

Autour du théorème de Sylvester Gallai

par : C. Giroudot, J. Boulanger

Exposé de première année. Encadré par J. DANIEL

Table des matières

1	Introduction	1
1.1	Énoncé du théorème	1
1.2	Preuve de Kelly	2
1.3	Preuve de Gallai	2
2	Configurations	4
2.1	Configuration abstraite	4
2.2	Premiers exemples de configurations	4
3	Plan projectif et dualité	7
3.1	Introduction au plan projectif	7
3.2	Dualité	10
3.3	Un exemple de preuve utilisant la dualité	11
4	Configuration de Hesse	12
4.1	Un premier exemple	12
4.2	Configurations de Ceva	12
4.3	Théorie des cubiques projectives et points d'inflexion	13
5	Généralisation au cas complexe	18
5.1	Cas réel	18
5.2	Cas complexe	20
5.3	Cas des quaternions	22

1 Introduction

Le plan euclidien \mathbb{R}^2 est l'espace privilégié pour la géométrie de base. Il permet de formuler de nombreuses questions géométriques, qui peuvent ensuite être généralisées à de nombreux autres espaces. C'est le cas du problème de Sylvester, proposé par Sylvester en 1893 dans [Syl], résolu par Gallai en 1932 (preuve publiée en 1943, présentée dans [Cox] par exemple). D'autres preuves suivirent celle de Gallai, utilisant des idées et des techniques très différentes. Nous verrons d'abord plusieurs de ces preuves, avant de voir comment ce problème peut être généralisé au cas complexe, par un théorème conjecturé par Serre dans [Ser], et démontré par Kelly dans [Kel], puis par Elkies, Pretorius et Swanepoel en 2006 dans [EPS]. Cette preuve a l'avantage de se généraliser au cas des quaternions.

1.1 Énoncé du théorème

Théorème 1.1 (Théorème de Sylvester Gallai). *Soient pour $n, d \in \mathbb{N}^*$, n points dans \mathbb{R}^d non tous alignés. Alors il existe une droite passant par exactement deux de ces points.*

Commençons par présenter quelques preuves géométriques du théorème de Sylvester-Gallai. La première est due à Kelly et date de 1948, et la seconde est la preuve originale donnée par Gallai en 1943.

1.2 Preuve de Kelly

Cette preuve est dite euclidienne, car elle utilise la structure euclidienne de \mathbb{R}^2 , ici les distances.

Par l'absurde, on suppose qu'une droite reliant deux points passe toujours par un troisième point. On suppose les points non tous alignés. On peut donc prendre trois points A, B et C non alignés, et tels que la distance de A à la droite (BC) soit minimale. Par hypothèse, il existe un troisième point D sur la droite (BC).

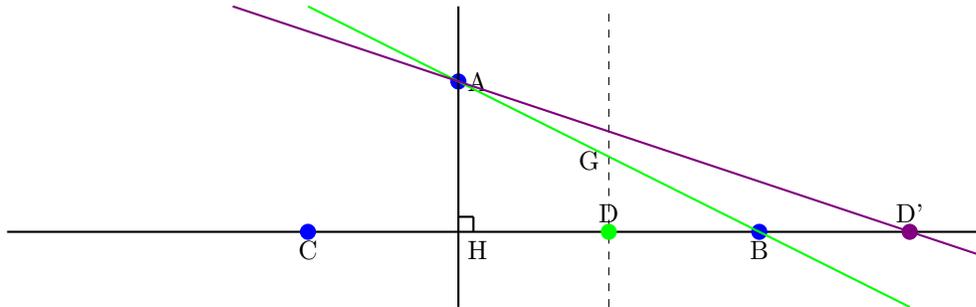


FIGURE 1 – Deux possibilités pour D (les deux autres sont les symétriques)

Par symétrie, il n'y a qu'à traiter les deux cas représentés sur la figure :

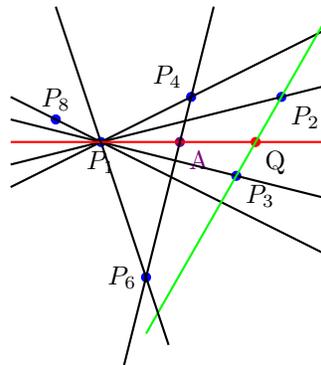
- $D \in [HB]$: Dans ce cas, la distance de D à la droite verte (AB) est strictement inférieure à la distance de A à la droite (CB), car $d(D, (AB)) \leq d(D, G) < d(A, H) = d(A, (BC))$. (L'inégalité stricte est donnée par le théorème de Thalès)
- $D' \notin [CB]$: Dans ce cas, la distance de B à la droite violette (AD') est strictement inférieure à la distance de A à la droite (CB), par le même argument.

1.3 Preuve de Gallai

On suppose encore les points non tous alignés. Soit P_1, \dots, P_n un ensemble E de n points du plan affine. On peut supposer que P_1, P_2 et P_3 sont non alignés. On construit ensuite toutes les droites passant par P_1 et l'un des autres points de E. Ces droites coupent la droite (P_2, P_3) en au plus $n - 1$ points. Ainsi, on peut choisir un point Q sur la droite (P_2, P_3) qui n'est pas l'un de ces points d'intersection (Ainsi, Q n'est pas l'un des P_i).

Par définition, la droite (P_1, Q) ne contient aucun des P_i (excepté P_1 évidemment). Considérons maintenant toutes les droites joignant deux points de E, et posons A le point de $[P_1, Q]$ tel que :

- (0) $A \neq P_1$
- (1) Le point A soit intersection d'une droite (P_i, P_j) et du segment $[P_1, Q]$ (quitte à réindexer on peut prendre P_4, P_5)
- (2) La distance AP_1 est minimale parmi tous les points vérifiant les deux premières conditions



Si (P_4, P_5) ne contient aucun autre point de E , c'est fini. Sinon, il existe $P_6 \in (P_4, P_5)$. Comme $(P_5, P_4) \setminus A$ a deux composantes connexes, il y a deux possibilités :
 Soit P_4, P_5 et P_6 sont dans la même composante connexe. On réindexe pour que les points soient dans cet ordre en partant de A . Sinon, il y a deux points dans une des composantes connexes, et un dans l'autre. On réindexe pour que P_4 et P_5 soient dans la même composante connexe, et pour que A, P_4, P_5 soient alignés dans cet ordre.
 Enfin, par l'absurde, s'il existe $P_7 \in (P_1, P_5) \cap E$ alors en séparant 4 cas, comme indiqué sur la figure suivante, on aboutit à une contradiction : si $P_7 \in]P_1 P_5[$, alors $(P_6 P_7) \cap (P_1 A)$ est plus proche de P_1 que A ; sinon, $(P_4 P_7) \cap (P_1 A)$ est plus proche de P_1 que A .

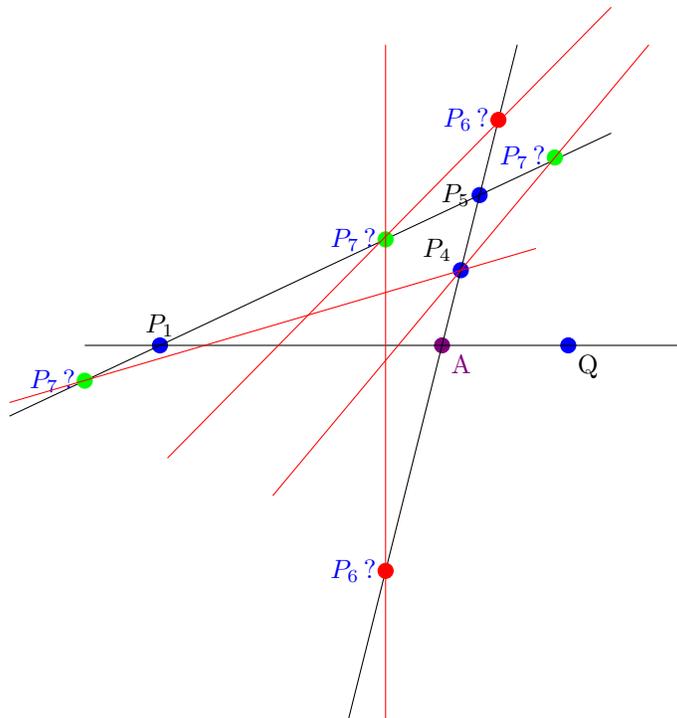


FIGURE 2 – Séparation des quatre cas

Remarque 1.2. Cette preuve est affine ; en effet la seule partie qui pourrait poser problème est le choix de A , à distance minimale de P_1 sur le segment $[P_1, Q]$. La condition affine exprimant cette minimalité peut s'écrire : A est le point vérifiant (0) et (1) tel que pour tout autre B vérifiant (1), $A \in [P_1, B]$.

2 Configurations

Dans cette partie nous allons définir les configurations abstraites de points et de droites, sur lesquelles on peut poser le problème de Sylvester. Nous verrons par la suite comment de telles configurations peuvent être plongées dans des espaces connus.

2.1 Configuration abstraite

De manière abstraite, on veut pouvoir définir une géométrie avec des points et des droites.

Définition 2.1. (1) Une *géométrie* est la donnée d'un ensemble P dont les éléments seront appelés points et de D un ensemble de parties de P dont les éléments seront appelés les droites. Pour que cette définition soit cohérente avec l'intuition, on impose que par deux points passe une et une seule droite : $\forall a, a' \in P, \exists! d \in D, a, a' \in d$. On dira que le point $a \in P$ est sur la droite $d \in D$ si $a \in d$.

(2) Une *configuration* est un sous ensemble fini S de P avec le sous ensemble D_S de D formé par l'ensemble des intersection avec S des droites qui contiennent au moins deux points de S . On la notera (S, D_S) dans la suite. Ainsi D_S est un ensemble de parties de S .

Dès lors, on peut formuler le problème de Sylvester en ces termes : Si $S \subset P$ est une configuration telle que $|D_S| \geq 2$, existe-t-il $d \in D_S$ tel que $|d| = 2$?

Exemple 2.2. Si K est un corps, $n \in \mathbb{N}$, et $P = K^n$, on a $D = \{x + t(y - x), t \in K, x \neq y \in K^n\}$

Définition 2.3. Une *configuration de Sylvester* est une configuration (S, D_S) telle que

$\forall d \in D_S, |d \cap S| > 2$. Elle est dite *triviale* si tous les points de S sont alignés.

On appelle *morphisme de configuration* entre (S, D_S) et (T, D_T) une application $f : S \rightarrow T$ telle que $f(D_S) = D_T$.

Deux configurations (S, D_S) et (T, D_T) seront dites *équivalentes* s'il existe une application $f : S \rightarrow T$ bijective et telle que $f(D_S) = D_T$. L'application f est alors un *isomorphisme*.

L'intuition nous suggère qu'un morphisme de configuration $f : S \rightarrow T$ doit envoyer des points alignés dans S sur des points alignés dans T . Cette condition est équivalente à celle de la définition, car $f(D_S) = D_T$ indique que $\{f(a), a \in d\}$ est une droite de T (avec d une droite de S), donc on a bien que trois points alignés restent alignés après le passage par f .

On remarquera que les morphismes de configuration injectifs permettent de voir une configuration comme sous-configuration d'une autre. Entre autre, savoir si une configuration de Sylvester admet des sous-configurations de Sylvester permet de définir des configurations de Sylvester minimales : ce sont les configurations de Sylvester non triviales n'admettant aucune sous-configuration propre de Sylvester non triviale.

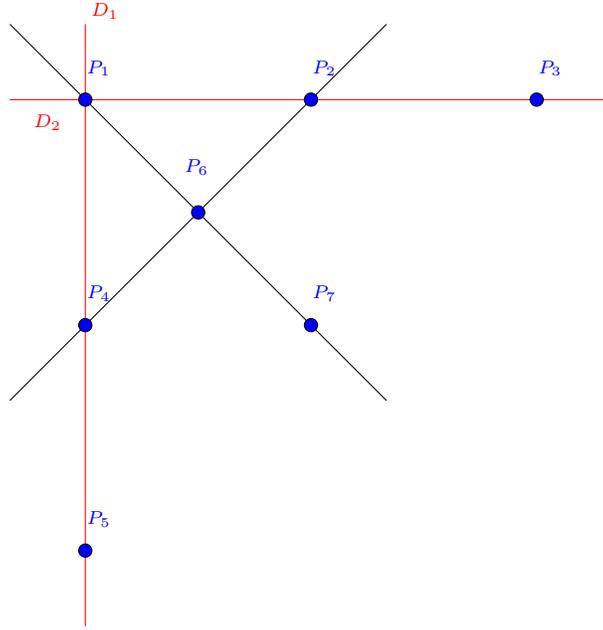
2.2 Premiers exemples de configurations

Il est intéressant de se demander combien une configuration de Sylvester doit contenir de points.

Proposition 2.4. Une configuration de Sylvester non triviale contient au moins sept points.

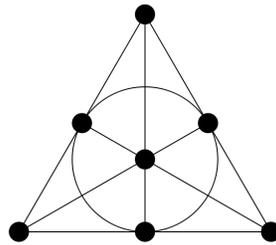
Démonstration. Une configuration de Sylvester non triviale contient au moins deux droites D_1 et D_2 , d'intersection un point P_1 . Chacune de ces droites contient deux autres points $P_2, P_3 \in D_1, P_4, P_5 \in D_2$ (comme sur la figure ci-dessous).

La droite (P_2P_4) contient un troisième point P_6 , qui n'est ni sur D_1 ni sur D_2 . Sinon, on aurait dans $D_1 \cap (P_2P_4)$ plusieurs points, donc ces deux droites seraient confondues, et alors on aurait $P_2, P_4 \in D_1 \cap D_2$, ce qui contredit l'hypothèse de départ. Enfin, la droite (P_1P_6) contient un point P_7 qui n'est ni sur D_1 , ni sur D_2 (sinon P_6 y serait aussi), et est donc distinct de tous les autres points considérés. Ainsi, toute configuration de Sylvester non triviale contient au moins sept points. \square



Exemple 2.5 (Plan de Fano). On peut se demander comment compléter cette configuration de façon à obtenir une configuration de Sylvester à sept points. Il s'agit donc de définir par quel autre point passent les droites (P_iP_7) pour $i \in \{2, 3, 4, 5\}$ et la droite (P_3P_5) .

Or (P_2P_7) passe nécessairement par P_5 , sinon on aurait deux droites confondues et la configuration serait triviale. De même, (P_3P_7) passe par P_5 , et (P_3P_5) passe par P_6 . On obtient la configuration à sept points suivante, et on a unicité (à isomorphisme près) de cette configuration. On appelle cette configuration plan de Fano. Le plan de Fano peut se voir comme l'espace projectif $\mathbb{F}_2\mathbb{P}^2$, et peut se représenter de façon plus symétrique comme ceci :

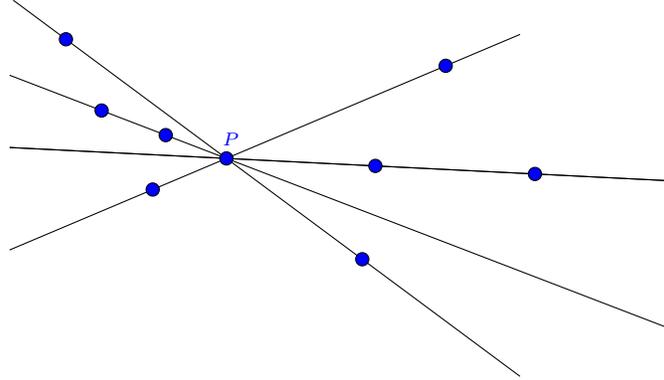


Plan de Fano

En contraignant le nombre de points sur chaque droite dans une configuration de Sylvester, il est possible d'obtenir des informations sur le nombre de points. Ceci permet notamment de connaître les configurations pour un petit nombre de points.

Proposition 2.6. *Soit S une configuration de Sylvester non triviale telle que toute droite de S contient exactement trois points. Alors S a un nombre impair de points. Si au contraire il existe une droite dans S contenant au moins quatre points, alors S contient au minimum neuf points.*

Démonstration. Si toute droite de S contient exactement trois points, soit P un point de S . Alors toute droite de S passant par P contient exactement deux points de S , et tout point de S est sur une telle droite. On peut donc compter les points de S distincts de P deux par deux, et en ajoutant P , on obtient un nombre impair de points.



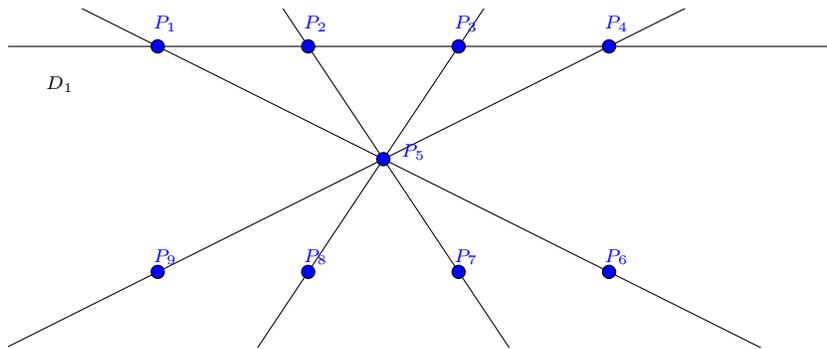
Si, au contraire, il existe dans S une droite contenant quatre points P_1, P_2, P_3, P_4 , et un point P_5 qui n'est pas sur cette droite, alors les droites $(P_i P_5)$ passent toutes par des points P_6, P_7, P_8, P_9 de S . Ce qui donne neuf points dans S . \square

Corollaire 2.7. *Il n'existe pas de configuration de Sylvester à huit points.*

Exemple 2.8 (Configuration de Hesse). Les mêmes arguments permettent de montrer qu'à isomorphisme près, il n'existe qu'une seule configuration de Sylvester non triviale à neuf points, appelée configuration de Hesse.

En effet, on commence par montrer que dans une telle configuration, il ne peut y avoir quatre points alignés. Sinon, soient D_1 une droite contenant quatre points P_1, P_2, P_3, P_4 , P_5 un point non situé sur D_1 , et P_{i+5} les points par lesquels passent les droites $(P_i P_5)$ pour $i = 1$ à 4. Ces points ne sont pas sur D_1 .

$(P_1 P_9)$ passe par un troisième point, qui n'est pas sur D_1 , et qui est distinct de P_5 et P_6 . Il s'agit de P_7 ou P_8 . En reprenant cet argument pour $(P_1 P_8)$ et $(P_1 P_7)$, on a que P_1, P_7, P_8 et P_9 sont alignés. De même, on montre que P_2, P_6, P_8 et P_9 sont alignés, donc que tous les points sauf P_5 sont sur D_1 , ce qui est absurde.



Ainsi, toute configuration de Sylvester à neuf points a exactement trois points sur chaque droite. Ceci permet d'en construire une, qui est unique à isomorphisme près.

En effet, partant de la fin de la preuve de la proposition 2.4., on n'a qu'une seule façon de compléter la configuration en ajoutant exactement deux points. Il est possible de voir la configuration de Hesse comme une configuration dans le plan projectif complexe, et donc dans le plan complexe. Cette représentation sera étudiée dans la partie 4, la partie 3 introduisant les outils nécessaires pour cette étude.

Remarque 2.9. Dans [KeN] sont étudiées les configurations de Sylvester avec moins de 14 points. Pour 10 et 11 points, il y a existence et unicité de la configuration. Pour 12 points, il existe trois configurations non isomorphes.

3 Plan projectif et dualité

Cette partie est une introduction sur le plan projectif. On introduira également le concept de dualité.

3.1 Introduction au plan projectif

Définition 3.1. Soit \mathbb{D} une algèbre à division et E un \mathbb{D} -espace vectoriel à gauche de dimension finie. En pratique, \mathbb{D} sera un corps ou l'algèbre des quaternions.

- L'ensemble $P(E)$ des droites vectorielles de E est appelé le plan projectif de E .
 - On définit $\dim P(E) = \dim E - 1$.
 - Un sous ensemble V de $P(E)$ est un sous-espace projectif de E s'il existe un sous-espace vectoriel F de E tel que $V=P(F)$.
 - On parle de droite projective lorsque $\dim V = 1$ et de plan projectif si $\dim V = 2$.
 - Si $E = \mathbb{D}^{n+1}$, on notera $P(\mathbb{D}^{n+1}) = \mathbb{D}\mathbb{P}^n$
- On dira que des éléments de $P(E)$ sont alignés lorsque dans E , ces droites sont coplanaires.

Remarque 3.2. Si E est un espace vectoriel réel, la dimension de $P(E)$ est la dimension de $P(E)$ en tant que variété différentielle. L'écriture $\mathbb{R}\mathbb{P}^n$ nous renseigne alors directement sur la dimension de la variété.

Proposition 3.3 (Reformulation de la définition). *Le plan projectif est l'espace quotient $(E \setminus \{0\}) / \sim$ avec la relation "être sur la même droite" : $x \sim y \iff \exists \lambda \in \mathbb{D}^* = \mathbb{D} \setminus \{0\}, \lambda x = y$*

Dans toute la suite, on considèrera que E est de dimension finie $n + 1$.

Cette première manière de voir le plan projectif nous donne des "coordonnées" sur $P(E)$, appelées **coordonnées homogènes**. En effet, choisissons des coordonnées sur E , il vient immédiatement que pour $x, y \in E \setminus \{0\}$,

$$x = (x_1, \dots, x_{n+1}) \sim y = (y_1, \dots, y_{n+1}) \iff \exists \lambda \in \mathbb{D}^*, \forall i \in \llbracket 1, n+1 \rrbracket, \lambda x_i = y_i$$

On note alors $[x_1 : \dots : x_{n+1}]$ la droite vectorielle engendrée par le point (x_1, \dots, x_{n+1}) de $E \setminus \{0\}$. Ainsi, $\forall \lambda \in \mathbb{D} \setminus \{0\}, [\lambda x_1 : \dots : \lambda x_{n+1}] = [x_1 : \dots : x_{n+1}]$. Généralement, on choisit un représentant de chaque classe qui a des propriétés sympathiques avec lequel on va travailler.

Exemple 3.4 ("Identification à une demi-sphère"). Si E est un espace vectoriel réel normé, on peut décider de choisir pour représentant de $[x_1 : \dots : x_{n+1}]$ le point $y = (y_1, \dots, y_{n+1})$ de la droite vectorielle engendrée par (x_1, \dots, x_{n+1}) et tel que $\|y\| = 1$ et $\exists i \in \llbracket 1, n+1 \rrbracket, \forall j \in \llbracket 1, i-1 \rrbracket, y_j = 0$ et $y_i \geq 0$. (Si $i = 1$, la condition est juste $y_1 \geq 0$).

On identifie ainsi $P(E)$ à une demi-sphère de E , avec identification sur l'équateur des points diamétralement opposés.

Une deuxième manière de voir le plan projectif est de le "plonger" en partie sur un hyperplan affine de E en choisissant un "hyperplan à l'infini". C'est ce que l'on va faire.

Proposition 3.5. *Soit H un hyperplan de E et $\mathcal{H} = H + a, a \notin H$ un hyperplan affine. Alors,*

$$F : \begin{cases} P(E) \setminus P(H) \rightarrow \mathcal{H} \\ d \mapsto F(d) - a \quad \text{où } \{F(d)\} = d \cap \mathcal{H} \end{cases}$$

est une bijection qui préserve l'alignement des points.

Démonstration. 1) C'est une bijection : Soit \mathcal{H} un hyperplan affine de la forme $\mathcal{H} = H + a$, avec $a \notin H$, et soit $d \in P(E) \setminus P(H)$. d est une droite vectorielle de E qui n'est pas contenue dans

l'hyperplan H . Ainsi, $E = H \oplus d$ et la droite d intersecte l'hyperplan affine \mathcal{H} en un unique point $F(d)$. L'application,

$$F : \begin{cases} P(E) \setminus P(H) \rightarrow \mathcal{H} \\ d \mapsto F(d) \quad \text{où } \{F(d)\} = d \cap \mathcal{H} \end{cases}$$

est alors une bijection entre $P(E) \setminus P(H)$ et \mathcal{H} . À tout point p de \mathcal{H} , la droite vectorielle passant par p est un antécédent évident de p . Réciproquement, si deux droites vectorielles passent par le même point $p \in \mathcal{H}$, ce sont les mêmes, car ces deux droites passent aussi par 0 . On identifie ensuite \mathcal{H} à H en translatant par $-a$.

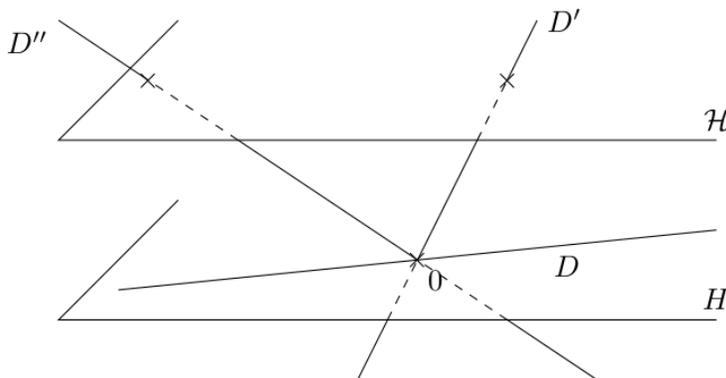


FIGURE 3 – Identification de $P(E) \setminus P(H)$ à \mathcal{H}

2) Elle préserve l'alignement des points. Par définition, si trois points sont alignés dans le plan projectif, c'est que les droites vectorielles de E dont elles proviennent sont incluses dans un même plan \mathcal{P} . Si elles ne sont pas incluses dans l'hyperplan H , alors l'application F envoie les trois points sur une même droite affine de H , et donc F préserve l'alignement des points.

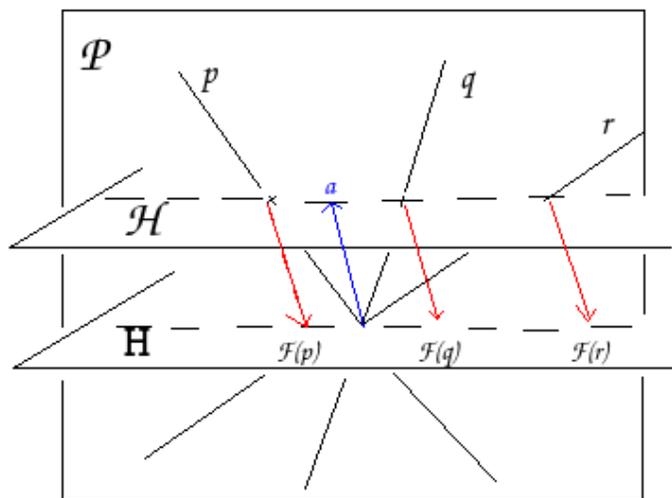
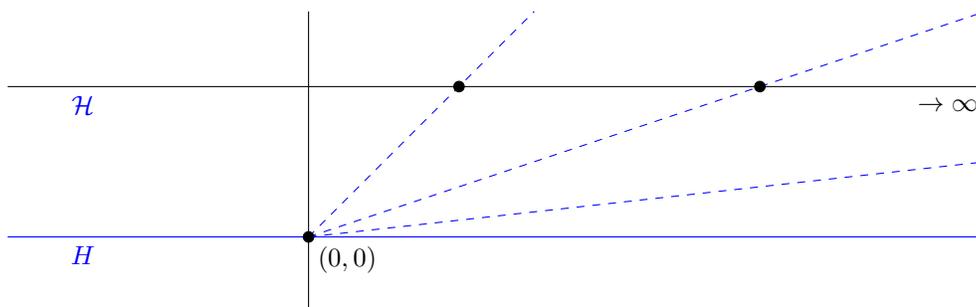
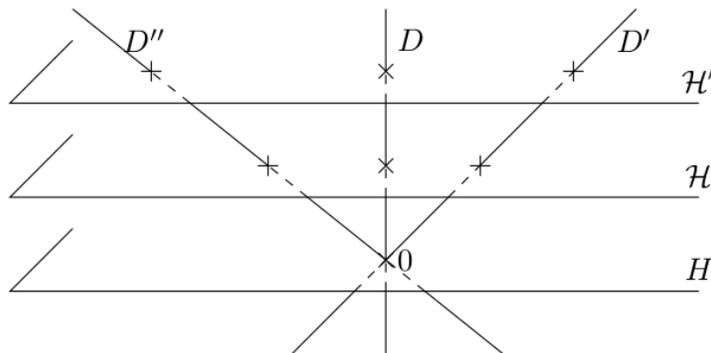


FIGURE 4 – F préserve l'alignement des points

□

Cette correspondance nous permettra de prouver qu'une configuration donnée dans un espace projectif se plonge dans un espace affine.

Remarque 3.6. De plus, si \mathcal{H}' est un autre hyperplan affine de direction H , la bijection construite par la preuve précédente est la même que la précédente à une homothétie et une translation près (la translation provient du choix de a et a').



Remarque 3.7. L'hyperplan H est appelé **hyperplan à l'infini**. Cette dénomination se comprend sur les droites vectorielles de \mathbb{R}^2 par exemple, comme sur la figure ci dessus. Dès lors qu'on a choisi un hyperplan à l'infini, le reste s'identifie donc à un hyperplan de E .

Exemple 3.8. *Identification via les coordonnées barycentriques*

Soit E un \mathbb{D} -espace vectoriel, et H un hyperplan de E . On choisit des coordonnées dans E tel que H soit l'hyperplan d'équation $\sum_{i=1}^{n+1} x_i = 0$. Pour un hyperplan affine \mathcal{H} on prend l'hyperplan affine d'équation $\sum_{i=1}^{n+1} x_i = 1$.

Passons maintenant dans $P(E)$, et identifions $P(E) \setminus P(H)$ à \mathcal{H} . En coordonnées, la droite $\text{Vect}\{(x_1, \dots, x_{n+1})\}$ est représentée dans $P(E)$ par les coordonnées $[x'_1 : \dots : x'_{n+1}]$ avec $(x'_1, \dots, x'_{n+1}) = \lambda(x_1, \dots, x_{n+1}) \in \mathcal{H}$, c'est à dire $\sum_{i=1}^{n+1} x'_i = 1$.

On parlera de coordonnées barycentriques. Cet exemple va nous être utile en section 5.

Corollaire 3.9 (de la proposition 3.5). *Lorsque \mathbb{D} est infini, une configuration de Sylvester donnée dans un espace projectif sur \mathbb{D} se plonge dans un espace affine.*

Démonstration. Considérons un hyperplan projectif $P(H)$ qui ne contient aucun point de la configuration (ce qui est possible car la configuration est un nombre fini de points). On choisit cet hyperplan comme hyperplan à l'infini et on applique F , pour un hyperplan affine \mathcal{H} engendré par H et distinct de H . Comme F préserve l'alignement des points, la propriété "sur une droite passant par deux points de la configuration, on peut trouver un troisième point de la configuration" est conservée. \square

Ainsi, à partir d'une configuration donnée dans un espace projectif, on peut en construire une dans un espace affine. Cela nous permettra de chercher des configurations de Sylvester dans des espaces projectifs plutôt que dans des espaces affines. L'avantage de travailler dans le plan projectif est qu'on a une notion de dualité compatible avec le problème de Sylvester, mais aussi l'arsenal de toutes les transformations projectives.

3.2 Dualité

Soit E un espace vectoriel. On note E^* son dual, c'est à dire l'espace des formes linéaires sur E . On utilisera assez souvent, implicitement, la propriété suivante, qui mérite d'être rappelée.

Rappel 3.10. *L'intersection de deux hyperplans vectoriels distincts de E est un sous espace de dimension $n-2$ de E . (C'est une conséquence de la formule de Grassmann).*

Rappel 3.11. *Soit F un sous-espace vectoriel de E de dimension $p < n + 1$. Alors F induit un sous espace F^\perp de E^* , avec :*

$$F^\perp = \{f \in E^*, \forall x \in F, f(x) = 0\}$$

On appellera F^\perp l'orthogonal de F (dans E^).*

De plus, $\dim(F^\perp) = n + 1 - p$.

En particulier, si D est une droite de E et P un plan, alors D^\perp est un hyperplan de E^* et P^\perp un sous espace de E^* de dimension $n - 1$. Or une droite de E est envoyée sur un point de $P(E)$ et un plan sur une droite de $P(E)$.

Proposition 3.12 (Dualité). *On peut naturellement associer :*

- À un point p de $P(E)$, un hyperplan projectif $p^* := p^\perp$ de $P(E^*)$.
 - À une droite d de $P(E)$, un sous espace $d^* := d^\perp$ de dimension $n - 2$ de $P(E^*)$.
- De plus, $p \in d \iff d^* \subset p^*$.*

Remarque 3.13. On rappelle qu'un point de $P(E)$ est une droite vectorielle de E , et donc une droite de $P(E)$ à un plan vectoriel dans E . L'orthogonal est donc bien l'orthogonal d'une droite dans E .

Démonstration. Pour la deuxième partie, on remarque que, dans E , on a :

$$\forall F, G \text{ sev de } E, F \subset G \implies G^\perp \subset F^\perp$$

Il suffit ensuite d'appliquer ce résultat à une droite et un plan et de passer dans l'espace projectif. \square

En conséquence, on peut définir :

Définition 3.14. À une configuration de Sylvester donnée dans un espace projectif $P(E)$, on peut associer une configuration dans $P(E^*)$: cette configuration est un ensemble fini d'hyperplans projectifs (de $P(E^*)$) tels que pour deux hyperplans projectifs Π_i et Π_j donnés, il en existe un troisième Π_{ij} tel que $\Pi_i \cap \Pi_j \subset \Pi_{ij}$. Cette configuration sera appelée *configuration de Sylvester duale*.

Voici les trois exemples importants qui vont nous servir par la suite.

Exemple 3.15 (Cas de \mathbb{RP}^2). \mathbb{RP}^2 est l'ensemble des droites vectorielles de \mathbb{R}^3 . Ainsi, en identifiant $(\mathbb{R}^3)^*$ à \mathbb{R}^3 , une droite de \mathbb{R}^3 est envoyée sur un plan tandis qu'un plan est envoyé sur une droite. Donc, dans \mathbb{RP}^2 :

- Un point p est envoyé sur une droite p^* .
- Une droite d est envoyée sur un plan d^* .

Ainsi, une configuration de Sylvester duale sera simplement un ensemble de droites tel que par le point d'intersection de deux droites passe toujours une troisième droite.

Remarque 3.16. Le fait de travailler dans le plan projectif permet d'avoir l'existence d'un tel point d'intersection.

Exemple 3.17 (Cas de \mathbb{CP}^3). Cette fois ci, \mathbb{CP}^3 est l'ensemble des droites vectorielles de \mathbb{C}^4 . Donc, en identifiant $(\mathbb{C}^4)^*$ à \mathbb{C}^4 , l'opération de dualité consiste à remplacer :

- Un point p de \mathbb{CP}^3 par un plan p^* de \mathbb{CP}^3
- Une droite d par une droite d^* .

Une configuration de Sylvester duale sera alors un ensemble de plans (projectifs complexes) tel que par la droite d'intersection de deux plans passe un troisième plan.

Exemple 3.18 (Cas de \mathbb{HP}^4). Sur les quaternions \mathbb{H} , dans \mathbb{HP}^4 , les points sont envoyés sur des sous-espaces projectifs de dimension 3 de \mathbb{HP}^4 et les droites sur des sous-espaces de dimension 2 de \mathbb{HP}^4 .

3.3 Un exemple de preuve utilisant la dualité

Commençons tout de suite par un exemple de preuve qui s'appuie sur le principe de dualité. La suivante fut celle donnée par Melchior reprise dans [Ber].

Rappel 3.19 (Théorème de Sylvester-Gallai - Cas réel). *Toute configuration de Sylvester dans \mathbb{RP}^2 est une configuration triviale* (ie tous les points sont alignés).

Démonstration. On va montrer la version duale du théorème (voir exemple 2.15). On se place dans le plan projectif réel \mathcal{P} et on considère l'ensemble Δ des droites duales des points de la configuration considérée.

On note p_r le nombre de polygones à r côtés dans la décomposition cellulaire de \mathcal{P} définie par Δ .

On note t_r le nombre de points qui sont situés sur r droites de Δ .

S le nombre de sommets de la décomposition cellulaire, A d'arêtes et F de polygones. On a :

$$\sum_{r \geq 2} t_r = S, \quad \sum_{r \geq 3} p_r = F \quad \text{et} \quad A = \frac{1}{2} \sum_{r \geq 3} r p_r = \sum_{r \geq 2} r t_r$$

On admet alors le théorème suivant.

Théorème 3.20. *La caractéristique d'Euler-Poincaré définie par $S - A + F$ vaut 1 dans \mathbb{RP}^2 .*

Montrer la conjecture de Sylvester revient à montrer que $t_2 \geq 1$.

Si par l'absurde, on suppose $t_2 = 0$ la formule d'Euler-Poincaré donne :

$$(1) \quad \sum_{r \geq 2} t_r + \sum_{r \geq 3} p_r = 1 + \sum_{r \geq 2} r t_r \geq 1 + 3 \sum_{r \geq 3} t_r, \quad \text{car } t_2 = 0$$

$$\text{mais on a aussi : } (2) \quad \sum_{r \geq 2} t_r + \sum_{r \geq 3} p_r = 1 + \frac{1}{2} \sum_{r \geq 3} r p_r \geq 1 + \frac{3}{2} \sum_{r \geq 3} p_r$$

$$\frac{1}{3}(1) + \frac{2}{3}(2) \quad \text{donne :} \quad \sum_{r \geq 2} t_r + \sum_{r \geq 3} p_r \geq 1 + \sum_{r \geq 2} t_r + \sum_{r \geq 3} p_r$$

C'est absurde, donc $t_2 \geq 1$.

Nous avons donc prouvé le théorème de Sylvester-Gallai. □

Expliquons qualitativement d'où provient la formule d'Euler-Poincaré.

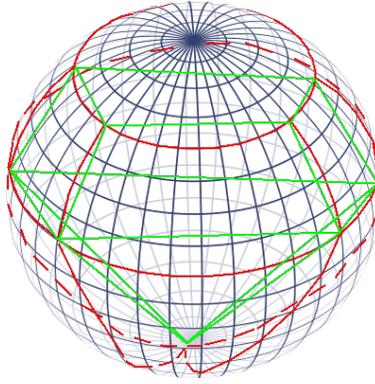
Proposition 3.21. *Dans l'espace ordinaire, pour un polyèdre convexe, on a $S - A + F = 2$.*

Démonstration. Notre polyèdre est constitué d'un nombre fini de sommets donc on peut trouver des plans parallèles en choisissant leur direction de sorte de sorte qu'entre deux plans successifs il n'y ait qu'un point du polyèdre. On regarde ensuite le comportement de la fonction $S - A + F$ associée à la partie au dessus du plan considéré. Au sommet cette fonction vaut 1. Puis, à chaque passage d'un point, la fonction $S - A + F$ est invariante sauf pour le passage du premier point et le passage du dernier point où la valeur de $S - A + F$ augmente de 1. □

Corollaire 3.22. *Pour un découpage de la sphère \mathbb{S}^2 en polygones, on a $S - A + F = 2$. Et pour un découpage sur le plan projectif, $S - A + F = 1$*

Démonstration. Commençons par la sphère. On considère un découpage de la sphère en polygones. On peut alors regarder ce découpage comme formant un polyèdre convexe dans \mathbb{R}^3 , en prenant les segments "courbes" reliant deux points tracés sur \mathbb{S}^2 , et en en faisant un "vrai" segment dans \mathbb{R}^3 , comme sur la figure ci-dessous. Par la proposition précédente, $S - A + F = 2$.

Pour le plan projectif, si on a un découpage on peut construire un découpage sur \mathbb{S}^2 qui double le nombre de points, de faces et d'arêtes. Ainsi, $2(S - A + F) = 2$ donc $S - A + F = 1$. □



4 Configuration de Hesse

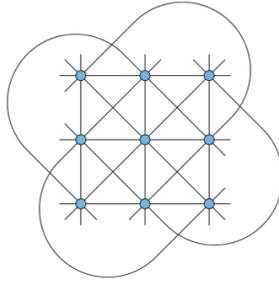
La configuration de Hesse à déjà été présentée de manière abstraite dans la partie 2. Nous allons l'étudier plus en détail dans cette section et voir que cette configuration se représente dans le plan projectif complexe $\mathbb{C}P^2$.

4.1 Un premier exemple

Dans [Ber], on peut en trouver une représentation dans le plan projectif complexe $P^2\mathbb{C}$, donnée par les points :

$$\begin{array}{ccc} [0 : 1 : -1] & [1 : 0 : -1] & [1 : -1 : 0] \\ [0 : 1 : -j] & [1 : 0 : -j] & [1 : -j : 0] \\ [0 : 1 : -j^2] & [1 : 0 : -j^2] & [1 : -j^2 : 0] \end{array}$$

On démontrera que cela forme bien une configuration de Sylvester en 4.2.



Configuration de Hesse

Dans les deux paragraphes suivants, on va généraliser cet exemple dans deux directions.

4.2 Configurations de Ceva

Dans l'exemple précédent, on remarque l'apparition de racines cubiques de l'unité. En fait, en prenant les points formés de la même manière avec les racines n -ièmes de l'unité, on se rend compte que l'on obtient aussi une configuration de Sylvester. Plus précisément :

Soit $n \geq 3$, On considère les points $P_{1,k} = [0 : 1 : -\omega^k]$, $P_{2,l} = [1 : 0 : -\omega^l]$, $P_{3,m} = [1 : -\omega^m : 0]$, où $\omega = e^{2i\pi/n}$ est une racine primitive n -ième de l'unité et $k, l, m \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$. Alors :

- 1) Les points $P_{1,k}$, $k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$, sont alignés (sur la droite projective d'équation $x = 0$) de même les points $P_{2,l}$ sont alignés ($y = 0$) et les points $P_{3,m}$ sur $z = 0$
- 2) Si $k, l \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$ alors les points $P_{1,k}$, $P_{2,l}$ et $P_{3,l-k \pmod n}$ sont alignés sur la droite projective d'équation $\omega^l x + \omega^k y + z = 0$

Ainsi, on a obtenu une configuration de Sylvester à $3n$ points et n^2+3 droites dans le plan complexe. Notons la $C(n)$. Ces configurations sont appelées *configurations de Ceva*.

L'étude de ces configurations doit être amusante. On peut déjà remarquer que si p est un multiple de q , alors $C(q)$ est contenue dans $C(p)$, puisque les racines q -ièmes de l'unité seront aussi des racines p -ièmes de l'unité. On peut se demander si les $C(p)$ pour p premier ou $p = 4$ sont des configurations minimales, et si toute configuration de Sylvester complexe contient l'une de celles-ci.

4.3 Théorie des cubiques projectives et points d'inflexion

Dans l'objectif de comprendre mieux la configuration de Hesse, nous allons définir et étudier les points d'inflexion d'une cubique projective complexe et voir qu'ils forment une configuration de Hesse. L'exemple donné en 4.1 est en fait l'ensemble des points d'inflexion de la cubique projective d'équation $X^3 + Y^3 + Z^3 - 3aXYZ = 0$, $a \in \mathbb{C}$ dans un sens que l'on va définir.

Définition 4.1. Un **polynôme homogène** de degré d à n variables est un polynôme complexe tel que tous les monômes $X_1^{k_1} \dots X_n^{k_n}$ le constituant soient de degré d .

Remarque 4.2. Dans la suite, on notera $F(X, Y, Z)$ ce polynôme. Le fait qu'il soit homogène permet de considérer son lieu d'annulation non pas dans \mathbb{C}^3 mais dans \mathbb{CP}^2 , car si $(X, Y, Z) \in \mathcal{C}$, alors $F(X, Y, Z) = 0$ et par homogénéité, pour tout $\lambda \in \mathbb{C}^*$, $F(\lambda X, \lambda Y, \lambda Z) = \lambda^3 F(X, Y, Z) = 0$. On peut donc considérer non pas l'ensemble des points de \mathbb{C}^3 pour lesquels $F = 0$ mais l'ensemble des droites vectorielles (donc des points de \mathbb{CP}^2) pour lesquels $F = 0$.

Définition 4.3. Une **cubique projective** est une courbe \mathcal{C} dans \mathbb{CP}^2 d'équation un polynôme à 3 variables homogène de degré 3.

Remarque 4.4. Si la courbe est définie par un polynôme homogène de degré d , on parle de **courbe algébrique**.

Supposons $Z \neq 0$, on peut donc écrire $[X : Y : Z] = [\frac{X}{Z} : \frac{Y}{Z} : 1]$. On pose alors $x = \frac{X}{Z}$ et $y = \frac{Y}{Z}$. Posons de plus $f(x, y) = F(x, y, 1)$.

Définition 4.5. Le point $[x_0 : y_0 : 1] \in \mathcal{C}$ est dit **singulier** si :

$$\partial_x f(x_0, y_0) = \partial_y f(x_0, y_0) = 0$$

Si non, il est dit **régulier**.

Remarque 4.6. De la même manière, si $X \neq 0$ ou $Y \neq 0$, on définit la notion de point singulier et régulier. En fait, on travaille juste dans une carte affine de \mathbb{CP}^2 .

Une courbe qui ne possède pas de points singuliers est dite régulière (ou non singulière).

Remarque 4.7. Bien que l'on soit sur \mathbb{C}^2 , la dérivation par rapport à une variable complexe a bien un sens car on travaille avec des courbes algébriques, donc f est un polynôme.

Définition 4.8. En un point régulier $[x_0 : y_0 : 1]$, on définit la **tangente** en ce point par la droite projective d'équation :

$$\partial_x f(x_0, y_0)(X - x_0 Z) + \partial_y f(x_0, y_0)(Y - y_0 Z) = 0$$

Remarque 4.9. On peut montrer que cette définition ne dépend pas de la carte affine choisie.

Définition 4.10. Soit $(x_1(t), \dots, x_n(t))$ une courbe paramétrée dans \mathbb{R}^n ou \mathbb{C}^n . Un **point d'inflexion** est un point de la courbe telle que les deux premières dérivées en ce point soient colinéaires.

Voici ce que donne la définition dans quelques exemples.

- **Cas du graphe d'une fonction $(t, f(t))$.** La condition s'écrit : $\begin{vmatrix} 1 & f'(t) \\ 0 & f''(t) \end{vmatrix} = 0$ donc $f''(t) = 0$.

- **Cas d'une courbe paramétrée** définie par $(x(t), y(t))$. Matriciellement, on a $\begin{vmatrix} x' & y' \\ x'' & y'' \end{vmatrix} = 0$.

- **Cas d'une courbe définie par l'équation $f(x, y) = 0$.**

On veut pouvoir obtenir les points d'inflexion par simple calcul sur f .

Proposition 4.11. Soit \mathcal{C} une courbe algébrique régulière sur \mathbb{C}^2 définie par l'équation $f(x, y) = 0$. Alors $(x, y) \in \mathcal{C}$ est un point d'inflexion si et seulement si

$$\partial_{xx}^2 f \cdot (\partial_y f)^2 - 2\partial_{xy}^2 f \cdot \partial_y f \partial_x f + \partial_{yy}^2 f \cdot (\partial_x f)^2 = 0$$

Démonstration. On paramètre la courbe au voisinage de (x, y) par $0 = g(t) = f(x(t), y(t))$, ce qui est possible par le théorème d'inversion locale holomorphe au voisinage d'un point régulier. En dérivant, on obtient $0 = g'(t) = \partial_x f \cdot x'(t) + \partial_y f \cdot y'(t) = \nabla f \cdot (x'(t), y'(t))$.

En particulier $(x'(t), y'(t))$ est colinéaire à $(\partial_y f, -\partial_x f)$.

De plus $0 = g''(t) = \partial_{xx}^2 f \cdot (x'(t))^2 + 2\partial_{xy}^2 f \cdot x'(t)y'(t) + \partial_{yy}^2 f \cdot (y'(t))^2 + \partial_x f \cdot x''(t) + \partial_y f \cdot y''(t)$, donc,

$$\begin{aligned} (x(t), y(t)) \text{ est un point d'inflexion} &\iff \partial_x f \cdot x''(t) + \partial_y f \cdot y''(t) = 0 \text{ car alors } (x', y') \text{ et } (x'', y'') \text{ sont colinéaires.} \\ &\iff \partial_{xx}^2 f \cdot (x'(t))^2 + 2\partial_{xy}^2 f \cdot x'(t)y'(t) + \partial_{yy}^2 f \cdot (y'(t))^2 = 0 \\ &\iff \partial_{xx}^2 f \cdot (\partial_y f)^2 - 2\partial_{xy}^2 f \cdot \partial_y f \partial_x f + \partial_{yy}^2 f \cdot (\partial_x f)^2 = 0 \end{aligned}$$

Où l'on a remplacé $(x'(t), y'(t))$ par $(\partial_y f, -\partial_x f)$ dans l'avant dernière équivalence étant donné qu'ils sont colinéaires. \square

Remarque 4.12. En travaillant dans une carte affine, on définit alors la notion de point d'inflexion pour un point d'une courbe définie sur $\mathbb{C}\mathbb{P}^2$. On peut vérifier que c'est indépendant de la carte affine choisie.

Nous allons maintenant définir la multiplicité d'intersection d'une droite avec une cubique. Soit L une droite projective donnée par l'équation homogène $aX + bY + cZ = 0$, où a, b et c sont non tous nuls.

L'intersection $\mathcal{C} \cap L$ est donnée par les équations :

$$\begin{cases} aX + bY + cZ = 0 \\ F(X, Y, Z) = 0 \end{cases}$$

Quitte à permuter X, Y et Z , on peut supposer $b \neq 0$, et $Z \neq 0$. (On remarque que, ayant fixé $b \neq 0$, le point $[0 : 1 : 0]$ n'appartient pas à L donc $X \neq 0$ ou $Z \neq 0$). Posons $x = \frac{X}{Z}$, $y = \frac{Y}{Z}$, $\alpha = -\frac{a}{b}$ et $\gamma = -\frac{c}{b}$. Alors,

$$\begin{aligned} [x : y : 1] \in \mathcal{C} \cap L &\iff \begin{cases} y = -\frac{a}{b}x - \frac{c}{b} \\ f(x, y) = 0 \end{cases} \\ &\iff f(x, \alpha x + \gamma) = 0 \\ &\iff g(x) = 0 \end{aligned}$$

Où on a posé $g(x) = f(x, \alpha x + \gamma)$. Ainsi, g est un polynôme de degré 3 qui possède une racine en x .

Définition 4.13. On appelle **multiplicité d'intersection** entre \mathcal{C} et L en x la multiplicité de x en tant que zéro de g . On la notera $m(x)$.

Remarque 4.14. Cette définition se généralise à l'intersection d'une courbe algébrique de degré quelconque et une droite.

Remarque 4.15. La multiplicité d'intersection d'un point de la courbe avec sa tangente est au moins 2.

Proposition 4.16. Soit \mathcal{C} une cubique projective régulière. Alors $[X_0 : Y_0 : Z_0]$ est un point d'inflexion si et seulement si la multiplicité d'intersection de la courbe avec sa tangente en $[X_0 : Y_0 : Z_0]$ est 3.

Démonstration. Supposons quitte à permuter X, Y, Z que $Z_0 \neq 0$. Ainsi, $[X_0 : Y_0 : Z_0] = [x_0 : y_0 : 1]$ et l'équation de la tangente est :

$$\partial_x f(x_0, y_0)(x - x_0) + \partial_y f(x_0, y_0)(y - y_0) = 0$$

Posons alors :

$$A = \partial_x f(x_0, y_0), \quad B = \partial_y f(x_0, y_0) \quad \text{et} \quad C = \partial_x f(x_0, y_0)x_0 + \partial_y f(x_0, y_0)y_0$$

Et, quitte à permuter X et Y , comme $[x_0 : y_0 : 1]$ est régulier, on peut supposer $B \neq 0$. Posons alors, $g(x) = f(x, \alpha x + \gamma)$, où $\alpha = -\frac{A}{B}$ et $\gamma = +\frac{C}{B}$. On a $g(x_0) = 0$ car $f(x_0, \alpha y_0 + \gamma) = 0$ car $[x_0 : y_0 : 1] \in \mathcal{C}$. De plus,

$$g'(x_0) = \partial_x f(x_0, \alpha x_0 + \gamma) + \alpha \partial_y f(x_0, \alpha x_0 + \gamma) = \partial_x f(x_0, y_0) + \alpha \partial_y f(x_0, y_0) = 0$$

$$\text{car} \quad \alpha = -\frac{A}{B} = -\frac{\partial_x f(x_0, y_0)}{\partial_y f(x_0, y_0)}$$

Puis,

$$g''(x_0) = \partial_{xx}^2 f(x_0, y_0) + 2\alpha \partial_{xy}^2 f(x_0, y_0) + \alpha^2 \partial_{yy}^2 f(x_0, y_0)$$

Puis en remplaçant α par sa valeur et en multipliant par $(\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0))^2$, on obtient

$$g''(x_0) = \partial_{xx}^2 f \cdot (\partial_y f)^2 - 2\partial_{xy}^2 f \cdot \partial_y f \partial_x f + \partial_{yy}^2 f (\partial_x f)^2$$

Donc d'après la proposition 5.9, il vient :

$$g''(x_0) = 0 \iff [x_0, y_0, 1] \text{ est un point d'inflexion.}$$

Comme $g(x_0) = g'(x_0) = 0$ est vérifié sur n'importe quel point de la courbe, on obtient le résultat. \square

Corollaire 4.17. *Si $[X : Y : Z]$ est un point d'inflexion, alors il est le seul point d'intersection de la courbe et de la tangente en $[X : Y : Z]$*

Démonstration. Dans le cas d'une cubique, il y a au plus trois points d'intersection entre la courbe et sa tangente en un point. Comme un point d'inflexion intersecte sa tangente avec multiplicité 3, c'est le seul point d'intersection. \square

Nous allons avoir besoin d'une dernière proposition.

Proposition 4.18. *Soit \mathcal{C} une courbe d'équation homogène $F(X, Y, Z) = 0$ de degré d dans $\mathbb{C}\mathbb{P}^2$. On suppose que F est non-singulière. Alors $[X : Y : Z]$ est un point d'inflexion si et seulement si $H_F(X, Y, Z) = 0$, où H_F est le déterminant de la matrice Hessienne de F .*

Lemme 4.19. *[Formule d'Euler] $X\partial_X F + Y\partial_Y F + Z\partial_Z F = d \cdot F$*

Démonstration du lemme. Clair sur un monôme de la forme $X^i Y^j Z^k$ avec $i + j + k = d$. On conclut par linéarité. \square

Lemme 4.20.

$$X^2 H_F = \begin{vmatrix} d(d-1)F & (d-1)\partial_Y F & (d-1)\partial_Z F \\ (d-1)\partial_Y F & \partial_{Y,Y}^2 F & \partial_{Y,Z}^2 F \\ (d-1)\partial_Z F & \partial_{Z,Y}^2 F & \partial_{Z,Z}^2 F \end{vmatrix}$$

Ce lemme est laissé au lecteur qui pourra utiliser la formule d'Euler sur F et ses dérivées premières et faire deux opérations intelligentes sur la première ligne et la première colonne.

Démonstration de la proposition 4.18. Soit $[X : Y : Z] \in \mathcal{C}$. Quitte à permuter les coordonnées, on peut supposer $X \neq 0$. On pose $y = \frac{Y}{X}$, $z = \frac{Z}{X}$ et $f(y, z) = F(1, y, z)$. Par le lemme 4.19,

$$H_F([1 : y : z]) = \begin{vmatrix} d(d-1)f & (d-1)\partial_y f & (d-1)\partial_z f \\ (d-1)\partial_y f & \partial_{y,y}^2 f & \partial_{y,z}^2 f \\ (d-1)\partial_z f & \partial_{z,y}^2 f & \partial_{z,z}^2 f \end{vmatrix}$$

Or sur un point de la courbe, $f(y, z) = 0$, donc

$$\begin{aligned} H_F = 0 &\iff (d-1)^2 [(-\partial_y f)^2 \partial_{zz}^2 f + 2\partial_y f \partial_z f \partial_{yz}^2 f - (\partial_z f)^2 \partial_{yy}^2 f] = 0 \\ &\iff [1 : y : z] \text{ est un point d'inflexion de } F \end{aligned}$$

par la proposition 4.11. □

Remarque 4.21. Le courbe Hessienne définie par le lieu des points où $H_F = 0$ est une courbe algébrique de degré $3(d-2)$, car c'est le déterminant d'une matrice dont les coefficients sont des polynômes homogènes de degré $d-2$.

Corollaire 4.22. *Une cubique projective régulière possède au moins un point d'inflexion*

Démonstration. On utilise ici une forme faible du théorème de Bézout, disant que deux courbes de \mathbb{CP}^2 ont toujours au moins un point d'intersection, les deux courbes en question étant la courbe \mathcal{C} et la courbe Hessienne associée à F . □

À ce stade, on va pouvoir démontrer le

Théorème 4.23. *Soit \mathcal{C} une cubique projective régulière. Alors \mathcal{C} possède exactement 9 points d'inflexion. De plus, ces points forment une configuration de Sylvester.*

Démonstration. On suppose que l'équation de \mathcal{C} est donnée par le polynôme homogène à trois variables $F(X, Y, Z)$.

On sait qu'il y a au moins un point d'inflexion par le Corollaire 4.22. Après un changement de coordonnées, on peut supposer que l'on a un point d'inflexion en $P := [0 : 1 : 0]$ et que la tangente L à la courbe en P est donnée par l'équation $Z = 0$.

Écrivons alors :

$$F(X, Y, Z) = a_{30}X^3 + a_{21}X^2Y + a_{20}X^2Z + a_{12}XY^2 + a_{02}Y^2Z + a_{10}XZ^2 + a_{01}YZ^2 + a_{03}Y^3 + a_{00}Z^3 + a_{11}XYZ$$

et regardons quelles sont les restrictions, compte tenu des hypothèses, sur les coefficients.

On se place dans la carte $Y \neq 0$. On pose $f(x, z) = F(x, 1, z)$.

- $P = [0 : 1 : 0] \in \mathcal{C}$ donc $\boxed{a_{03} = 0}$.

- L'équation de la tangente est $Z = 0$ donc $\boxed{a_{12} = \partial_x f(0, 0) = 0}$.

- $[0 : 1 : 0]$ est non singulier donc $\boxed{a_{02} = \partial_y f(0, 0) \neq 0}$.

- $[0 : 1 : 0]$ est un point d'inflexion donc

$$\partial_{xx}^2 f(0, 0) \cdot (\partial_y f(0, 0))^2 - 2\partial_{xy}^2 f(0, 0) \cdot \partial_y f(0, 0) \partial_x f(0, 0) + \partial_{yy}^2 f(0, 0) (\partial_x f(0, 0))^2 = 0$$

Donc comme $\partial_x f(0, 0) = 0$, il vient $\boxed{a_{21} = 0}$

À ce stade, on a

$$F(X, Y, Z) = a_{30}X^3 + a_{20}X^2Z + a_{02}Y^2Z + a_{10}XZ^2 + a_{01}YZ^2 + a_{00}Z^3 + a_{11}XYZ$$

- Enfin, $\boxed{a_{30} \neq 0}$ car sinon la droite $Z = 0$ serait contenue dans la courbe, ce qui est impossible pour une courbe régulière.

Puis en faisant les changements de variable $Y \leftarrow \lambda Y$ et $X \leftarrow \mu X$ où λ est une racine carrée de a_{02} et μ une racine cubique de $-a_{30}$, qui sont non nuls, on obtient une équation de la forme :

$$X^3 + AX^2Z + BXZ^2 + CZ^3 = DYZ^2 + EXYZ + Y^2Z$$

Remarquons de plus que comme P est un point d'inflexion avec pour tangente la droite projective d'équation $Z = 0$, P est le seul point de la courbe sur cette droite, par le corollaire 4.17.

Ainsi, tout autre point de la courbe est de la forme $[x : y : 1]$. Pour un point de cette forme, l'équation de la courbe s'écrit :

$$x^3 + Ax^2 + Bx + C = y^2 + Dy + Exy$$

Le lecteur pourra se convaincre que le changement de variable :

$$\begin{cases} y \leftarrow y + \frac{E}{2}x + \frac{D}{2} \\ x \leftarrow x + \frac{1}{3}\left(A + \frac{E^2}{4}\right) \end{cases}$$

permet de nous ramener à la forme dite "de Weierstrass" :

$$\boxed{y^2 = x^3 + ax + b}$$

Lemme 4.24. *La courbe est non singulière si et seulement si $4a^3 + 27b^2 \neq 0$*

Démonstration. $(x, 0) \in \mathcal{C}$ est singulier $\iff x$ est racine double de $X^3 + aX + b$
 $\iff \Delta = 4a^3 + 27b^2 = 0$.

Or les autres points ne peuvent être singuliers, car $\partial_y f(x, y) = y$ qui est donc non nul si y est non nul.
 $(f(x, y) = x^3 + ax + b - y^2)$. \square

Montrons maintenant qu'il existe exactement 9 points d'inflexion.

Par la proposition 4.11, $[x : y : 1]$ est un point d'inflexion si et seulement si

$$\partial_{xx}^2 f \cdot (\partial_y f)^2 - 2\partial_{xy}^2 f \cdot \partial_y f \partial_x f + \partial_{yy}^2 f (\partial_x f)^2$$

Ce qui s'écrit, avec $f(x, y) = x^3 + ax + b - y^2$, après calcul,

$$3x^4 + 6ax^2 + 12bx - a^2 = 0$$

Montrons alors :

- (1) $P := 3X^4 + 6aX^2 + 12bX - a^2$ n'a pas de racines doubles
- (2) Si x est racine de P, alors $Q(x) := x^3 + ax + b \neq 0$.

La condition (1) donne que P aura 4 racines distinctes x_1, x_2, x_3, x_4 et la condition (2) garantit que pour x_i une racine de P, il y a bien deux points d'inflexion correspondants, à savoir les points $[x_i : y_i : 1]$ et $[x_i : -y_i : 1]$ où y_i est tel que $y_i^2 = x_i^3 + ax_i + b$. Ce qui fait au total, en rajoutant le point à l'infini $[0 : 1 : 0]$, 9 points d'inflexion.

Pour montrer que les racines de P sont simples, montrons que P est premier avec son polynôme dérivé P'. Un calcul simple donne $P' = 12(X^3 + aX + b) = 12Q$. Il suffit alors de montrer que $P \wedge Q = 1$ pour montrer (1) et (2). Ce qui peut se faire en appliquant l'algorithme d'Euclide à P et Q ou bien en calculant le discriminant du polynôme P de degré 4. Il est laissé au lecteur le soin de vérifier que, sous la condition $4a^3 + 27b^2 \neq 0$, les polynômes P et Q sont premiers entre eux.

En conclusion, on a montré que \mathcal{C} possède 9 points d'inflexion :

$$\begin{array}{ccccc} [0 : 1 : 0] & [x_1 : y_1 : 1] & [x_2 : y_2 : 1] & [x_3 : y_3 : 1] & [x_4 : y_4 : 1] \\ & [x_1 : -y_1 : 1] & [x_2 : -y_2 : 1] & [x_3 : -y_3 : 1] & [x_4 : -y_4 : 1] \end{array}$$

De plus, on remarque que, pour $1 \leq i \leq 4$, les points $[x_i : y_i : 1]$, $[x_i : -y_i : 1]$ et $[0 : 1 : 0]$ sont alignés sur la droite d'équation $X + x_i Z = 0$. Ainsi, si on prend P et un autre point d'inflexion, alors il existe

un troisième point d'inflexion aligné avec les deux premiers. Mais P était au départ l'un quelconque des points d'inflexions de \mathcal{C} . Ainsi, en faisant le même travail avec les autres points d'inflexion, il vient immédiatement que pour deux points d'inflexion de \mathcal{C} , on peut trouver un troisième point d'inflexion tels que les trois points soient alignés. Autrement dit, l'ensemble des points d'inflexion de \mathcal{C} forment une configuration de Hesse. \square

5 Généralisation au cas complexe

Dans cette partie, nous allons montrer la généralisation du théorème de Sylvester Gallai au cas complexe conjecturée par Serre. La démonstration du cas réel donnée dans le paragraphe suivant permet de comprendre l'idée de la preuve d'Elkies, Pretorius et Swanepoel, que nous verrons ensuite.

5.1 Cas réel

Pour montrer le théorème dans \mathbb{R}^n , il suffit de le faire dans \mathbb{R}^2 , car si on a une configuration de Sylvester non triviale dans \mathbb{R}^n , alors l'intersection de la configuration avec un plan engendré par trois points non alignés de la configuration est encore une configuration de Sylvester, cette fois dans un plan.

Soit \mathcal{S} une configuration de Sylvester (CS) duale dans $\mathbb{R}P^2$. On suppose par l'absurde que $\bigcap_{l \in \mathcal{S}} l = \emptyset$ (Cela signifie que les droites ne sont pas toutes concourantes). On prend une droite à l'infini de telle sorte que :

- 1) Ce n'est pas une droite de \mathcal{S}
- 2) Elle ne contient pas les points d'intersection de deux droites de \mathcal{S} (Il y en a un nombre fini).

(Ainsi, si on injecte la configuration dans \mathbb{R}^2 , les droites ne seront pas parallèles)

Dans la suite, on utilisera les coordonnées barycentriques, c'est à dire que les coordonnées sur \mathbb{R}^3 seront modifiées de telle sorte que l'équation de l'hyperplan choisi pour être à l'infini soit $x_1 + x_2 + x_3 = 0$. On identifiera alors le reste du plan projectif à l'hyperplan $x_1 + x_2 + x_3 = 1$ de \mathbb{R}^3 .

Comme les droites ne sont pas concourantes par hypothèse, on peut trouver trois droites qui forment un vrai triangle. On va le choisir d'aire minimale. Notons l_1, l_2 et l_3 les droites formant ce triangle.

Par hypothèse, on a une CS, donc pour $i, j \in \{1, 2, 3\}$, disons $i < j$, on peut trouver une droite l_{ij} distincte de l_i et l_j mais qui passe par le point d'intersection de l_i et l_j .

On va ensuite montrer le :

Lemme 5.1. *L'un des 9 triangles :*

$$\begin{array}{ccc} l_{12}l_2l_3 & l_1l_{12}l_3 & l_1l_2l_{13} \\ l_{13}l_2l_3 & l_1l_{23}l_3 & l_1l_2l_{23} \\ l_1l_{12}l_{13} & l_{12}l_2l_{23} & l_{13}l_{23}l_3 \end{array}$$

possède une aire inférieure à celle de $l_1l_2l_3$, avec égalité si et seulement si :
$$\begin{cases} l_1 \parallel l_{23} \\ l_2 \parallel l_{13} \\ l_3 \parallel l_{12} \end{cases}$$

Remarque 5.2. Ce lemme peut être démontré dans une version plus faible n'utilisant que les triangles $l_1l_{12}l_{13}$, $l_{12}l_2l_{23}$ et $l_{13}l_{23}l_3$. Mais nous n'en aurons pas besoin ici. De plus, c'est la preuve de ce lemme qui va se généraliser.

Démonstration. Soient $P_1 = l_2 \cap l_3$, $P_2 = l_1 \cap l_3$ et $P_3 = l_1 \cap l_2$ les points d'intersection des droites l_1, l_2 et l_3 .

Quitte à faire un changement de coordonnées, comme les points P_1, P_2 et P_3 forment une base affine du plan (par cela nous entendons que les vecteurs $\vec{P_1P_2}$ et $\vec{P_1P_3}$ forment une base du plan), on peut supposer que les points P_i sont de coordonnées :

$P_1 = [1 : 0 : 0]$, $P_2 = [0 : 1 : 0]$ et $P_3 = [0 : 0 : 1]$. L'équation de la droite l_i est alors $\{x_i = 0\}$.

On peut alors écrire les équations des droites l_{ij} sous la forme : $\alpha x_i + \beta x_j = 0$ avec $\alpha, \beta \neq 0$ car l_{ij} n'est pas l'une des deux droites l_i, l_j . Donc on va poser $\alpha_{ij} = \frac{\alpha}{\beta}$.

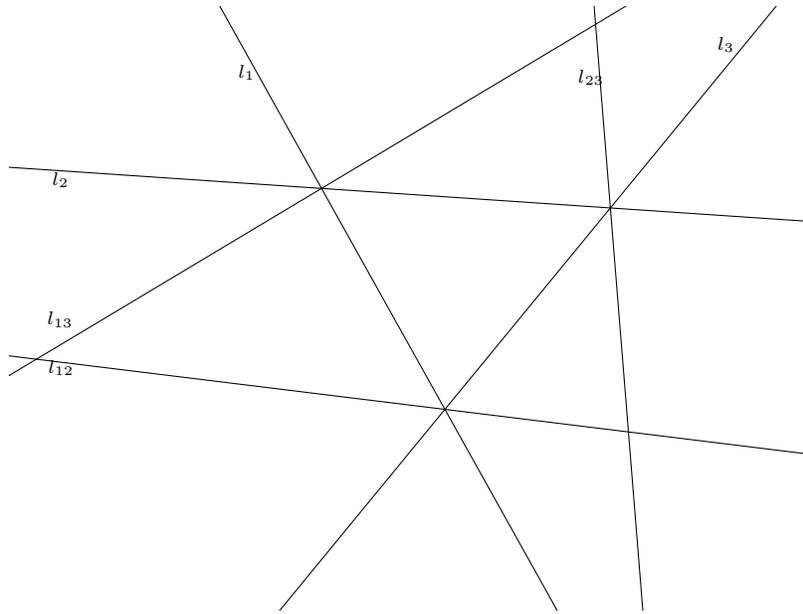


FIGURE 5 – Lemme 5.1

L'équation de l_{ij} se met donc sous la forme $\alpha_{ij}x_i + x_j = 0$.

Remarque : $\alpha_{ij} = 1 \iff l_{ij} \parallel l_k$
(Car si $\alpha_{ij} = 1$, $p = [x_1 : x_2 : x_3] \in l_{ij} \cap l_k \implies x_1 + x_2 + x_3 = 0$ ce qui est absurde car p doit appartenir à l'hyperplan affine $\sum x_i = 1$. Donc $l_{ij} \cap l_k = \emptyset$ donc les droites sont parallèles)

Considérons maintenant l'aire des triangles : Si le triangle est formé par les points P, Q et R écrits en coordonnées barycentriques, on définit l'aire du triangle par $|\det[P, Q, R]|$.

Remarque 5.3. En réalité, il faut multiplier par $\frac{\sqrt{3}}{2}$ mais la constante n'est pas importante, d'où notre définition.

D'autre part, si on change les coordonnées, on multiplie l'aire par un réel positif, et donc un triangle d'aire minimale est toujours d'aire minimale.

Considérons le triangle $l_1l_2l_3$, qui a pour sommets P'_1, P_2 et P_3 ,

avec $P'_1 = [(1 - \alpha_{12})^{-1} : -\alpha_{12}(1 - \alpha_{12})^{-1} : 0]$.

Donc $|\det[P'_1, P_2, P_3]| = |1 - \alpha_{12}|^{-1}$.

Donc pour que l'aire du triangle $l_1l_2l_3$ soit supérieure à celle du triangle $l_1l_2l_3$, il faut :

$$|1 - \alpha_{12}| \leq 1$$

De même avec l'aire du triangle $l_1l_2l_3$ de sommets : P''_1, P_2 et P_3 , avec

$P''_1 = [(1 - \alpha_{12} - \alpha_{13})^{-1} : -\alpha_{12}(1 - \alpha_{12} - \alpha_{13})^{-1} : 0]$. On obtient :

$$|1 - \alpha_{12} - \alpha_{13}| \leq 1$$

En permutant les indices et en posant $\alpha_{ji} = \alpha_{ij}$ pour $j > i$, on aboutit aux équations :

$$\alpha_{ij} = \alpha_{ji}^{-1} \tag{1}$$

$$|1 - \alpha_{ij}| \leq 1 \text{ pour } i \neq j \tag{2}$$

$$|1 - \alpha_{ij} - \alpha_{ik}| \leq 1 \text{ pour } i, j, k \text{ distincts} \tag{3}$$

Montrons que cela entraîne que les α_{ij} valent 1.

D'une part, on remarque que $|\alpha_{ij}| + |\alpha_{ji}| \geq 2$ avec égalité si et seulement si $|\alpha_{ij}| = |\alpha_{ji}| = 1$ (par étude de la fonction $x \mapsto x + \frac{1}{x}$). De plus, les α_{ij} sont positifs par (2). Donc

$$\sum_{i,j,i \neq j} \alpha_{ij} \geq 6$$

avec égalité si et seulement si tous les α_{ij} valent 1.

Mais par (3), $\alpha_{ij} + \alpha_{ik} \leq 2$ donc en sommant,

$$\sum_{i,j,i \neq j} \alpha_{ij} \leq 6$$

Donc tous les α_{ij} valent 1 et donc $l_{ij} \parallel l_k$ pour i, j, k distincts.

Ceci termine la preuve du lemme □

Pour le théorème, la minimalité entraîne que les droites l_1 et l_{23} sont parallèles par le lemme. Ce qui est impossible puisqu'on a plongé la configuration dans \mathbb{R}^2 de telle sorte à ne pas avoir de droites parallèles. Ceci finit la preuve du théorème de Sylvester-Gallai.

5.2 Cas complexe

Le but de cette partie est de démontrer un analogue complexe du théorème de Sylvester :

Théorème 5.4. *Dans \mathbb{C}^n , une configuration de Sylvester est incluse dans un plan.*

La preuve de ce théorème repose sur le lemme suivant :

Lemme 5.5. *Si $\alpha_{ij}, 1 \leq i, j \leq 4, i \neq j$ sont des complexes vérifiant :*

$$\begin{aligned} \alpha_{ij}\alpha_{ji} &= 1 & i, j \in \{1, 2, 3, 4\} \text{ distincts} \\ |1 - \alpha_{ij}| &\leq 1 & i, j \in \{1, 2, 3, 4\} \text{ distincts} \\ |1 - \alpha_{ij} - \alpha_{ik}| &\leq 1 & i, j, k \in \{1, 2, 3, 4\} \text{ distincts} \\ |1 - \alpha_{ij} - \alpha_{ik} - \alpha_{il}| &\leq 1 & i, j, k, l \in \{1, 2, 3, 4\} \text{ distincts} \end{aligned}$$

Alors on a, à permutation des indices près avec $\rho = e^{i\pi/3}$:

$$\begin{aligned} \alpha_{13} = \alpha_{31} = \alpha_{24} = \alpha_{42} &= 1 \\ \alpha_{12} = \alpha_{23} = \alpha_{34} = \alpha_{41} &= \rho \\ \alpha_{21} = \alpha_{32} = \alpha_{43} = \alpha_{14} &= \bar{\rho} \end{aligned}$$

L'idée de la démonstration du théorème suit la démonstration par les aires des triangles.

Démonstration. Par le même argument que dans le cas réel, on peut montrer le théorème pour \mathbb{C}^3 . On se place dans $\mathbb{C}P^3$ et on montre le théorème dual : aux points de la configuration de Sylvester sont associés des plans et aux droites des droites. Soit donc S une configuration de Sylvester duale dans $\mathbb{C}P^3$. On suppose par l'absurde que $\cap \Pi_i = \emptyset$, cela signifie que la configuration n'est pas contenue dans un plan. On décide que le plan à l'infini n'est pas dans S , et ne contient aucune droite d'intersection de plans de S . Ainsi, S ne contient pas de plans parallèles. Quitte à changer les coordonnées, on dit que l'équation du plan à l'infini est : $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0$.

On identifie alors $\mathbb{C}P^3$ privé de son plan à l'infini à l'hyperplan de \mathbb{C}^4 d'équation $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1$. Par hypothèse, S contient quatre plans $\Pi_1, \Pi_2, \Pi_3, \Pi_4$ d'intersection vide, qui forment un tétraèdre dont les sommets sont les

$$P_i := \bigcap_{j \neq i} \Pi_j$$

On définit le volume d'un tel tétraèdre par $|\det(P_1, P_2, P_3, P_4)|$, les coordonnées des P_i étant définies de manière unique par l'utilisation des coordonnées barycentriques. On choisit un tétraèdre de volume minimal dans S . Étant donné que les P_i forment une base affine de l'hyperplan affine $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1$,

sur lequel on travaille, on peut changer mes coordonnées pour que les P_i soient en fait de coordonnées $[0 : \dots : 1 : 0]$, le 1 étant sur la $i^{\text{ème}}$ composante. le plan Π_j a alors pour équation $x_j = 0$.

Pour $1 \leq j < k \leq 4$, on prend un plan Π_{jk} dans S tel que $\Pi_j \cap \Pi_k \subset \Pi_{jk}$ (S étant une configuration de Sylvester duale). L'équation de Π_{jk} peut se mettre sous la forme $\alpha x_j + \beta x_k = 0$, avec α et β non nuls, ce que l'on peut réécrire $\alpha_{jk} x_j + x_k = 0$ (On a donc $\alpha_{jk} \alpha_{kj} = 1$).

On compare les différents tétraèdres suivants à $\Pi_1 \Pi_2 \Pi_3 \Pi_4$:

- $\Pi_1 \Pi_{12} \Pi_3 \Pi_4$. Ses sommets sont $P'_1 = [(1 - \alpha_{12})^{-1}, -\alpha_{12}(1 - \alpha_{12})^{-1}, 0, 0]$ et P_2, P_3, P_4 , il est donc de volume $|(1 - \alpha_{12})^{-1}| \leq 1$. On obtient $|1 - \alpha_{12}| \geq 1$
 - $\Pi_1 \Pi_{12} \Pi_{13} \Pi_4$. On obtient $|1 - \alpha_{12} - \alpha_{13}| \geq 1$
 - $\Pi_1 \Pi_{12} \Pi_{13} \Pi_{14}$. On obtient $|1 - \alpha_{12} - \alpha_{13} - \alpha_{14}| \geq 1$
- On obtient donc, avec toutes les permutations des indices :

$$\begin{aligned} |1 - \alpha_{ij}| &\leq 1 & i, j \in \{1, 2, 3, 4\} \text{ distincts} \\ |1 - \alpha_{ij} - \alpha_{ik}| &\leq 1 & i, j, k \in \{1, 2, 3, 4\} \text{ distincts} \\ |1 - \alpha_{ij} - \alpha_{ik} - \alpha_{il}| &\leq 1 & i, j, k, l \in \{1, 2, 3, 4\} \text{ distincts} \end{aligned}$$

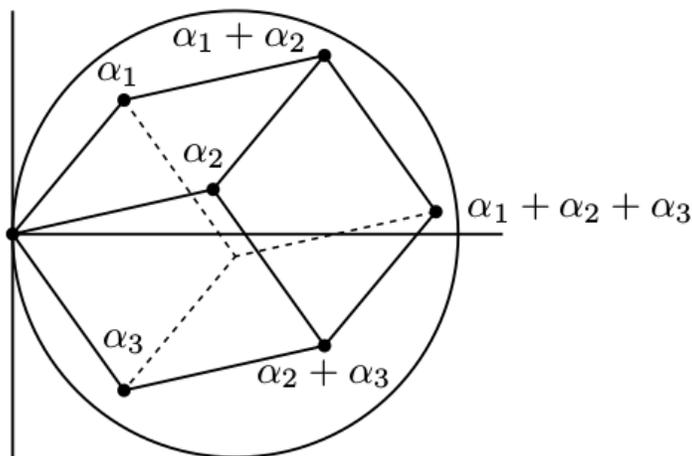
On conclut en utilisant le lemme 5.5, que $\alpha_{13} = \alpha_{24} = 1$, donc que Π_{13} et Π_{24} sont parallèles, ce qui est en contradiction avec le choix du plan à l'infini. \square

Il faut donc maintenant prouver le lemme 5.5.

Démonstration. Comme $\alpha_{ij} \alpha_{ji} = 1$, on a $|\alpha_{ij}| + |\alpha_{ji}| \geq 2$, et en sommant sur $i \neq j$:

$$\sum_{i \neq j} |\alpha_{ij}| \geq 12$$

Remarquons que, quitte à permuter les indices, $0, \alpha_{12}, \alpha_{12} + \alpha_{13}, \alpha_{12} + \alpha_{13} + \alpha_{14}, \alpha_{13} + \alpha_{14}, \alpha_{13}$ forment un hexagone inclus dans le disque de centre 1 et de rayon 1. Cet hexagone est de périmètre au plus 6,



avec égalité s'il est régulier, donc on obtient :

$$2 \sum_{j=2}^4 |\alpha_{1j}| \leq 6$$

En sommant les inégalités similaires obtenues avec les autres indices, on obtient :

$$\sum_{i \neq j} |\alpha_{ij}| \leq 12$$

On est donc dans le cas d'égalité, et on a les égalités annoncées. \square

5.3 Cas des quaternions

Dans le cas des quaternions, [EPS] présente encore une généralisation de la preuve, basée sur un autre lemme technique. Il arrive à la conclusion que :

Théorème 5.6. *Toute configuration de Sylvester sur un \mathbb{H} espace vectoriel est contenue dans un sous espace de dimension 3 (sur \mathbb{H})*

(Nous renvoyons à l'article en question pour la preuve)

Il ajoute cependant qu'il ne sait pas si le résultat est optimal, c'est à dire si l'on peut réduire à la dimension 2 dans le théorème. Nous nous sommes alors demandés ce qui tomberait en défaut si l'on voulait adapter la preuve dans le cas complexe au cas des quaternions en dimension 2.

Nous allons donc essayer de comprendre ce qui ne marcherait pas si l'on voulait adapter la preuve complexe au cas des quaternions.

Dans la suite, on représentera les quaternions sous la forme $\alpha = a + bi + cj + dk$. Par définition, la partie réelle de α est $\Re(\alpha) = a \in \mathbb{R}$ est sa partie imaginaire est $\Im(\alpha) = \alpha - \Re(\alpha)$, qui est un quaternion que l'on peut représenter comme un vecteur $\vec{v} = (b, c, d) \in \mathbb{R}^3$. Ainsi, $\alpha = a + \vec{v}$.

α est dit **imaginaire pur** lorsque sa partie réelle est nulle. On définit le conjugué de α par $\bar{\alpha} = \Re(\alpha) - \Im(\alpha) = a - \vec{v}$ La norme de α est définie par $|\alpha| = \alpha\bar{\alpha} = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2 + d^2}$. Pour plus de détails, nous renvoyons au chapitre VII. de [H2G2].

Dans le cas des quaternions, l'anticommutativité fait que le déterminant est mal défini. On va pouvoir pallier à ce problème en utilisant la représentation matricielle complexe d'un quaternion.

Proposition 5.7. *L'application*

$$\Psi : \begin{cases} \mathbb{H} \rightarrow \mathcal{M}_2(\mathbb{C}) \\ \alpha = a + bi + cj + dk = a + bi + (c + di)j \mapsto \begin{pmatrix} a + bi & -c + di \\ c + di & a - bi \end{pmatrix} \end{cases}$$

est un morphisme d'anneaux.

Les calculs sont laissés à la discrétion du lecteur.

À partir de cette représentation, on peut définir :

Définition 5.8. Soit $A \in M_n(\mathbb{H})$ une matrice dont les coefficients sont des quaternions. Le **déterminant d'étude** de A est le déterminant de la matrice $A_{\mathbb{C}} \in M_{2n}(\mathbb{C})$ définie comme la matrice complexe de taille $2n$ obtenue en remplaçant chaque quaternion par sa représentation matricielle. On le note $Sdet(A)$.

Proposition 5.9. $Sdet(AB) = Sdet(A)Sdet(B)$
 $Sdet(A) \geq 0$ avec $Sdet(A) > 0 \iff A$ est inversible.

Pour une présentation plus détaillée du déterminant d'étude, nous renvoyons à [Asl].

En considérant non pas le déterminant mais le déterminant d'étude, on peut continuer la preuve jusqu'à l'énoncé du lemme 5.3, cette fois écrit pour des quaternions.

Il est facile voir que le lemme 5.5, écrit pour les quaternions, est faux. Il suffit par exemple de remplacer ρ par $\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}j = e^{j\pi/3}$ pour obtenir un contre exemple. Plus généralement, si α est un quaternion imaginaire pur, c'est à dire de partie réelle nulle, avec $|\alpha| = 1$ alors on obtient un contre exemple en remplaçant ρ par $\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\alpha = e^{\alpha\pi/3}$.

Cependant, ce contre exemple n'est pas satisfaisant, car on a toujours, après permutation des indices $\alpha_{13} = \alpha_{24} = 1$ et les plans Π_{13} et Π_{24} sont toujours parallèles, donc on arrive quand même à conclure la preuve. On se pose donc la :

Question 5.10. Si α_{ij} , $1 \leq i, j \leq 4, i \neq j$ sont des quaternions vérifiant :

$$\begin{aligned} \alpha_{ij}\alpha_{ji} &= 1 & i, j \in \{1, 2, 3, 4\} \text{ distincts} \\ |1 - \alpha_{ij}| &\leq 1 & i, j \in \{1, 2, 3, 4\} \text{ distincts} \\ |1 - \alpha_{ij} - \alpha_{ik}| &\leq 1 & i, j, k \in \{1, 2, 3, 4\} \text{ distincts} \\ |1 - \alpha_{ij} - \alpha_{ik} - \alpha_{il}| &\leq 1 & i, j, k, l \in \{1, 2, 3, 4\} \text{ distincts} \end{aligned}$$

A-t'on, à permutation des indices près, $\alpha_{13} = \alpha_{31} = \alpha_{24} = \alpha_{42} = 1$?

Trouver un contre exemple à ce lemme montre que l'on ne peut faire la même preuve pour les quaternions. Cependant, une fois trouvé ce contre exemple, s'il existe, cela ne nous permettra pas de construire directement un exemple de configuration de Sylvester dans $\mathbb{H}\mathbb{P}^3$.

Une piste intéressante peut être le lemme :

Lemme 5.11. *Si α_{ij} , $1 \leq i, j \leq 5, i \neq j$ sont des quaternions vérifiant :*

$$\begin{aligned} \alpha_{ij}\alpha_{ji} &= 1 & i, j \in \{1, 2, 3, 4, 5\} \text{ distincts} \\ |1 - \alpha_{ij}| &\leq 1 & i, j \in \{1, 2, 3, 4, 5\} \text{ distincts} \\ |1 - \alpha_{ij} - \alpha_{ik}| &\leq 1 & i, j, k \in \{1, 2, 3, 4, 5\} \text{ distincts} \\ |1 - \alpha_{ij} - \alpha_{ik} - \alpha_{il}| &\leq 1 & i, j, k, l \in \{1, 2, 3, 4, 5\} \text{ distincts} \\ |1 - \alpha_{ij} - \alpha_{ik} - \alpha_{il} - \alpha_{im}| &\leq 1 & i, j, k, l, m \in \{1, 2, 3, 4, 5\} \text{ distincts} \end{aligned}$$

Alors on a, $\forall p, q, p \neq q, \alpha_{ij} = \frac{1}{2} + \vec{v}_{ij}$, où les \vec{v}_{ij} vérifient :

$$\langle \vec{v}_{ij}, \vec{v}_{ik} \rangle = -\frac{1}{4} \text{ si } j \neq k \quad (4)$$

$$\langle \vec{v}_{ij}, \vec{v}_{ij} \rangle = \frac{3}{4} \quad (5)$$

$$\vec{v}_{ij} = -\vec{v}_{ji} \quad (6)$$

Autrement dit, les vecteurs $\vec{v}_{ij}, 1 \leq j \leq 5, j \neq i$ avec i fixé, forment les sommets d'un tétraèdre centré en 0 inscrit dans le cercle de rayon $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

De plus, toutes les inégalités deviennent des égalités.

Ce lemme est démontré dans [EPS], il est utilisé pour prouver le théorème 5.6.

Ainsi, si l'on prend des $\alpha_{ij}, 1 \leq i, j \leq 5, i \neq j$ qui vérifient les conditions du lemme 5.11, alors en se restreignant aux indices 1 à 4, on obtiendra un contre exemple au lemme 5.10. En effet, tous les quaternions α_{ij} donnés par le lemme 5.11 sont de partie réelle $\frac{1}{2}$, donc différents de 1.

Cependant, toutes ces conditions sur les tétraèdres font que l'exemple est assez rigide. En fait, on va voir que l'on ne peut pas construire de famille (\vec{v}_{ij}) vérifiant les conditions (4), (5) et (6). On va donc raffiner le lemme 5.11 en démontrant le :

Lemme 5.12. *Il n'existe pas de $\alpha_{ij}, 1 \leq i, j \leq 5, i \neq j$ quaternions vérifiant :*

$$\begin{aligned} \alpha_{ij}\alpha_{ji} &= 1 & i, j \in \{1, 2, 3, 4, 5\} \text{ distincts} \\ |1 - \alpha_{ij}| &\leq 1 & i, j \in \{1, 2, 3, 4, 5\} \text{ distincts} \\ |1 - \alpha_{ij} - \alpha_{ik}| &\leq 1 & i, j, k \in \{1, 2, 3, 4, 5\} \text{ distincts} \\ |1 - \alpha_{ij} - \alpha_{ik} - \alpha_{il}| &\leq 1 & i, j, k, l \in \{1, 2, 3, 4, 5\} \text{ distincts} \\ |1 - \alpha_{ij} - \alpha_{ik} - \alpha_{il} - \alpha_{im}| &\leq 1 & i, j, k, l, m \in \{1, 2, 3, 4, 5\} \text{ distincts} \end{aligned}$$

Démonstration. Nous allons essayer de construire (\vec{v}_{ij}) vérifiant les conditions (4), (5) et (6). Commençons par construire les \vec{v}_{1j} . Ils forment un tétraèdre donc quitte à faire une rotation, et à permuter les indices 4 et 5, on peut supposer que :

$$\begin{aligned} \vec{v}_{12} &= \frac{\sqrt{3}}{2}i \\ \vec{v}_{13} &= -\frac{1}{2\sqrt{3}}i + \sqrt{\frac{2}{3}}j \\ \vec{v}_{14} &= -\frac{1}{2\sqrt{3}}i + \sqrt{\frac{2}{3}}e^{i2\pi/3}j \\ \vec{v}_{15} &= -\frac{1}{2\sqrt{3}}i + \sqrt{\frac{2}{3}}e^{-i2\pi/3}j \end{aligned}$$

Cela donne aussi, comme $\vec{v}_{21} = -\vec{v}_{12} = -\frac{\sqrt{3}}{2}i$: Or, un tétraèdre dont un sommet est donné par \vec{v}_{21} est de la forme

$$\vec{v}_{23} = \frac{1}{2\sqrt{3}}i + \sqrt{\frac{2}{3}}e^{i\theta}j$$

$$\{\vec{v}_{24}, \vec{v}_{25}\} = \left\{ \frac{1}{2\sqrt{3}}i + \sqrt{\frac{2}{3}}e^{i(\theta+2\pi/3)}j, \frac{1}{2\sqrt{3}}i + \sqrt{\frac{2}{3}}e^{i(\theta-2\pi/3)}j \right\}$$

θ est un angle, disons entre 0 et 2π .

On a alors les relations, compte tenu des inverses.

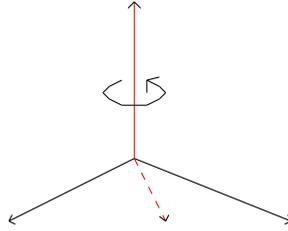
$$\vec{v}_{31} = \frac{1}{2\sqrt{3}}i - \sqrt{\frac{2}{3}}j$$

$$\vec{v}_{32} = -\frac{1}{2\sqrt{3}}i - \sqrt{\frac{2}{3}}e^{i\theta}j$$

Pour que l'on puisse compléter $\vec{v}_{31}, \vec{v}_{32}$, en un tétraèdre régulier, il faut que $\langle \vec{v}_{31}, \vec{v}_{32} \rangle = -\frac{1}{4}$. Le

calcul donne la condition $\boxed{\cos(\theta) = -\frac{1}{4}}$.

On peut alors compléter $\vec{v}_{31}, \vec{v}_{32}$, en un tétraèdre régulier. pour exprimer les deux sommets restants, les calculer explicitement demandant de beaucoup de travail, on va plutôt considérer que les deux autres vecteurs sont en fait obtenus par rotation d'un vecteur autour de l'axe donné par l'autre vecteur, d'angles $\frac{2\pi}{3}$ et $-\frac{2\pi}{3}$.



Cela donne, compte tenu de la, proposition, prouvée dans [Vic]

Proposition 5.13. *Si \vec{u} est un quaternion imaginaire pur de norme 1 (que l'on voit comme un vecteur unitaire), la rotation d'axe orienté \vec{u} et d'angle α est donnée par la conjugaison par le quaternion :*

$$q = \cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) + \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)\vec{u}$$

Ici, le calcul donne que la rotation d'axe \vec{v}_{31} et d'angle $\frac{2\pi}{3}$ est donné par le conjugaison par $q = \frac{1}{2} + \frac{1}{\|\vec{v}_{31}\|}\vec{v}_{31} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{1}{2} + \vec{v}_{31} = \alpha_{31}$ Ainsi,

$$\{\vec{v}_{34}, \vec{v}_{35}\} = \{\alpha_{31}\vec{v}_{32}\alpha_{13}, \alpha_{13}\vec{v}_{32}\alpha_{31}\}$$

Ensuite,

$$\vec{v}_{41} = \frac{1}{2\sqrt{3}}i - \sqrt{\frac{2}{3}}e^{i2\pi/3}j$$

Il va falloir choisir α_{42} de telle sorte à ce que $\langle \vec{v}_{41}, \vec{v}_{42} \rangle = -\frac{1}{4}$. On obtient alors, sachant que $\vec{v}_{42} = -\vec{v}_{24}$, et qu'ainsi, il n'y a que deux possibilités à tester que

$$\vec{v}_{42} = -\frac{1}{2\sqrt{3}}i - \sqrt{\frac{2}{3}}e^{i(\theta+2\pi/3)}j$$

(Il faut simplement calculer le produit scalaire en se remémorant $\cos(\theta) = -\frac{1}{4}$)
Et donc,

$$\vec{v}_{24} = \frac{1}{2\sqrt{3}}i + \sqrt{\frac{2}{3}}e^{i(\theta+2\pi/3)}j$$

$$\vec{v}_{25} = \frac{1}{2\sqrt{3}}i + \sqrt{\frac{2}{3}}e^{i(\theta-2\pi/3)}j$$

On détermine ensuite $\vec{v}_{43} = -\vec{v}_{34}$ pour lequel il y a donc deux possibilités. Il faut que

$$\langle \vec{v}_{41}, \vec{v}_{43} \rangle = -\frac{1}{4}$$

$$\langle \vec{v}_{42}, \vec{v}_{43} \rangle = -\frac{1}{4}$$

Cas 1 : $\vec{v}_{34} = \alpha_{31}\vec{v}_{32}\alpha_{13}$ Alors

$$\begin{aligned} \langle \vec{v}_{41}, \vec{v}_{43} \rangle &= \langle \vec{v}_{14}, \vec{v}_{34} \rangle \\ &= \langle \vec{v}_{14}, \alpha_{31}\vec{v}_{32}\alpha_{13} \rangle \\ &= \langle \alpha_{13}\vec{v}_{14}\alpha_{31}, \vec{v}_{32} \rangle \end{aligned}$$

car $\vec{u} \mapsto \alpha_{31}\vec{u}\alpha_{13}$ est une rotation donc préserve le produit scalaire. Et $\alpha_{13} = \alpha_{31}^{-1}$
Or $\alpha_{13}\vec{v}_{14}\alpha_{31}$ est le vecteur obtenu par rotation d'un angle $\frac{2\pi}{3}$ autour de l'axe orienté \vec{v}_{13} . Ainsi, c'est \vec{v}_{12} .

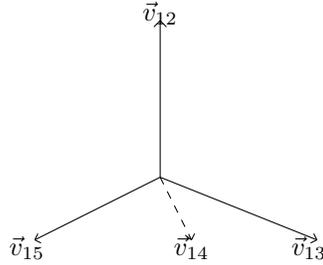


FIGURE 6 – Le tétraèdre avec l'indice $i = 1$ fixé

Donc $\langle \vec{v}_{41}, \vec{v}_{43} \rangle = \langle \vec{v}_{12}, \vec{v}_{32} \rangle = -\frac{1}{4}$.
Ensuite, on remarque que $\alpha_{23}\vec{v}_{31}\alpha_{32} = \alpha_{31}\vec{v}_{32}\alpha_{13}$.

$$\begin{aligned} \langle \vec{v}_{42}, \vec{v}_{43} \rangle &= \langle \vec{v}_{24}, \vec{v}_{34} \rangle \\ &= \langle \vec{v}_{24}, \alpha_{23}\vec{v}_{31}\alpha_{32} \rangle \\ &= \langle \alpha_{32}\vec{v}_{24}\alpha_{32}, \vec{v}_{31} \rangle \end{aligned}$$

Or $\alpha_{32}\vec{v}_{24}\alpha_{32} = \vec{v}_{25}$, et le calcul montre que $\langle \vec{v}_{25}, \vec{v}_{31} \rangle \neq -\frac{1}{4}$. Donc ce n'est pas possible.

Cas 2 : $\vec{v}_{34} = \alpha_{13}\vec{v}_{32}\alpha_{31}$ Alors

$$\begin{aligned} \langle \vec{v}_{41}, \vec{v}_{43} \rangle &= \langle \vec{v}_{14}, \vec{v}_{34} \rangle \\ &= \langle \vec{v}_{14}, \alpha_{13}\vec{v}_{32}\alpha_{31} \rangle \\ &= \langle \alpha_{31}\vec{v}_{14}\alpha_{13}, \vec{v}_{32} \rangle \end{aligned}$$

Or $\alpha_{31}\vec{v}_{14}\alpha_{13} = \vec{v}_{15}$ et $\langle \vec{v}_{15}, \vec{v}_{32} \rangle \neq -\frac{1}{4}$.
Donc ce n'est pas possible. □

Ce résultat est certes sympathique, car il a le mérite de raccourcir la preuve donnée dans [EPS], mais il ne nous aide pas dans la recherche du contre exemple.

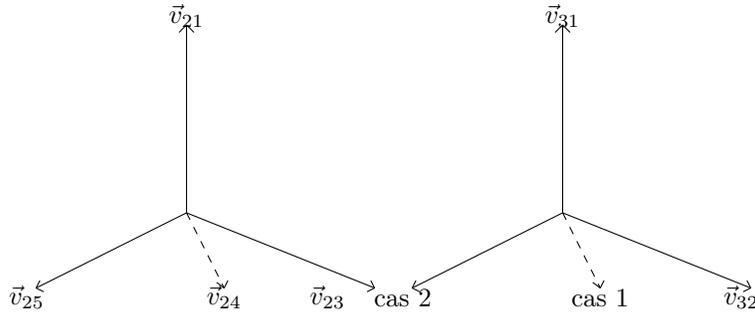


FIGURE 7 – Les tétraèdres pour les indices 2 et 3 fixés

Une autre idée pour trouver un contre exemple est de s’inspirer de l’exemple obtenu par le même lemme dans le cas des complexes et de le modifier un peu. Celle-ci ne sera pas développée ici. À notre connaissance, cela est de l’ordre de la question ouverte.

L’étape suivante sera alors de trouver un contre exemple de le cas de $\mathbb{H}\mathbb{P}^3$, ou de démontrer qu’il n’y en a pas. Cette question est encore ouverte.

Références

- [Als] H. ASLAKSEN, *Quaternionic determinants*, Math. Intelligencer 18 (1996), no. 3, 57–65.
- [BoZ] L. BOUTIER, M. ZAIDENBERG, *Autour du problème de Sylvester* APMEP, Bulletin No.475, 2012.
- [Ber] BERGER, Marcel, *Géométrie vivante*, Cassini, 2009.
- [H2G2] P. CALDÉRO, J. GERMONI, *Histoires hédonistes de groupes et de géométries*, Tome premier, Chapitre VII, Calvage & Mounet, 2013
- [Cox] H.S.M COXETER, *Introduction to geometry*. Wiley, 1989, p. 181.
- [Dol] DOLGATCHEV, *Abstract configurations in algebraic geometry*
- [EPS] Noam ELKIES, Lou M. PRETORIUS, Konrad J. SWANEPOEL. *Sylvester-Gallai theorems for complex numbers and quaternions*, 2006
- [Erd] P. ERDOS, Problem 4065, Amer, Math. Monthly **50**, 1943
- [Fis] FISCHER, Gerd, *Planes algebraic curves* American mathematical society, 2000
- [Hir] F. HIRZEBRUCH, *Arrangements of lines and algebraic surfaces in arithmetics and geometry*, 1983, Vol.2, pp 113-140.
- [Kel] L. M. KELLY, *A resolution of the Sylvester-Gallai problem of J-P. Serre*, Discrete comput. geom. , 1986, pp 101-104.
- [Kel2] L.M.KELLY, S. NWANKPA, *Affine embeddings of Sylvester-Gallai Designs*, Journal of combinatorial theory, 1973.
- [Ser] J-P. SERRE. Problem 5359, Amer, Math, Monthly **73**, 1966, 89
- [Syl] J.J. SYLVESTER, *Educational times* 46, No 383, 1893.
- [Vic] L. VICCI, *Quaternions and Rotations in 3-Space : The Algebra and its Geometric Interpretation*, 2001