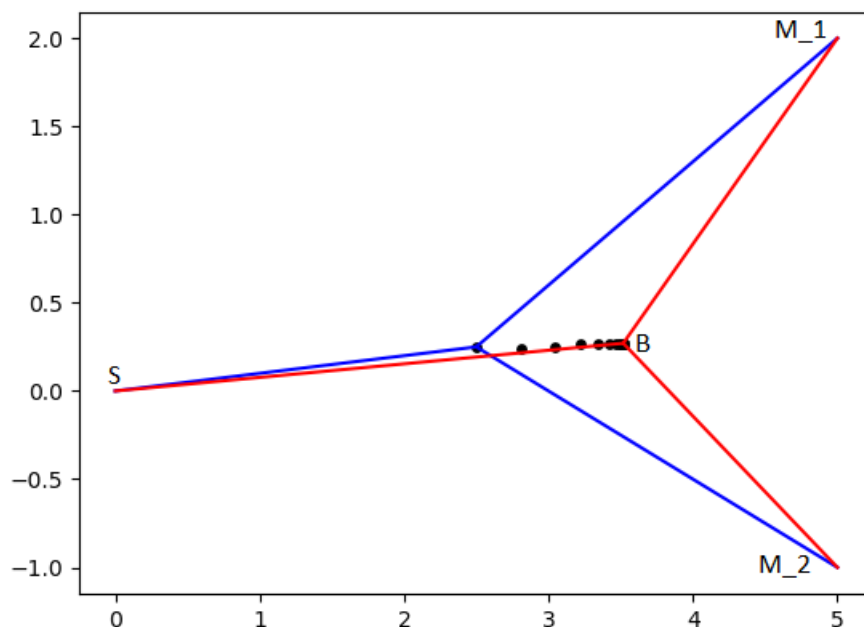
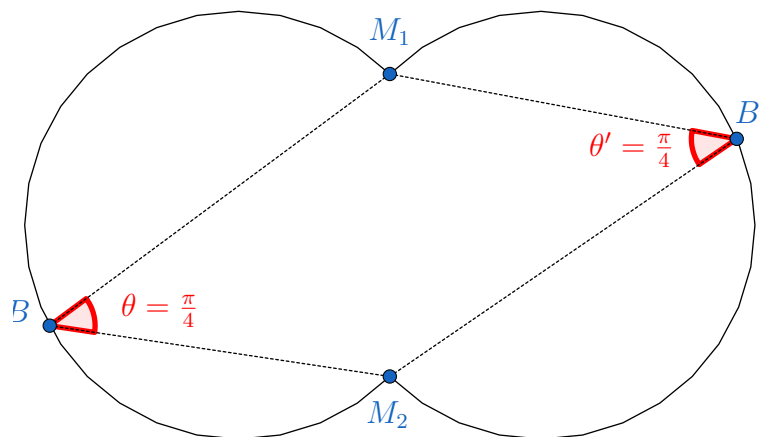


FIGURE 3.1 – Convergence de l’algorithme du gradient (données numériques du cas 1, voir plus haut). Le bleu correspond au point départ et le rouge à l’arrivée.

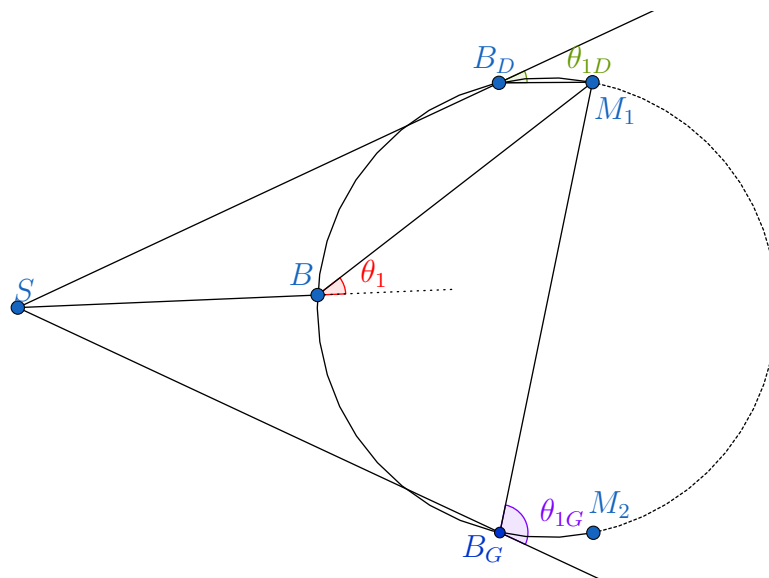
3.2.2 Utiliser les formules des angles

Dans le cadre du problème avec une source et deux puits, on a les formules exactes donnant les angles θ_1 et θ_2 de la figure du graphe optimal. Ainsi, il est possible de déterminer les coordonnées du point de bifurcation $B(x, y)$. Mais, exprimer (x, y) en fonction des angles est difficile. Il faut déterminer B autrement.

On pose $\theta := \theta_1 + \theta_2$ l’angle de la bifurcation. Comme $\theta = |(\overrightarrow{BM_1}, \overrightarrow{BM_2})|$, on a que B appartient à l’union de deux arcs de cercle comme le montre le dessin suivant, traitant le cas particulier où $\theta = \frac{\pi}{4}$.



En fonction de la position du point source S , on choisit le "bon" arc de cercle associé. Ensuite, il faut trouver le point B sur l'arc de cercle tel que l'angle $|\langle \overrightarrow{SB}, \overrightarrow{BM_1} \rangle|$ valant θ_1 . Numériquement, on paramétrise les points de l'arc de cercle par un angle $\beta = |\langle \overrightarrow{CM_1}, \overrightarrow{CB} \rangle|$ où C est le centre de l'arc de cercle choisi. On pose $\beta_1 := |\langle \overrightarrow{CM_1}, \overrightarrow{CM_2} \rangle|$. On souhaite annuler la fonction $\beta \in]0, \beta_1[\mapsto |\cos(\langle \overrightarrow{SB}, \overrightarrow{BM_1} \rangle)| - \cos(\theta_1)$ dont on connaît les limites aux bords de l'intervalle. On utilise donc une technique de dichotomie (voir le code en annexe).



On entoure le point B de deux points B_D et B_G qui se rapprochent de plus en plus vers lui. Ensuite, une fois que l'on a trouvé un certain point B_0 , on compare le coût associé avec les coûts $B \in \{S, M_1, M_2\}$.

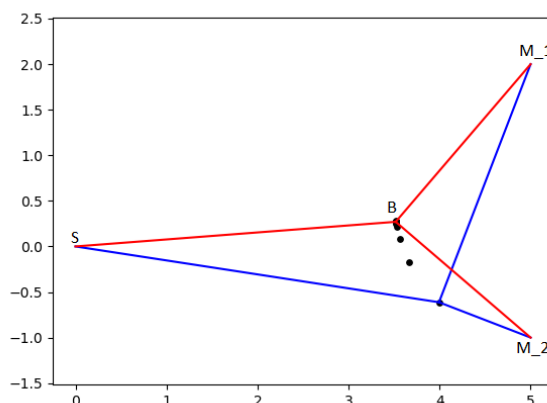


FIGURE 3.2 – Convergence de l’algorithme utilisant la dichotomie (données numériques du cas 1, voir plus haut). Le bleu correspond au point départ et le rouge à l’arrivée.

3.2.3 Méthode du point pivot

Cette technique reprend le début de la précédente. Si le réseau optimal associé à S , M_1 et M_2 admet une structure en "Y", on note B le point de bifurcation du graphe et on utilise le fait qu’il soit présent sur un cercle passant M_1 et M_2 et de centre C . Pour le trouver précisément, on construit P le point pivot du système en effectuant une rotation (dans le bon sens) d’angle $2\theta_1$ de centre C et partant de M_1 . B est alors le point d’intersection entre la droite (SP) et le bon arc de cercle de centre C et d’extrémités M_1 et M_2 . Il s’agit de la méthode décrite avec plus de détail dans le chapitre 2.

Remarque 3.2. Dans le cas général (les trois structures), on peut construire le point B_0 comme décrit précédemment. Néanmoins, il ne donne le réseau optimal que si la structure est non dégénérée (en "Y"). En pratique, on compare donc toujours les coûts associés aux points de bifurcation $B \in \{S, M_1, M_2, B_0\}$ pour couvrir tous les cas possibles.

3.3 Problème à une source et trois puits

On prend S un point source et M_1 , M_2 et M_3 3 puits de masses respectives m_1 , m_2 et m_3 . Il y a 3 topologies possibles pour le graphe solution. Il faut donc les traiter successivement et comparer les coûts de chacune d’entre elles.

À topologie fixée, on peut avoir recours à plusieurs méthodes pour obtenir le réseau optimal.

- La méthode du gradient : elle a été présentée à la section précédente et elle se généralise sans difficultés dans ce cas. L’ensemble de départ sur lequel on minimise le

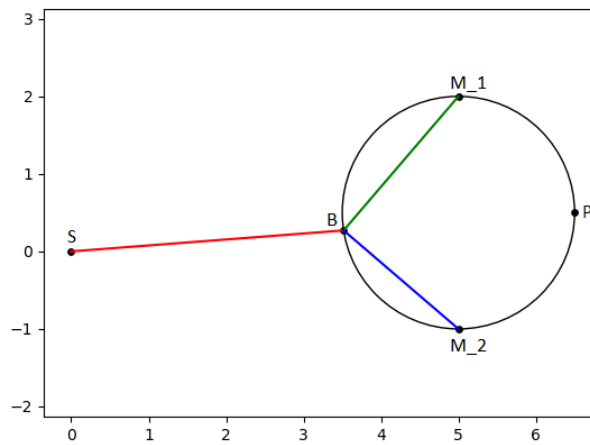


FIGURE 3.3 – Méthode du point pivot (données numériques du cas 1, voir plus haut)

coût devient \mathbb{R}^4 car on rajoute 2 points de branchement.

- La méthode du point pivot : elle a été présentée au chapitre précédent. Les 3 topologies possibles du graphe optimal correspondent à l'ordre dans le choix de construction des points pivots. C'est la méthode qui a été choisie pour obtenir la figure suivante sur Python. Pour les valeurs numériques, on a : $S = (0, 0)$, $M_1 = (4, 1)$, $M_2 = (4, 0)$ et $M_3 = (4, -2)$ (les masses sont égales et valent 1).

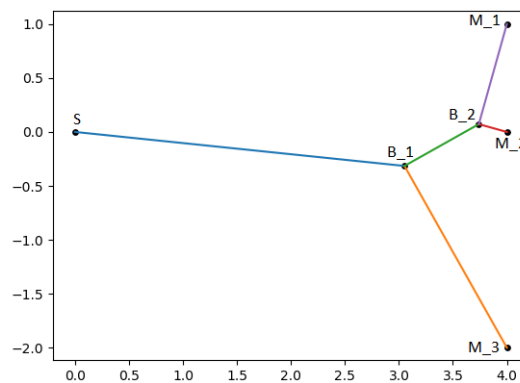


FIGURE 3.4 – Convergence de l'algorithme du pivot pour le problème à une source et 3 puits

Chapitre 4

Perturbation d'un réseau optimal par ajout d'un puits

4.1 Position du problème

Dans cette section, on s'intéresse au problème suivant : on dispose d'un réseau optimal et on souhaite lui "rajouter" un puits de masse ε . Ainsi, on perturbe notre réseau qui n'est plus forcément optimal. Il est intéressant de regarder quels points sont "facilement" rejoints par le réseau et lesquels en sont éloignés. Cela pourrait en effet déterminer un paramètre "exploratoire" du réseau. Il s'agit ainsi d'ajouter une arête au réseau de manière à minimiser le surcoût dû à la masse transportée en plus dans le réseau.

Ainsi, on ajoute un puits M de masse ε au réseau $G = (V, E)$ optimal, et on suppose maintenant S de masse $m + \varepsilon$. On pose pour tout P dans G , $G_P = (V \cup P, M, E \cup [PM], [Q_1P], [PQ_2])$ avec $P \in [Q_1Q_2]$, qui est un nouveau graphe possible. On recherche alors P^* tel que l'énergie de Gilbert soit minimisée sur les P possibles, soit

$$E^\alpha(P^*) = \min_{P \in G} E^\alpha(G_P)$$

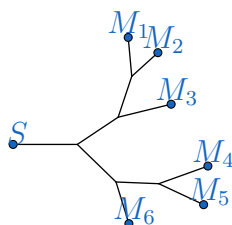


FIGURE 4.1 – Un réseau possible d'étude

4.1.1 Existence et Unicité

Pour l'existence, on sait que E^α est continue sur $\bigcup_{e \in E} e$ qui est compact comme union finie de segments. Il existe donc au moins un minimiseur de E^α sur $\bigcup_{e \in E} e$.

Il n'y a pas unicité de la solution car il est facile de construire un exemple où il existe deux minimiseurs globaux symétriques selon un axe.

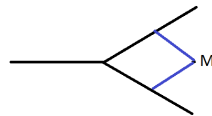


FIGURE 4.2 – Non-unicité du minimiseur

4.2 Majoration du nombre de minimiseurs

On souhaite montrer ici qu'il y a au plus un minimiseur local par arête de G .

Définition 4.1. Soient $G = (V, E)$ et $e^* \in E$, on définit alors les quantités suivantes :

- E_- comme l'ensemble des arêtes en amont de e^*
- E_+ les autres arêtes

Théorème 4.1. *Il y a au plus un minimiseur local par arête de G*

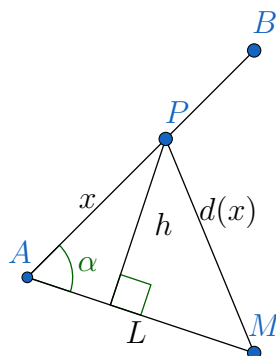


FIGURE 4.3 – Notations utilisées dans la preuve ci-dessous

Démonstration. Pour une arête e^* , on a $E = E_- \cup E_+ \cup e^*$ avec E_- l'ensemble des arêtes en amont de e^* , qui vont donc transporter une masse ε de plus. On écrit alors l'énergie de Gilbert associé au réseau perturbé de la masse ε ,

$$E^\alpha(x) = \sum_{e \in E_-} (m_e + \varepsilon)^\alpha |e| + \sum_{e \in E_+} m_e |e| + (m_e + \varepsilon)^\alpha x + (|e^*| - x) m_{e^*}^\alpha + \varepsilon^\alpha d(x)$$

avec $d^2(x) = x^2 - 2L \cos \alpha x + L^2$, où d est la longueur de l'arête ajoutée. On remarque que d^2 un polynôme de degré 2. Ainsi on a

$$E'^\alpha(x) = (m_{v^*} + \varepsilon)^\alpha - (m_{v^*})^\alpha + \varepsilon^\alpha d'(x)$$

Et,

$$d'(x) = \frac{x - cte}{d(x)}$$

E'^α ne peut donc s'annuler qu'au plus deux fois. Or, pour avoir 2 minimas, il faut s'annuler au moins 3 fois (par le théorème de Rolle). En prenant en compte le fait que $x \in [0, \|\vec{AB}\|]$, et que donc on peut avoir un minimum sans avoir annulation de la dérivée, on obtient que E^α n'est minimale qu'au plus 3 fois par arête.

Toutefois, $\lim_{|x| \rightarrow \infty} E^\alpha = +\infty$. Ainsi, E^α n' a pas de maximum local sur \mathbb{R} et n'est minimale qu'au plus une fois par arête. \square

On en déduit directement le corollaire suivant.

Corollaire 4.1. *Soit G un réseau optimal entre S et N puits, on considère le problème de l'ajout d'un puits au réseau existant.*

Alors il y a moins de minimiseurs hors sommets du coût que d'arêtes, soit moins de $2(N-1)$ minimiseurs locaux de notre problème.

Dorénavant, on minimisera $J(P) = E^\alpha(G_P) - E^\alpha(G)$, le surcoût associé au branchement. Ceci est équivalent à la minimisation de $E(G_P)$. On dispose d'une seconde preuve de ce théorème, qui nous apporte plus de précision sur la géométrie du réseau.

4.3 Caractérisation angulaire du branchement d'un nouveau puits

Géométriquement, il y a 2 cas distincts à considérer, avec différentes caractéristiques à observer.

- Le cas où le nouveau puits se raccorde au réseau en un point intérieur à une arête
- Le cas où le nouveau puits se raccorde au réseau en une extrémité d'arête.

4.3.1 Raccord sur un sommet intérieur à une arête

On suppose qu'un minimum local est atteint sur l'arête v^* , en un point T qui n'est pas une extrémité de l'arête. Notons P le point de branchement de la nouvelle arête, \vec{u} le vecteur

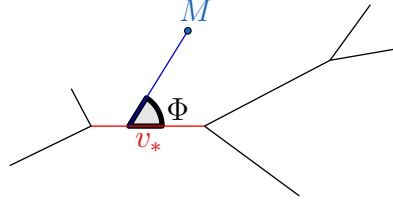


FIGURE 4.4 – Branchement de M à un réseau optimal

unitaire selon \vec{AB} , ainsi que Φ l'angle (\vec{PB}, \vec{PM}) , et m la masse arrivant en B .

Tout d'abord, on sait que $P \in]AB[$ avec A, B les extrémités de l'arête. De plus, si P est minimale pour notre problème, P minimise aussi la fonction suivante, qui est l'expression locale de J eu point P , i.e. une expression propre à l'arête considérée :

$$J(P) = (m + \varepsilon)^\alpha \|\vec{AP}\| + m^\alpha \|\vec{PB}\| + \varepsilon^\alpha \|\vec{PM}\|$$

pour $P \in]AB[$. Ainsi $dJ(P) \cdot \vec{u} = 0$, c'est à dire

$$\cos \Phi = \frac{(m + \varepsilon)^\alpha - m^\alpha}{\varepsilon^\alpha}$$

Remarquons que si $m \rightarrow \infty$, alors le point P tend (lorsque c'est possible) vers P^* le projeté orthogonal de M sur (AB) . La condition pour avoir cette convergence est simplement que $P^* \in [AB]$. Le même phénomène se produit quand on fait tendre $\varepsilon \rightarrow 0$.

Remarque 4.1. Le fait que l'angle Φ soit fixé implique que sur un segment il ne peut y avoir qu'un seul minimum local. Sur une arête fixée, la restriction de J et la restriction d'une fonction C^∞ positive, infinie à l'infini, et n'ayant qu'un seul minimum local.

4.3.2 Les extrémités

Le cas précédent nous fournit l'angle de branchement dès lors que le point de branchement P n'est pas un sommet. Cependant, si le minimum sur $[AB]$ est atteint en A , on n'a plus l'annulation du gradient de notre fonction, gradient qui n'est d'ailleurs pas défini en A ou B .

Soit Φ l'angle (\vec{AB}, \vec{AM}) . On sait qu'il existe $\rho > 0$ tel que pour tout point $P \in]A, A + \rho \vec{u}[$, on ait $dJ(P) \cdot \vec{u} > 0$. Or $dJ(P) \cdot \vec{u} = (m + \varepsilon)^\alpha - m^\alpha - \varepsilon^\alpha \cos \Phi$. Ainsi, le minimum sur $[A, B]$ est atteint en A si et seulement si

$$\cos \Phi \leq \frac{(m + \varepsilon)^\alpha - m^\alpha}{\varepsilon^\alpha} \quad (4.1)$$

Bien entendu, cela ne veut pas dire que A est minimal pour le branchement de M sur le graphe (même localement). Pour cela, il faudrait que cette condition soit remplie sur les trois arêtes qui se rejoignent en A .

En introduisant l'angle $\psi = (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BM})$, on obtient de façon analogue que le minimum sur $[A, B]$ est atteint en B si et seulement si

$$\cos \psi \geq \frac{(m + \varepsilon)^\alpha - m^\alpha}{\varepsilon^\alpha} \quad (4.2)$$

On remarque que quelque soit M , quand $\varepsilon \rightarrow \infty$, le minimum tend vers A .

4.3.3 Questions

- Peut-on montrer qu'une bifurcation n'est jamais un minimiseur ?
- Sous cette hypothèse, peut-on montrer qu'à M fixé, le nombre de minimiseurs est indépendant de ε ? Constant sur un voisinage de 0 ?
- Peut-on montrer qu'il y a au plus deux minimiseurs locaux ?
- Pour $\alpha = 0$, le problème consiste à trouver le point du graphe minimisant la distance au point M . Il semble que pour ε proche de 0, on converge vers cette solution.
- Si on prend une série de points associés à des masses (m_n) telle que $\sum_{n \geq 0} m_n = m$ espacés régulièrement, sous quelles conditions va t-on se retrouver à "relier les points" à partir d'un certain rang ?

4.4 Caractérisation des minimas pris en des point de bifurcations

Dans cette section, on se demande s'il est possible de brancher la nouvelle arête en un point qui est déjà une bifurcation du réseau préexistant. En effet, le fait que le nouveau réseau n'est plus optimal nous empêche d'affirmer qu'il ne soit constitué seulement de bifurcations. Nous verrons ici sous quelles conditions un tel branchement peut avoir lieu.

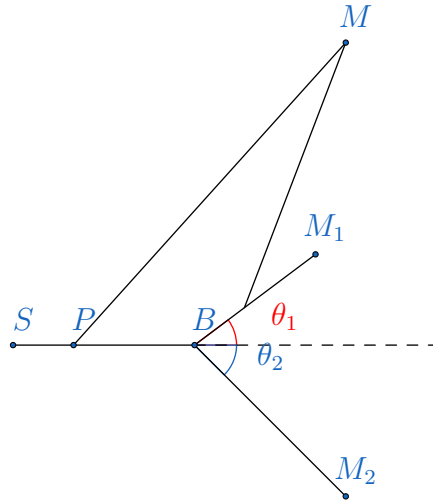


FIGURE 4.5 – schéma des 2 branchements minimums locaux du coût

4.4.1 Conditions de minimum local en une bifurcation

Soit $G = (V, E)$ un réseau constitué seulement de bifurcations, i.e. de la forme de ceux vus précédemment. On pose les angles suivant $\Phi = (\overrightarrow{SB}, \overrightarrow{BM})$, $\theta_1 = (\overrightarrow{SB}, \overrightarrow{BM_1})$, $\theta_2 = (\overrightarrow{BM_2}, \overrightarrow{SB})$. D'après la formule montrée en 4.3.2, la condition suivante exprime le fait que B est minimal sur le segment $[SB]$

$$\nabla J_S(B) \cdot \overrightarrow{SB} \leq 0, \text{ où } J_S(P) = (m + \varepsilon)^\alpha \|\overrightarrow{SP}\| + \varepsilon^\alpha \|\overrightarrow{PM}\| + m^\alpha \|\overrightarrow{PB}\|$$

Cette première condition se traduit géométriquement par

$$\cos \Phi \geq \frac{(m + \varepsilon)^\alpha - m^\alpha}{\varepsilon^\alpha} \quad (1)$$

De même, B est un minimum sur chacun des segments dont il est une extrémité. Ainsi, on a aussi les conditions suivantes pour que B soit un minimum local sur le réseau

$$\begin{cases} \nabla J_1(M_1) \cdot \overrightarrow{BM_1} \geq 0, \text{ où } J_1(P) = (m_1 + \varepsilon)^\alpha \|\overrightarrow{BP}\| + \varepsilon^\alpha \|\overrightarrow{PM}\| + m_1^\alpha \|\overrightarrow{PM_1}\| \\ \nabla J_{M_2}(B) \cdot \overrightarrow{BM_2} \geq 0, \text{ où } J_2(P) = (m_2 + \varepsilon)^\alpha \|\overrightarrow{BP}\| + \varepsilon^\alpha \|\overrightarrow{PM}\| + m_2^\alpha \|\overrightarrow{PM_2}\| \end{cases} \quad (4.3)$$

Ces autres conditions se traduisent de la façon suivante

$$\begin{cases} \cos(\Phi - \theta_1) \leq \frac{(m_1 + \varepsilon)^\alpha - m_1^\alpha}{\varepsilon^\alpha} \\ \cos(\Phi + \theta_2) \leq \frac{(m_2 + \varepsilon)^\alpha - m_2^\alpha}{\varepsilon^\alpha} \end{cases} \quad (4.4)$$

4.4.2 Cas limites

1. Lorsque $\varepsilon \rightarrow \infty$, la seule condition est que \overrightarrow{SB} et \overrightarrow{BM} soient positivement colinéaires. Les autres conditions ne sont pas contraignantes.
2. Pour $\varepsilon \rightarrow 0$, on a $\cos \Phi \geq 0$, $\cos(\Phi - \theta_1) \leq 0$ et $\cos(\Phi + \theta_2) \leq 0$. Ainsi M doit se trouver dans l'intersection de trois demi-plans passant par T .

4.5 Minima en amont l'un de l'autre

Dans cette section, on supposera que $\alpha \in [0, \frac{1}{2}[$, de manière à être sûr de n'avoir que des bifurcations et aucun croisement de 4 arêtes ou plus. On va montrer que, pour ε proche de 0, on a une majoration plus fine du nombre de minima du coût de branchement J au point M

Définition 4.2. Dans un réseau G , on considère 2 points A et B . On dit que A est en amont de B (ou B est en aval de A) si toute la masse transitant au point B est passée par le point A .

Proposition 4.1. *La relation "être en amont de" est une relation d'ordre partielle sur les points du réseau.*

Supposons qu'on ait un minimum en amont d'un second comme sur la figure ci-contre.

4.5.1 Deux résultats d'unicité

Proposition 4.2. *Pour un point M_1 dans le demi-plan inférieur, délimité par (ST) et ne contenant pas A , le minimum de J sur $[ST] \cup [TA]$ est unique.*

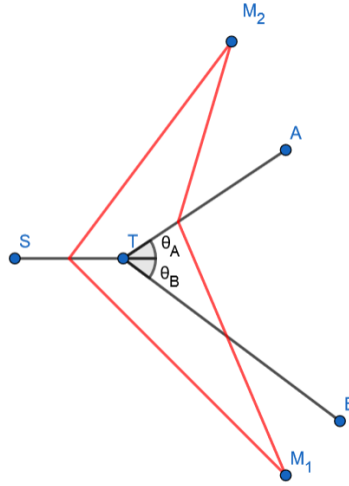


FIGURE 4.6 – Schéma d'étude du problème

Démonstration. Soit M_1 un tel point. On suppose qu'on ne le branche que sur les arêtes $[ST]$ ou $[TA]$. Sur ces arêtes, le problème revient à minimiser la fonction suivante

$$\begin{cases} J(P) = (m + \varepsilon)^\alpha \|\overrightarrow{SP}\| + m^\alpha \|\overrightarrow{PT}\| + \varepsilon^\alpha \|\overrightarrow{PM_1}\| + m_A^\alpha \|\overrightarrow{TA}\| & \text{si } P \in [ST] \\ J(P) = (m + \varepsilon)^\alpha \|\overrightarrow{ST}\| + (m_A + \varepsilon)^\alpha \|\overrightarrow{TP}\| + \varepsilon^\alpha \|\overrightarrow{PM_1}\| + m_A^\alpha \|\overrightarrow{PA}\| & \text{si } P \in [TA] \end{cases} \quad (4.5)$$

Si on indexe le point P par $t \in [0, 2]$ tel que $P(0) = S$, $P(1) = T$ et $P(2) = A$, on obtient que J est une fonction C^1 par morceaux avec un seul point où elle est éventuellement non dérivable : T .

En outre, on a $J'(1^-) = (m + \varepsilon)^\alpha - m^\alpha - \varepsilon^\alpha \cos \Phi$ avec $\Phi = (\overrightarrow{ST}, \overrightarrow{TM_1})$, et $J'(1^+) = (m_A + \varepsilon)^\alpha - m_A^\alpha - \varepsilon^\alpha \cos \psi$ avec $\psi = (\overrightarrow{TA}, \overrightarrow{TM_1})$. Il en résulte que $\psi = \Phi + \theta_A$. Ainsi on a (cf 4.1) les résultats suivants

- Si le minimum sur $[ST]$ est atteint en T , alors le minimum sur $[TA]$ est forcément l'unique minimum global sur $[ST] \cup [TA]$.
- Si le minimum sur $[ST]$ est atteint en $P \in [ST[$, alors on a $J'(1^-) > 0$, ie $\frac{(m+\varepsilon)^\alpha - m^\alpha}{\varepsilon^\alpha} > \cos \Phi$.

Il y a alors encore deux cas à distinguer :

- Soit $\Phi \in [0, \frac{\pi}{2}]$ et dans ce cas comme $\theta_A \in [0, \frac{\pi}{2}]$ alors $\cos \psi < \cos \Phi$. Or $\frac{(m_A + \varepsilon)^\alpha - m_A^\alpha}{\varepsilon^\alpha} > \frac{(m + \varepsilon)^\alpha - m^\alpha}{\varepsilon^\alpha}$ car $m_A < m$. Alors, $J'(1^+) \geq J'(1^-) > 0$.
- Soit $\phi \in [\frac{\pi}{2}, \pi]$ et alors on a $\cos \psi < 0$ et donc $J'(1^+) > 0$. Le minimum sur $[TA]$ est donc atteint en T . Ainsi P est l'unique minimum sur l'union des deux arêtes.

Proposition 4.4. *Soit M un point du plan. On considère le problème de branchement, i.e. de minimisation de J . Alors il existe un $\varepsilon_0 > 0$ tel que pour tout $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$, le minimum de J sur $[ST] \cup [TA]$ est unique.*

Démonstration. On pose $\Phi = (\overrightarrow{ST}, \overrightarrow{TM})$, $\theta_A = (\overrightarrow{ST}, \overrightarrow{TA})$, $l = \|\overrightarrow{TM}\|$, $l_A = \|\overrightarrow{TA}\|$, $l_0 = \|\overrightarrow{ST}\|$.

La condition de la proposition 4.2 n'est pas validée pour ε proche de 0. Soit alors M un point vérifiant la propriété suivante

$$\exists \varepsilon_0 > 0 : \forall 0 < \varepsilon < \varepsilon_0, \exists P_1 \in]ST[, P_2 \in]TA[: J'(P_1) = J'(P_2) = 0$$

M appartient ainsi à un losange inclus dans le domaine défini par la condition angulaire : $\phi \in [\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} + \theta_A]$. Dès lors, on peut écrire les valeurs en P_1 et en P_2

$$J(P_1) = m^\alpha l_0 + m_A^\alpha l_A + l \varepsilon^\alpha \sin \Phi + \mathcal{O}(\varepsilon)$$

$$J(P_2) = m^\alpha l_0 + m_A^\alpha l_A + l \varepsilon^\alpha \sin(\Phi - \theta_A) + \mathcal{O}(\varepsilon)$$

Comme on se place dans le losange défini précédemment, on a $\Phi \in]\theta_A, \frac{\pi}{2}]$ et $\theta_A \in]0, \frac{\pi}{2}]$. Selon la valeur de l'angle limite $\Phi_{lim} = \frac{\pi + \theta_A}{2} \in [\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} + \theta_A]$ par rapport à celle de Φ , on distingue alors trois cas.

- Si $\sin(\Phi - \theta_A) < \sin \Phi$ i.e. $\Phi < \Phi_{lim}$, on a, au voisinage de 0^+ , $J(P_2) < J(P_1)$. Il existe alors un $\varepsilon_1 > 0$ tel que pour tout $0 < \varepsilon < \varepsilon_1$ J admet un unique minimum global sur $[ST] \cup [TA]$, atteint en P_2 .
- Si $\sin(\Phi - \theta_A) > \sin \Phi$ i.e. $\Phi > \Phi_{lim}$, on a, au voisinage de 0^+ , $J(P_2) > J(P_1)$. Il existe alors un $\varepsilon_2 > 0$ tel que pour tout $0 < \varepsilon < \varepsilon_2$ J admet un unique minimum global sur $[ST] \cup [TA]$, atteint en P_1 .
- Si $\sin(\Phi - \theta_A) = \sin \Phi$ i.e. $\Phi = \Phi_{lim}$, on ne peut pas comparer $J(P_1)$ et $J(P_2)$ au voisinage de 0^+ pour l'instant. Il faut faire un développement asymptotique. Comme $\alpha < \frac{1}{2}$, à l'ordre $2 - \alpha$, on a :

$$J(P_1) = m^\alpha l_0 + m_A^\alpha l_A + l \varepsilon^\alpha \sin \Phi + \alpha m^{\alpha-1} \|\overrightarrow{SQ_1}\| \varepsilon - \frac{\alpha^2}{2} l m^{2\alpha-2} \sin \Phi \varepsilon^{2-\alpha} + \mathcal{O}(\varepsilon^2)$$

De même pour $J(P_2)$, on a :

$$J(P_2) = m^\alpha l_0 + m_A^\alpha l_A + l \varepsilon^\alpha \sin \Phi + \alpha (m^{\alpha-1} l_0 + m_A^{\alpha-1} \|\overrightarrow{TQ_2}\|) \varepsilon - \frac{\alpha^2}{2} l m_A^{2\alpha-2} \sin \Phi \varepsilon^{2-\alpha} + \mathcal{O}(\varepsilon^2)$$

Or comme $T \neq M$, on a que au voisinage de 0^+ , $J(P_1) < J(P_2)$.

Il existe alors un $\varepsilon_3 > 0$ tel que pour tout $0 < \varepsilon < \varepsilon_3$ J admet un unique minimum global sur $[ST] \cup [TA]$, atteint en P_2 .

L'étude de ces trois cas nous permet de conclure. □

Il n'est pas possible pour un réseau constitué de bifurcations d'une source à N puits d'avoir $N + 1$ points distincts sans qu'il y en ait deux dont un soit en amont de l'autre. Ainsi, on en déduit la majoration suivante du nombre de solutions.

Corollaire 4.2. *Si (V, E) est un graphe optimal entre une source S et N puits, soit M un point extérieur au réseau, alors pour ε assez petit, le problème de branchement admet au plus N solutions.*

4.5.3 Questions :

- Pour l'instant, on n'a traité qu'une seule zone : Le losange précédemment décrit. Que se passe-t-il à la frontière du losange ?
- Que se passe-t-il pour $\alpha > \frac{1}{2}$?
- Que se passe-t-il à l'extérieur du losange ?
- Peut-on avoir, au voisinage de 0, l'existence de deux minimas globaux à notre problème ?

4.6 Propriétés topologiques de l'ensemble des points où le problème est bien posé

Soit M_0 un point du plan quelconque, associé à la masse ε . On suppose qu'il existe un unique $P^* \in G$ tel que $J(P^*) = \min_{P \in G} J(P)$. On s'intéresse à ce qu'il se passe lorsqu'on considère le même problème en un point M' proche de M . Le problème de branchement de M' admet-il, lui aussi, une unique solution ?

Pour cela, on considère la fonctionnelle H qui à (M, P) associe le coût de branchement de M au point P . M appartient au plan entier tandis que P appartient au réseau.

Proposition 4.5. *L'espace Ω_1 des points M tel que $H(M, \cdot)$ admette un unique minimum sur le réseau atteint en un point P qui n'est pas un sommet est un ouvert.*

Le point P tel que $H(M, \cdot)$ admette son unique minimum en P est une fonction continue de M sur Ω_1

Démonstration. Soit $M \in \Omega_1$. Comme J' ne s'annule au plus une fois par arête, il en découle que J n'admet qu'un nombre fini de points critiques, et on en déduit qu'il existe δ et μ strictement positifs tels que $I = [P^* - \delta \vec{u}, P^* + \delta \vec{u}] \subset G$ et pour tout $P \in G - I$,

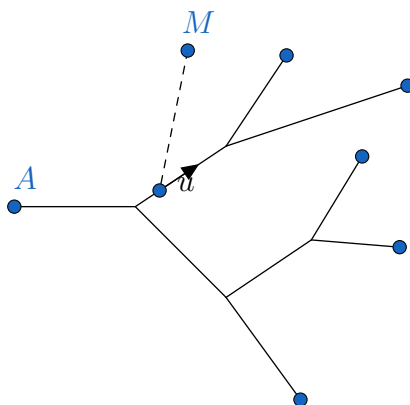


FIGURE 4.8 – Schéma lorsque $M \in \Omega_1$

on ait $J(P) > J(P^*) + \mu$.

On considère maintenant $H(M, P) = J(P)$ la fonction donnant le coût du branchement du point M à la position P . Il est clair que H est continue, et donc uniformément continue en P . Ainsi, il existe un voisinage B_0 de M_0 tel que pour tout M dans B_0 , $H(M, \cdot)$ admet son minimum dans I , qui est alors unique. L'ensemble des points M tel que $H(M, \cdot)$ admet donc un minimum unique atteint dans $G \setminus V$ est un ouvert. \square

Si maintenant on considère un point M tel que $H(M, \cdot)$ admette un unique minimum P^* sur le réseau avec P^* une des bifurcations du réseau, la forme du voisinage élémentaire de P^* dans le réseau est différente.

Il existe un voisinage B_0 de M_0 tel que pour tout M dans B_0 les minima de J sont tous dans un voisinage de P^* que l'on peut considérer de la forme ci-contre.

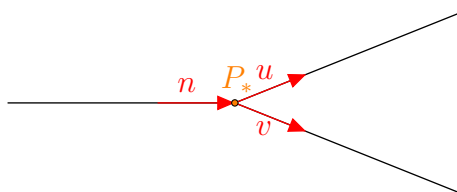


FIGURE 4.9 – Voisinage de P^* et notations associés

Dès lors, si $M \in B_0$,

$$H(M, P) = \min_{Q \in G} H(M, Q) \Rightarrow M \in [P^* - \delta \vec{n}, P^*] \cup [P^*, P^* + \delta \vec{u}] \cup [P^*, P^* + \delta \vec{v}]$$

On introduit les objets suivants

Définition 4.3. Les tangentes du coût en P^* selon \vec{n} , \vec{u} et \vec{v} sont définies de a façon suivante :

$$\begin{cases} dJ_n(M) := \lim_{a \rightarrow 0} \partial_2 H(M, P^* - a \vec{n}) \\ dJ_u(M) := \lim_{a \rightarrow 0} \partial_2 H(M, P^* + a \vec{u}) \\ dJ_v(M) := \lim_{a \rightarrow 0} \partial_2 H(M, P^* + a \vec{v}) \end{cases} \quad (4.6)$$

On a déjà introduit l'espace Ω_1 . De même, on introduit les espaces suivants :

Définition 4.4. • Ω_2 est l'espace des points M tel que $H(M, \cdot)$ admette un unique minimum sur le réseau P^* avec P^* une bifurcation du réseau et $H(M, \cdot)$ ait au moins 2 tangentes du coût non nulles.

- Ω_3 est l'espace des points M tel que $H(M, \cdot)$ admette un unique minimum sur le réseau P^* bifurcation avec au moins 2 tangentes du coût nulles.
- Ω_4 est l'espace des points M tel que $H(M, \cdot)$ admette un unique minimum sur le réseau P^* avec P^* la source ou un des puits du réseau.

On s'attachera dans cette section à démontrer le théorème suivant :

Théorème 4.2. *Soit M un point tel que $H(M, \cdot)$ ait un unique minimum P^* sur le réseau avec P^* une bifurcation du réseau. Alors :*

- *Si $M \in \Omega_2$, i.e. si au moins 2 tangentes du coût en P^* sont non nulles, alors pour M' proche de M , $H(M', \cdot)$ admet un unique minimum sur le réseau atteint en un point P' proche de P^**
- *Si $M \in \Omega_3$, i.e. si au moins 2 tangentes du coût en P^* sont nulles, il existe une suite $(M_n)_{n \geq 0}$ convergeant vers M tel que quelque soit n $H(M_n, \cdot)$ a 2 minima globaux distincts sur le réseau.*

Démonstration. Cas 1 : Si $dJ_n(M_0) \neq 0$, quitte à restreindre B_0 , dJ_n reste de signe constant non nul sur B_0 et donc il n'y a pas de minimum dans la direction $-\vec{n}$ pour M dans B_0 . On a un résultat analogue pour dJ_u et dJ_v . En outre, l'ensemble des points M_0 tel que le point T est minimum global avec ses trois tangentes non nulles est un ouvert.

Cas 2 : Dans le cas où $dJ_n(M) = dJ_u(M) = 0$, si on se déplace au voisinage de M , on aura apparition de deux minima locaux distincts de J , $P_1 \in]SP^*[$ et $P_2 \in]P^*A[$.

En premier lieu, observons la relation entre un déplacement élémentaire δM de M et celui des minima locaux $P_1 = P^* - \delta P_1 \vec{n}$ et $P_2 = P^* + \delta P_2 \vec{u}$. On posera $\vec{w} = \frac{\overrightarrow{P^*M}}{\|P^*M\|}$ et $\delta M = \lambda \vec{u} + \mu \vec{n}$. On a les relations suivantes

$$\begin{cases} \delta P_2 = \lambda + \mu \cos \theta \\ \delta P_1 = -\lambda \cos \theta - \mu \end{cases}$$

Les valeurs respectives des coûts J_1 et J_2 valent alors

$$\begin{cases} J_1 = (m + \varepsilon)^\alpha (\|\overrightarrow{SP^*}\| - \delta P_1) + m^\alpha \delta P_1 + m_A^\alpha \|\overrightarrow{P^*A}\| + \varepsilon^\alpha \|\delta P_1 \overrightarrow{n} + \overrightarrow{P^*M} + \delta M\| \\ J_2 = (m + \varepsilon)^\alpha \|\overrightarrow{SP^*}\| + (m_A + \varepsilon)^\alpha \delta P_2 + m_A^\alpha (\|P^*A\| - \delta P_2) + \varepsilon^\alpha \|\overrightarrow{P^*M} + \delta M - \delta P_2 \overrightarrow{u}\| \end{cases}$$

On a $J_1(0, 0) = J_2(0, 0)$ et on souhaite montrer qu'il existe un voisinage de $(0, 0)$ sur lequel le seul point d'annulation de $J_1 - J_2$ est $(0, 0)$. On vérifie alors, qu'en $(0, 0)$, avec $\phi = (\overrightarrow{P^*M}, \overrightarrow{n})$ et $\theta = (\overrightarrow{u}, \overrightarrow{n})$ on ait les relations

$$\begin{cases} \frac{\partial J_1}{\partial \lambda} = \frac{\partial J_2}{\partial \lambda} = \varepsilon^\alpha \cos(\phi - \theta) \\ \frac{\partial J_1}{\partial \mu} = \frac{\partial J_2}{\partial \mu} = \varepsilon^\alpha \cos \phi \end{cases}$$

On calcule ainsi les dérivées à l'ordre 2, et on remarque que $\frac{\partial^2 J_i}{\partial \lambda \partial \mu} = 0$. Dès lors, la Hessienne de $J_1 - J_2$ est définie strictement positive ou définie strictement négative en $(0, 0)$ si et seulement si

$$\frac{\partial^2(J_1 - J_2)}{\partial \lambda^2} \frac{\partial^2(J_1 - J_2)}{\partial \mu^2} > 0$$

Or le calcul donne que cette condition n'est jamais remplie. En effet, dès que $\overrightarrow{u} - \cos \theta \overrightarrow{n}$ et \overrightarrow{w} sont non colinéaires on a même la stricte négativité du produit, c'est à dire que $(0, 0)$ est un point-selle, et donc $\exists (u_n)_{n \geq 0} \in (\mathbb{R}^2)^\mathbb{N} : u_n \rightarrow (0, 0)$ et $J_1 - J_2(u_n) = 0$. Le résultat tient toujours si les 3 tangentes du coût en P^* sont nulles. \square

Proposition 4.6. *Ainsi on a montré que, si Ω désigne l'ensemble des points M tel que le problème admette une unique solution, on a :*

$$\dot{\Omega} = \Omega_1 \cup \Omega_2 \cup \dot{\Omega}_4 \tag{4.7}$$

4.6.1 Questions

- Il est raisonnable de penser qu'à ε fixé, le nombre de points qui admettent un unique minimum global mais ne sont pas dans l'intérieur de l'ensemble des points admettant un unique minimum global est une union finie de demi-droites.
- Peut-on montrer que pour ε assez petit, il n'existe pas de tels points? On aurait alors montré que l'ensemble des points admettant un unique minimum global est un ouvert pour ε proche de 0.
- Plus précisément, peut-on supposer que l'ensemble des ε tel que Ω ne soit pas ouvert est fini?

Chapitre 5

Une autre approche du problème d'ajout d'un puits

5.1 Définition d'une distance

On reprend les mêmes notations que précédemment, soit G le réseau déjà construit, de source S , de puits $(M_i, m_i)_{1 \leq i \leq N}$. Soient P_1, P_2 deux points du plan, s'il existe une arête du réseau contenant $[P_1 P_2]$, le surcoût en énergie d

Définition 5.1 (Fonction surcoût). Soient P_1, P_2 deux points du plan. Deux cas se présentent

- s'il existe une arête du réseau contenant $[P_1 P_2]$, on définit le surcoût en énergie associée à ces deux points par

$$C(P_1, P_2) = ((m + \varepsilon)^\alpha - m^\alpha) \|\overrightarrow{P_1 P_2}\|$$

avec m la masse transitant dans l'arête en question.

- Sinon, on pose

$$C(P_1, P_2) = \varepsilon^\alpha \|\overrightarrow{P_1 P_2}\|$$

On peut ainsi facilement généraliser cette définition de C sur l'ensemble des lignes brisées, i.e. une suite de points de \mathbb{R}^d . Si $(P_i)_{1 \leq i \leq N}$ sont N points du Plan, on pose

$$C((P_i)) = \sum_{i=1}^{N-1} C(P_i, P_{i+1}) \quad (5.1)$$

Cette fonction surcoût sur les lignes brisées nous permet alors d'introduire une distance sur le plan associé à ce réseau comme suit.

Définition 5.2. On définit une fonction $d : (\mathbb{R}^2)^2 \rightarrow \mathbb{R}_+$ telle que

$$\forall A, B \in \mathbb{R}^2, d(A, B) = \inf_{(P_i) \in \Xi} C((P_i)) \quad (5.2)$$

$$\Xi = \{(P_i)_{1 \leq i \leq N} \in \mathbb{R}^2 : N \geq 2, P_1 = A, P_N = B\}$$

On justifie la construction de d par le fait qu'on a observé dans le cas du 4, que, pour ε petit, il était plus facile de transporter de la masse dans le réseau que d'en transporter ailleurs. On peut proposer une interprétation cinématique de ce fait : la masse circulait plus rapidement dans le réseau qu'en dehors. Montrons que c'est une distance.

Théorème 5.1. d est une distance

Démonstration. De façon claire, d est positive et symétrique. Il suffit alors de montrer que

$$\forall (P_i)_{1 \leq i \leq N}, C((P_i)) \geq ((m + \varepsilon)^\alpha - m^\alpha) \|\overrightarrow{P_1 P_N}\|$$

pour obtenir le fait que d est définie. Par construction (la concaténation de lignes brisées étant une ligne brisée), d vérifie l'inégalité triangulaire. Ainsi d définit une distance sur \mathbb{R}^2 \square

On peut tracer numériquement les courbes isovaleurs $d(M, 0) = cte$ pour visualiser les distances considérées. On remarque que dès que le réseau est non trivial, la distance n'est pas invariante par translation et donc en aucun cas elle n'est issue d'une norme.

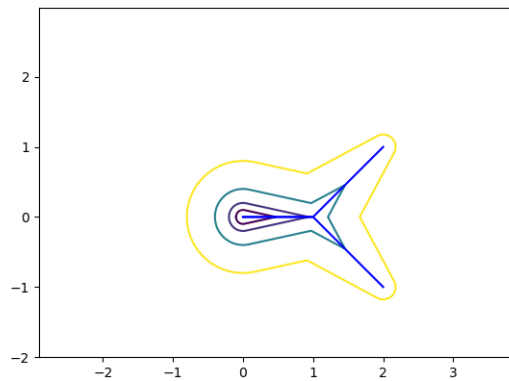


FIGURE 5.1 – graphe de $d(M, 0) = cte$

Remarque 5.1. La distance associée au réseau G est équivalente à la distance euclidienne dès que ε est strictement positif. En effet, si on note $m_0 = \max_i m_i$, on sait que pour tout points A et B

$$((m_0 + \varepsilon)^\alpha - m_0^\alpha) \|\overrightarrow{AB}\| \leq d(A, B) \leq \varepsilon^\alpha \|\overrightarrow{AB}\| \quad (5.3)$$

Si ε est nul, d est nulle. On peut par contre s'intéresser à la limite quand ε petit de $\frac{d}{\varepsilon^\alpha}$. On observe qu'alors l'espace n'est plus séparé, on a identifié le réseau à un unique point.

5.2 Identification de la distance pour ε proche de 0

Le problème consistant à trouver la ligne brisée correspondant à $d(0, M)$ ne coïncide pas forcément avec le problème de branchement. En effet, il est a priori possible que d atteigne sa valeur pour une ligne brisée impliquant l'ajout de plus d'une branche à notre réseau, et dans ce cas, elle peut ne pas être une valeur prise par J . La proposition suivante montre que c'est un sous problème.

Proposition 5.1. *Soient $J(P)$ le coût minimal de branchement de M au graphe G et d la distance associée au réseau considéré.*

Alors $d(S, M) \leq J(P)$.

Démonstration. En effet, soit P un des minima globaux de J (à M fixé). Alors si on note (B_i) la suite des bifurcations par lesquelles transite la masse allant en P dans un ordre bien choisi, $J(P)$ vaut le surcoût associé à la ligne brisée suivante :

$$J(P) = C(S, B_1, B_2, \dots, B_n, P, M)$$

Par définition du minimum, $J(P) \geq d(S, M)$. □

A priori, il n'y a pas égalité. Toutefois, pour ε petit et pour le cas une source deux puits, ces deux problèmes coïncident comme le montre le théorème suivant.

Théorème 5.2. *Soit G un réseau optimal entre une source S et deux puits M_1, M_2 .*

Alors $\exists \varepsilon_0 > 0 : \forall \varepsilon < \varepsilon_0, M \in \mathbb{R}^2, d(S, M) = J(M)$

Pour la démonstration de ce résultat, on a besoin du lemme suivant :

Lemme 5.1. $\exists \varepsilon_0 > 0 : \forall \varepsilon < \varepsilon_0, M \in G, d(S, M) \leq \varepsilon^\alpha \|\overrightarrow{SM}\|$

Démonstration du lemme. Ce résultat découle du fait que $\frac{(m+\varepsilon)^\alpha - m^\alpha}{\varepsilon^\alpha}$ tende vers 0 quand $\varepsilon \rightarrow 0$. Notons $\Phi(M) = \varepsilon^\alpha \|\overrightarrow{SM}\|$ et $\Psi(M) = ((m+\varepsilon)^\alpha - m^\alpha) \|\overrightarrow{ST}\| + ((m_1+\varepsilon)^\alpha - m_1^\alpha) \|\overrightarrow{TM}\|$. Il s'agit de montrer que pour ε assez petit, $\Phi - \Psi$ est strictement positif. La minoration suivante permet alors de conclure

$$\frac{\Phi(M) - \Psi(M)}{\varepsilon^\alpha \|\overrightarrow{SM}\|} \geq \frac{l_0}{l_0 + l_1} - \frac{((m+\varepsilon)^\alpha - m^\alpha)}{\varepsilon^\alpha} - \frac{((m_1+\varepsilon)^\alpha - m_1^\alpha)l_1}{\varepsilon^\alpha l_0} \quad (5.4)$$

□

Lemme 5.2. *Dans le cadre d'un réseau entre une source et trois puits, pour tout M point du plan, la distance entre la source S et M est atteinte en une ligne brisée ayant un nombre fini de points.*

Démonstration. Soit une suite de lignes brisées dont le coût converge vers $d(S, M)$. On va montrer qu'on peut supposer que cette suite est incluse dans un compact, ce qui nous donnera le résultat.

- Si dans une ligne brisée il y a un triplet P_1, P_2, P_3 avec P_2 qui n'est pas dans le réseau, par inégalité triangulaire on peut ôter P_2 de la ligne brisée. Ainsi, on peut supposer que tous les points des lignes brisées sont des points du réseau ou le point M lui-même.
- Si il y a 3 points alignés dans la même arête, on peut ôter le point milieu sans modifier le coût associé.
- Si on a une suite P_1, P_2, P_3, P_4 avec P_1, P_4 dans l'arête e_1 et P_2, P_3 dans l'arête e_2 avec les masses respectives $m_1 \geq m_2$, on peut en diminuant le coût ôter P_2 et P_3 .

Ainsi, on peut supposer qu'il y a moins de 6 points dans chaque ligne brisée, avec chaque point qui est dans $G \cup M$. Ainsi, on peut supposer que la suite converge vers une ligne brisée dont le coût sera égal à la distance $d(S, M)$ \square

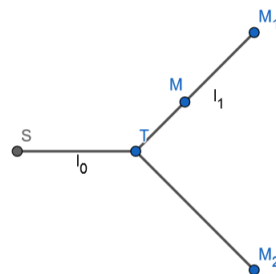


FIGURE 5.2 – Problème de la distance

Preuve du théorème. En effet, la valeur de $d(S, M)$ est atteinte en une ligne brisée $(P_i)_{1 \leq i \leq N}$. D'après le lemme, on sait déjà que pour tous point du réseau, la ligne brisée minimale est celle incluse dans le réseau.

Notons T le point de bifurcation du réseau. Si $[P_{i-1}P_i]$ et $[P_iP_{i+1}]$ ne sont pas dans le réseau, alors par inégalité triangulaire il est clair que cette ligne brisée n'est pas de cout minimal. De même, on peut se ramener à 2 cas :

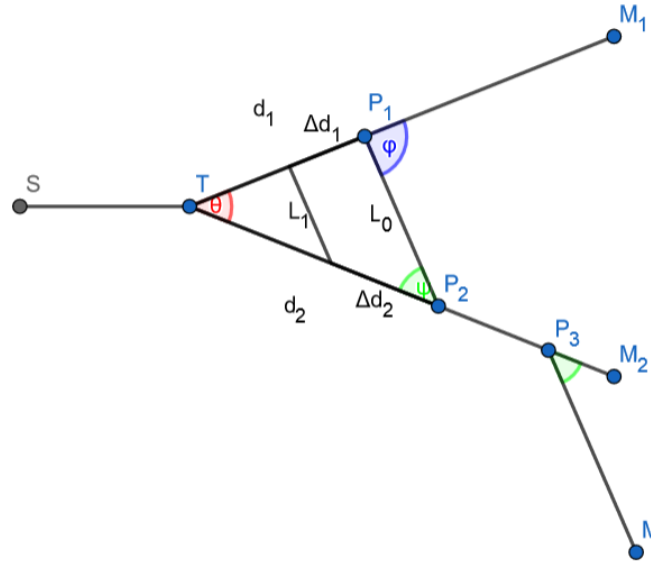


FIGURE 5.3 – Identification du problème de la distance

- Si $T \notin (P_i)$ alors soit $(P_i) = (S, P, M)$ avec $P \in [ST]$ ou bien $(P_i) = (S, M)$. Dans tous les cas, cela permet d'affirmer que $d(S, M) = J(M)$
- Si $T \in (P_i)$ alors soit $(P_i) = (S, T, M)$ ou bien $(P_i) = (S, T, P_1, M)$ avec $P_1 \in [TM_1]$ ou $P_2 \in [TM_2]$, et dans ces cas là il est clair que $d(S, M) = J(M)$.
Sinon, $(P_i) = (S, T, P_1, P_2, P_3, M)$ avec $P_1 \in [TM_1]$ et $(P_2, P_3) \in [TM_2]^2$, soit selon la figure suivante. Le caractère extrémal de (P_1, P_2) implique que l'angle Φ vérifie la propriété

$$\cos \Phi = \frac{(m_1 + \varepsilon)^\alpha - m_1^\alpha}{\varepsilon^\alpha}$$

Ainsi, pour que cette configuration soit possible, il est nécessaire que $\theta < \frac{\pi}{2}$. En utilisant les notations données dans la figure, par le théorème de Thalès, on sait que la différence de coûts quant on déplace P_1 et P_2 de façon à ce que les segments restent parallèles s'écrit :

$$\Delta C = (L_1 - L_0)\varepsilon^\alpha - \Delta d_1((m_1 + \varepsilon)^\alpha - m_1^\alpha) + \Delta d_2((m_2 + \varepsilon)^\alpha - m_2^\alpha) \quad (5.5)$$

avec

$$1 - \frac{\Delta d_1}{d_1} = \frac{L_1}{L_0} = 1 - \frac{\Delta d_2}{d_2}$$

On en déduit la réécriture suivante

$$\frac{\Delta C}{\Delta d_1 \varepsilon^\alpha} = -\frac{L_0}{d_1} + \frac{d_2}{d_1} \frac{(m_2 + \varepsilon)^\alpha - m_2^\alpha}{\varepsilon^\alpha} - \frac{(m_1 + \varepsilon)^\alpha - m_1^\alpha}{\varepsilon^\alpha}$$

Or, $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{d_2}{d_1} = \frac{1}{\cos \theta}$, et donc pour ε assez petit, quelque soit Δd_1 inférieur à d_1 , $\Delta C < 0$. Ainsi, ce cas ne peut pas être optimal.

On a donc montré que pour ε assez petit, $d(S, M)$ est atteinte en une ligne brisée convexe, et donc $d(S, M) = J(M)$. \square

A priori, pour des graphes plus complexes, il n'y pas forcément identification entre la minimisation du coût de branchement et la détermination de la distance. Toutefois, la prise en compte de cette distance peut être intéressante pour déterminer un paramètre "exploratoire" du réseau. En effet, la distance représente la difficulté d'accéder à un point donné en prenant compte des avantages offerts par le réseau, et donc on peut dire qu'un réseau "explore bien" son environnement si l'aire de l'ensemble des points à distance inférieure à 1 de la source est grande.

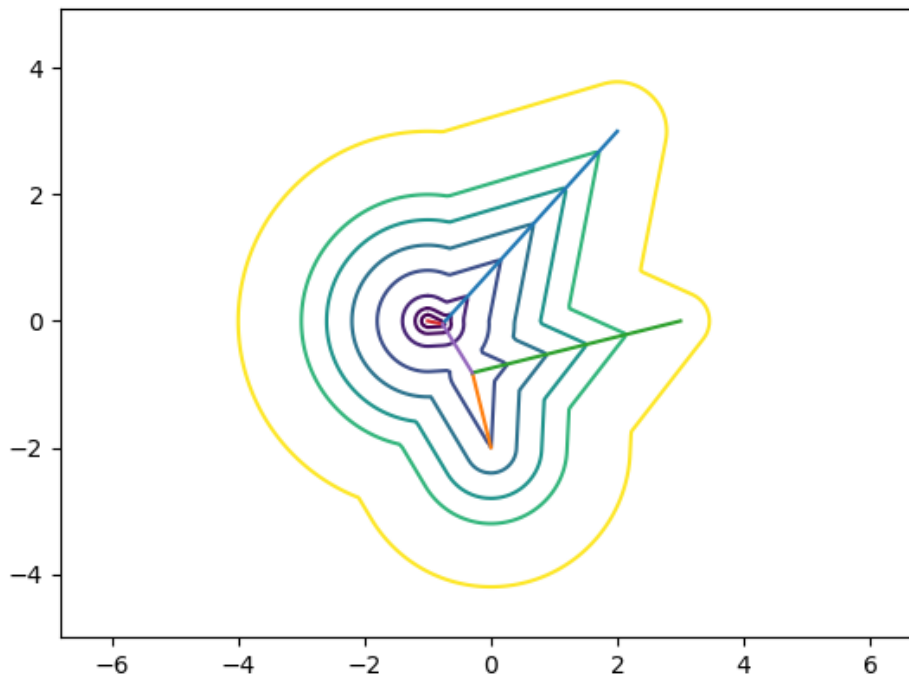


FIGURE 5.4 – Isovaleurs à 0 de la distance associée à un réseau optimal. Les 3 puits sont $(0,-2)$, $(2,3)$ et $(3,0)$ associés aux masses 5, 1 et 0.5 respectivement

Bibliographie

- [1] Paul Pegon. *Branched transport and fractal structures*. PhD thesis, Université Paris-Saclay, 2017.
- [2] Caselles Jean-Michel Morel Marc Bernot, Vincent. *Optimal Transportation Networks*. Lecture Notes in Mathematics. Springer Verlag, 2009.
- [3] Amic Frouvelle. Notes de cours "methodes numériques : optimisation, Avril 2015.

Table des figures

| | | |
|------|---|----|
| 1 | Veines d'une feuille et réseau de gazoduc européen | 5 |
| 2 | Transport de Monge et transport branché | 6 |
| 2.2 | Structure en Y respectant les conditions angulaires | 13 |
| 2.3 | Angle au centre | 14 |
| 2.4 | Point pivot et point de bifurcation | 14 |
| 2.5 | Structures dans la cas une source deux puits | 16 |
| 2.6 | Démonstration de théorème 2.3 | 17 |
| 2.7 | Structure en V | 18 |
| 2.8 | Topologie de le structure optimale | 21 |
| 2.9 | Points pivots | 21 |
| 2.10 | Points de branchement | 22 |
| 3.1 | Algorithme du gradient | 27 |
| 3.2 | Dichotomie | 29 |
| 3.3 | Méthode du point pivot | 30 |
| 3.4 | Algorithme du pivot avec 3 puits | 30 |
| 4.1 | Un réseau possible d'étude | 31 |
| 4.2 | Non-unicité du minimiseur | 32 |
| 4.3 | Notations utilisées dans la preuve ci-dessous | 32 |
| 4.4 | Branchement de M à un réseau optimal | 34 |
| 4.7 | Le cas $\varepsilon \rightarrow 0$ | 39 |
| 4.8 | Schéma lorsque $M \in \Omega_1$ | 42 |
| 4.9 | Voisinage de P^* et notations associés | 42 |

| | | |
|-----|---|----|
| 5.2 | Problème de la distance | 49 |
| 5.3 | Identification du problème de la distance | 50 |
| 5.4 | Distance associée à un réseau | 51 |