L'évolution supprime-t-elle les comportements irrationnels ?

Charles Collot et Jonas Moreno

Sous la direction de Yannick Viossat

ENS 2010-2011

Table des matières

1 Introduction et notations

Introduction :

On considère un jeu dans lequel une population joue contre elle même, composé d'un ensemble fini de stratégies. On s'intéresse à la proportion de la population qui joue chaque stratégie. A une répartition des stratégie fixée, pour chaque stratégie i un gain (positif ou négatif) est donné aux joueurs ayant joué cette stratégie i. Les joueurs vont changer de stratégie au cours du temps, pour en général essayer d'optimiser leurs gains. Ces changement sont vont donc induire dynamique sur la répartition des stratégies au sein de la population.
Que peut-on attendre du comportement global de la population ? Si les joueurs avaient une connaissance parfaite du jeu, et donc des paiements, ainsi que de la répartition des stratégies dans la population, il semble normal d'exiger que ceux-ci jouent toujours les stratégies qui rapportent le plus. Pourtant, les joueurs peuvent également ne pas avoir assez d'information et choisir des stratégies qui, à un instant donné, rapportent plus que leurs stratégies actuelles, mais qui ne soient pas un choix optimal. On constate que plusieurs types de dynamiques sont à envisager pour modéliser le comportement de la population. Un postulat de rationalité de base serait le suivant : si dans tous les cas, une stratégie i gagne toujours moins qu'une stratégie j, alors il vaut mieux ne jamais jouer j. Ce sera l'objet de notre étude. Nous essaierons de voir quelles dynamiques raisonnables sont aptes à éliminer de telles stratégies strictement dominées, et quelles ne le sont pas toujours. Nous constaterons que les deux cas se présentent pour des dynamiques fréquemment utilisées en économie et en biologie.

Notations :

On notera S l'ensemble des stratégies (assimilé à $[| \ 1; n \ |]$. Pour x$\in \mathbb{R}_+^n$, x_i représente la proportion de la population qui joue la stratégie i.
Lors d'un jeu à deux joueurs, on peut voir x_i comme la probabilité que le joueur 1 joue la stratégie i. Dans ce cas on parle de stratégie pure s'il n'y a qu'un i tel que $x_i = 1$, et donc tous les autres sont nuls : ceci est un cadre plus concret que celui des stratégies mixtes où le joueur joue telle ou telle stratégie avec une certaine probabilité.
La somme des proportions fait 1 i.e $\sum_{i \in S} x_i = 1$: on introduit donc
$X = \{x \in \mathbb{R}_+^n \mid \sum_{i \in S} x_i = 1\}$
La fonction de gain sera notée F : $X \rightarrow \mathbb{R}^n$. $F_i(x)$ représente ce que gagne un joueur ayant la stratégie i la répartition de toutes les stratégies étant connue. La fonction F est lipschitzienne : la continuité de F est naturelle, car lors d'un jeu les gains suivent des règles ; si peu de joueurs changent de stratégies, il est normal que les gains varient peu. On introduit alors $\bar{F}(x) = \sum_{i \in S} x_i F_i(x)$ le gain moyen de la population.

On introduit aussi $B^F(x) = \{y \in X \mid \ {}^t yF(x)\, soit\, maximal\}$ l'ensemble des meilleures réponses à x.
On dit qu'une stratégie i est strictement dominée si et seulement si $\exists y \in X \mid \forall x \in X \ F_i(x) < \ {}^t yF(x)$. Cela signifie qu'il existe une stratégie y qui gagne toujours strictement plus que la stratégie i.
Supposons que T soit l'ensemble des stratégies strictement dominées dans S. Alors, si personne parmi la population ne joue de stratégie appartenant à T, on peut considérer que la population joue à un nouveau jeu où l'ensemble des stratégies est $S-T$. De nouvelles stratégies strictement dominées peuvent alors apparaître ! On peut donc les supprimer du jeu et effectuer à nouveau le même raisonnement. En itérant, on obtient un ensemble de stratégie pures Z qui ne soient pas strictement dominées. On dit alors qu'une stratégie est strictement dominée de manière itérée si elle ne survit pas à ce processus d'élimination.

Exemple de gain :

Lors d'un jeu à 2 joueurs, pour $A \in M_n(\mathbb{R})$ en prenant comme fonction de gain F(x)=Ax, A_{ij} représente le gain du joueur 1 lorsqu'il joue i et que le joueur 2 joue j. On peut alors considérer qu'un joueur dans la population est amené à chaque instant à jouer contre un autre membre de la population choisi au hasard et considérer l'espérance de gain qu'il reçoit.

Evolution de la répartition des stratégies :

La répartition des stratégies suit la dynamique suivante : $\dot{x} = V^F(x)$ où $V^F : X \to \mathbb{R}$ est une fonction dépendant des gains et de l'état actuel de la population.

Exemples :

fonction d'accroissement :
Soit g : $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$
$g_i(\pi, x)$ représente l'augmentation de la proportion de gens qui jouent i étant connus la répartition et le gain actuels (x et π).
On impose :
$-\sum_{i\in S} g_i(\pi, x) = 0$ (la population totale restant constante, l'ensemble des variations se compensent)
$-x_i = 0 \Rightarrow g_i(\pi, x) = 0$ (si personne ne joue i, on ne peut pas avoir de joueurs qui arrêtent de jouer i)
On prend alors $V^F(x) = g(F(x), x)$

protocole de révision :
$\rho : \mathbb{R}^n \times X \to M_n(\mathbb{R}^+)$
Etant connu le gain π et la répartition des stratégies x, on a une matrice $\rho(\pi, x)$ que nous noterons simplement ρ avec ρ_{ij} qui représente la probabilité pour un joueur jouant i de passer à la stratégie j.
On considère donc que la proportion de joueurs quittant la stratégie i pour la j est $x_i \rho_{ij}$
Alors la proportion de joueurs qui arrêtent de jouer i est $\sum_{j \in S} x_i \rho_{ij}$ et celle des joueurs commençant à jouer i est $\sum_{j \in S} x_j \rho_{ji}$ d'où $\dot{x}_i = \sum_{j \in S} x_j \rho_{ji} - \sum_{j \in S} x_i \rho_{ij}$

Exemples de protocoles :

Réplicateur : $\rho_{ij} = x_j [F_j - F_i]_+$. Pour passer de la stratégie i à la j on s'intéresse à deux facteurs ; est ce que beaucoup de gens jouent j ? (premier terme du produit) et est ce que j rapporte plus que ce que je joue (deuxième terme du produit)
$\dot{x_i} = \sum_{j \in S} x_j x_i [F_i - F_j]_+ - x_i \sum_{j \in S} x_j [F_j - F_i]_+$
$= x_i \sum_{j \in S} ([F_i - F_j]_+ - [F_j - F_i]_+)$
$= x_i \sum_{j \in S} x_j (F_i - F_j) = x_i (F_i - \bar{F})$

BNN (Brown, Von Neumann et Nash) : $\rho_{ij} = [F_j - \bar{F}]_+$. Pour passer de la stratégie i à la stratégie j on regarde si la stratégie j rapporte plus que la moyenne.
$\dot{x_i} = \sum_{j \in S} x_j [F_i - \bar{F}]_+ - x_i \sum_{j \in S} [F_j - \bar{F}]_+$
$= [F_i - \bar{F}]_+ - x_i \sum_{j \in S} [F_j - \bar{F}]_+$

2 Elimination de stratégies strictement dominées

Quelles sont les sortes de dynamiques d'évolution qui permettent une élimination des stratégies strictement dominées, et, plus fort encore, des stratégies strictement dominées par itérations ? Nous ne présenterons pas ici une caractérisation de telles dynamiques, mais montrerons que cette propriété est vraie pour une large classe de dynamiques évolutives, contenant notamment la dynamique des réplicateurs. Nous prévenons le lecteur que les preuves de cette partie seront pour l'essentiel calculatoires.

Définition :

On dit que la dynamique est convexe monotone si :
Le taux d'accroissement d'une stratégie i est proportionnel à la proportion de la population qui la joue : $V_i^F(x) = x_i g_i^F(x)$ où g^F est telle que V^F soit lipschitzienne et $\sum_1^n V_i^F(x) = 0$.
pour toute stratégie mixte z et pour toute stratégie pure e_i l'on a :
$\langle z, F(x)\rangle > F_i(x) \Rightarrow \langle z, g^F(x)\rangle > g_i^F(x)$ (où $\langle \cdot, \cdot\rangle$ désigne le produit scalaire usuel).

Remarque :

Pourquoi prendre des dynamiques de la forme $V_i^F = x_i g_i^F(x)$? En fait, étant donné une dynamique standard V^F, la condition pour qu'elle s'écrive sous la forme précédente est simplement le fait que la fonction $\frac{V_i^F(x)}{x_i}$ puisse être prolongée par continuité jusqu'au bord. En d'autre termes, que la limite $lim_{x\to x_0}\frac{V_i^F(x)}{x_i}$ existe pour tout point x_0 tel que $x_{0,i} = 0$ et soit continue sur la face $\{x_i = 0\}$. Cela impose donc notamment que $V_i^F(x) = 0$ dès que $x_i = 0$. Cela est important car signifie que les joueurs ne peuvent pas innover avec ce type de dynamiques, de nouvelles stratégies n'apparaissent jamais.
Attention, nous commettons ici un abus des notations introduites car, plus tôt, nous avions posé $V^F(x) = g(F(x), x)$. Nous abandonnons donc cette notation que nous reprendrons plus tard.
Que représente g^F ? Considérons l'exemple donné par la dynamique des réplicateurs. $g_i(x) = F_i(x) - \bar{F}(x)$ représente la forme (le "fitness") des joueurs jouant la stratégie i, vis à vis de la moyenne. Dans la suite de cette partie, nous noterons g pour plus de simplicité, mais il ne faut pas oublier que $g^F(x) = g(F(x), (x))$ dépend du paiement, c'est-à-dire du jeu auquel on joue.
La seconde condition signifie que si une stratégie mixte gagne plus qu'une stratégie pure, son "fitness" est plus important. En prenant $z = e_j$, cela veut dire que la stratégie j "se répand" plus vite que la stratégie i.

Il y a plusieurs motivations à étudier de telles dynamiques. Tout d'abord, elles ne sont pas absurdes, car utilisées en modélisation en économie et en biologie (la dynamique des réplicateurs notamment). De plus, elles vont permettre d'éliminer les stratégies strictement dominées de manière itérée, comme le montre le théorème suivant :

Théorème :

Soit j une stratégie strictement dominée de manière itérée. Alors, sous toute dynamique convexe monotone, pour tout état initial x^0 du système qui soit dans l'intérieur de X (c'est-à-dire $x_i^0 > 0 \, \forall i$), on a :
$\phi(t, x^0)_j \to 0$ (la j-ième stratégie s'éteint).

Preuve :

Nous allons en premier prouver que toute stratégie strictement dominée (dans l'ensemble des stratégies initiales S) va s'éteindre de manière exponentielle. L'uniformité de la vitesse d'extinction permettra en second lieu de montrer que toute stratégie strictement dominée de manière itérée est amenée à disparaître.

On suppose que la stratégie j est strictement dominée par une stratégie mixte h. Le but est de majorer $\phi(t, x^0)_j$ par une fonction tendant vers 0. On considère donc la fonction suivante :
$f(x) = x_j \prod_1^n x_i^{h_i}$

On simplifie les notations pour faciliter la compréhension du calcul. On ne marquera plus la dépendance en les variables des fonctions, et $x = \phi(t, x^0)$.
La dérivée de f le long d'une trajectoire est donnée par :

$\frac{\partial(f(\phi(t,x_0))}{\partial t} = \langle \nabla f(\phi(t, x_0)), \dot{\phi}(t, x_0) \rangle$
$= -\sum_{i,i\neq h}^n \dot{x}_i x_j h_i x_i^{-h_i - 1} \prod_{k\neq i} x_k^{-y_k} + (1 - h_j)\dot{x}_j x_j^{-h_j} \prod_{k\neq j} x_k^{-y_k}$
$= x_j \prod_1^n x_i^{\prime -h_i(\sum_{i=1,i\neq j}^n h_i g_i + (1-h_j) g_j)}$
$= f(x)\langle (e_j - h), g(x) \rangle$

(il se peut très bien que pour un i, $h_i = 0$ auquel cas le calcul effectué plus haut n'est plus valide, mais le résultat final reste vrai.
Or $\langle (e_j - h), g(x) \rangle < 0$ et par continuité, il existe $\delta_j > 0$ tel que, $\forall x \in X$, $\langle (e_j - h), g(x) \rangle < -\delta_j$. D'où $f(x) \leq f(x_0) e^{-\delta_j t}$. De plus, f est continue, donc atteint son maximum sur le compact X. Il existe donc $C_j > 0$ tel que :
$\forall x_0 \in \mathring{X}$, $f(x) \leq C_j e^{-\delta_j t}$.
De plus, $x_j = f(x) \prod x_k^{h_k}$, avec le terme de droite plus petit que 1. D'où $x_j(t) \leq f(x) \leq C_j e^{-\delta_j t}$ On a donc $x_j \to 0$ de manière exponentielle.

Généralisons maintenant ce résultat. Soit T l'ensemble des stratégies strictement dominées dans S. T est fini, donc en prenant pour δ la plus petite valeur des δ_j où j est strictement dominée, et pour C la plus grande des C_j on obtient : $\forall j \in T$, $x_j \leq Ce^{-\delta t}$.

Soit maintenant $S' = S \setminus T$ l'ensemble des stratégies survivantes. Soit T' l'ensemble des stratégies strictement dominées dans ce nouveau jeu. On va essayer de montrer le même résultat pour les stratégies $j' \in T'$.
Soit $j' \in T'$ dominée strictement par une stratégie h' dans ce nouveau jeu. On sait que $\langle e_{j'-h'}, g(x) \rangle < 0$ sur X' l'enveloppe convexe de S' (X' étant le nouvel ensemble des états possibles dans le jeu où seules les stratégies de S' sont autorisées). Par continuité de g, il existe donc un voisinage $V_{j'}$ de X' tel que, $\forall x \in V_{j'}$ $\langle e_{j'-h'}, g(x) \rangle < \delta_{j'}$. On a donc par les mêmes arguments que précédemment, $x_{j'}(t) \leq C_{j'} e^{-\delta_{j'} t}$ pour toutes les trajectoires partant de $x'_0 \in V_{j'} \setminus \partial X$.
De même, en choisissant δ' comme la plus petite des constantes $\delta_{j'}$ et C' comme la plus grande des constantes $C_{j'}$, et en posant $V' = \bigcap V_{j'}$, on a :

$\forall j' \in T'$, $x_{j'} \leq C' e^{-\delta' t}$ pour l'ensemble des trajectoires partant de $V' \setminus \partial X$.

La démonstration est presque terminée, il suffit de montrer qu'en partant de l'intérieur de X, on ne peut arriver en temps fini sur le bord. Soit $i \in S$. V^F est lipschitzienne et $V_i^F(x) = 0$ si $x_i = 0$ (on rappelle que pour les dynamiques considérées, V_i^F est proportionnelle à x_i). Il s'en suit donc qu'il existe une constante K strictement positive telle que : $\dot{x}_i = V_i^F(x) \geq -Kx_i$ d'où $x_i \geq x_{0,i} e^{-Kt}$. On ne peut atteindre le bord car l'extinction d'une stratégie est au plus exponentielle. On réutilisera

Comme l'extinction des stratégies strictement dominées dans S était exponentielle, il existe donc un temps T tel que, pour toute trajectoire partant d'un point x_0 à l'intérieur de X, l'on ait : $\phi(T, x_0) \in V' \setminus \partial X$.

On raisonne par itérations pour prouver que ce résultat est vrai pour n'importe qu'elle stratégie strictement dominée de manière itérée (qui sont en nombre fini).

Peut-on exhiber des dynamiques convexes monotones selon des critères simples ? Nous allons donner un exemple de la forme que peuvent prendre de telles dynamiques. Cet exemple est motivé par le fait que ce type de dynamiques est une variation de l'équation des réplicateurs.

La tangente en x à la trajectoire issue même point est donnée par le vecteur vitesse $V^F(x)$. Le taux d'accroissement d'une stratégie i est alors donné par : $\dot{x}_i = V_i^F(x)$. V_i^F peut prendre des formes diverses, mais l'on peut décider de simplifier l'étude en séparant les deux dépendances, et en le gain $F_i(x)$ d'un joueur jouant la stratégie i, et en l'état actuel x. On conservera le fait que $\dot{x}_i$

soit proportionnel à x_i, c'est-à-dire de la forme $\dot{x}_i = x_i g_i(x)$. On peut donc étudier des dynamiques données sous la forme explicitée dans la définition suivante :

Définition :

On dit que la dynamique est sous forme séparée si pour tout jeu, on a pour tout $x \in X$:
$V_i^F(x) = x_i g_i(x)$
$g_i(x) = \lambda^F(x) f(F_i(x)) + \mu^F(x)$ pour tout $i \in [1, n]$
où les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $\lambda^F : X \to \mathbb{R}_+^*$ et $\mu^F : X \to \mathbb{R}$ sont telles que V^F soit lipschitzienne.

Remarque :

Ce type de dynamiques peut paraître dur à se représenter au départ. Mais il contient de nombreuses dynamiques d'imitation, comme celle par exemple des réplicateurs ($V_i^F(x) = x_i(F_i(x) - \bar{F}(x))$ où $\bar{F}$ représente le gain moyen). Nous verrons plus tard que si la dynamique satisfait certaines propriétés assez simples, elle peut alors être mise sous cette forme.
On notera λ pour λ^F et μ pour μ^F dans la suite, pour simplifier les notations.
En fait, la fonction μ est entièrement déterminée par le fait que $\sum_1^n \dot{x}_i = 0$.
Le terme "forme séparée" n'est pas un terme utilisé dans la littérature, il est simplement utilisé ici pour nommer ce genre de dynamique et les distinguer d'autres types de dynamiques.

La proposition suivante caractérise les dynamiques de cette forme qui sont convexes monotones.

Proposition :

Une dynamique sous forme séparée est convexe monotone si et seulement si f est convexe et strictement croissante.

Preuve :

$\Leftarrow$
On suppose que f est strictement croissante et convexe. On considère une stratégie pure i, une stratégie h et un état x tel que : $\langle h, F(x) \rangle > F_i(x)$. Alors,
$\langle h, g(x) \rangle - g_i(x) = \lambda(x)(\sum h_j f(F_j(x)) - f(F_i(x)))$
$\geqslant \lambda(x)(f(\sum h_j F_j(x)) - f(F_i(x)))$
$= \lambda(x)(f(\langle h, F(x) \rangle) - f(F_i(x))) > 0$

La première inégalité est une inégalité de convexité. L'inégalité stricte de la fin provient de la stricte croissance de f. La dynamique est donc convexe monotone.

$\Rightarrow$

Soit maintenant une dynamique sous forme séparée convexe monotone. Nous montrerons d'abord que f est strictement croissante, puis que f est convexe.
Soit $a < b$. On peut construire un jeu où $F_1(x) = a$, $F_2(x) = b$ on a alors : $g_1(x) < g_2(x)$ soit $\lambda(x)f(a) + \mu(x) < \lambda(x)f(b) + \mu(x)$ soit $f(a) < f(b)$. f est donc strictement croissante.

On suppose maintenant par l'absurde que f n'est pas convexe. Il existe alors $b \neq c$ tels que $f(\frac{b+c}{2}) > \frac{f(b)+f(c)}{2}$. Par continuité de f, il existe alors $a < \frac{b+c}{2}$ tel que $f(a) > \frac{f(b)+f(c)}{2}$On construit alors un jeu où les 3 stratégies 1, 2 et 3 gagnent respectivement a, b et c contre un état quelconque x. En comparant la stratégie mixte h pour laquelle la moitié du temps l'on joue la stratégie 2 avec probabilité $\frac{1}{2}$ et la stratégie 3 avec probabilité $\frac{1}{2}$, et la stratégie pure e_1 on obtient : $F_1(x) = a < \langle h, F(x) \rangle = \frac{b+c}{2}$ et pourtant
$\langle h, g(x) \rangle = \lambda(x)f(\frac{b+c}{2}) + \mu(x) < \lambda(x)f(a) + \mu(x) = g_1(x)$ La dynamique n'est donc pas convexe monotone, d'où la contradiction.

Remarque :

On a été obligé d'envisager des jeux de dimension supérieure ou égale à 3 dans la preuve. Pourtant, la dimension de l'espace est fixée par les fonctions λ et μ, ce qui peut paraître étrange. En fait, un jeu en dimension 1 est sans intérêt (une seule stratégie possible). Pour un jeu en dimension 2, mettre une dynamique évolutive revient à résoudre une équation $\dot{x} = V^F(x)$ sur le segment [0,1], ce qui n'a pas non plus grand intérêt pour les résultats que nous voulons montrer. Si la dimension est supérieure à 2 où à 3, il suffit d'en ajouter d'autres pour que les étapes de la preuve soient vraies.

Nous avons donc trouvé jusqu'ici un exemple de type de dynamiques concret pour lesquelles on sait identifier rapidement si oui ou non elles éliminent les stratégies strictement dominées de manière itérée. Nous allons maintenant voir que, si une dynamique répond à un certain critère, la stricte monotonicité, alors elle peut être mise sous la forme précédente (du moins un cas particulier qui est une variante de l'équation des réplicateurs.

Définition :

On rappelle que la dynamique des réplicateurs, pour n'importe quel jeu, est la dynamique de la forme : $V_i^F(x) = x_i(F_i(x) - \bar{F}(x))$ où $\bar{F}(x)$ représente le gain moyen : $\bar{F}(x) = \sum_1^n x_k F_k(x)$.
Une dynamique est dite suivre la monotonie généralisée si pour deux stratégies mixtes h_1 et h_2 : $\langle h, F(x)\rangle > \langle h', F(x)\rangle \Leftrightarrow \langle h, g(x)\rangle > \langle h', g(x)\rangle$.

Remarque :

Là encore on considère des dynamiques pour lesquelles $\dot{x}_i$ est proportionnel à x_i. La condition de monotonie généralisée ressemble à la condition de "dynamique convexe monotone" vue précédemment. En fait, elle est bien plus forte, car les exigences portent sur toute paire de stratégies mixtes, alors qu'elles ne concernent seulement qu'une stratégie mixte et une stratégie pure pour la "convexité monotone". De plus, ce n'est plus une implication mais une équivalence. On remarque également que la dynamique des réplicateurs respecte la monotonie généralisée.

Proposition :

Si une dynamique est respecte la monotonie généralisée, alors pour tout jeu, il existe une fonction $\lambda^F : X \to \mathbb{R}_+^*$ telle que :
$g_i(x) = \lambda^F(x) \times x_i(F_i(x) - \bar{F}(x))$
(on notera simplement λ pour λ^F)

Remarque :

Les dynamiques suivant la monotonie généralisée sont donc des cas très particuliers de dynamiques séparées convexes monotones, avec $f = Id$. De plus, comme $\lambda > 0$, cela signifie que les dynamiques à monotonie généralisée sont égales à la dynamique des réplicateurs "à changement de temps près".
Cette dernière notion exige quelques conditions supplémentaires sur λ. Si λ est continue, on peut alors résoudre l'équation différentielle $\dot{\psi}(t) = \lambda(\phi(t, x))$ pour x une condition initiale quelconque, en imposant $\psi(0) = 0$. ψ est donc un C^1 difféomorphisme de $\mathbb{R}_+$ sur son image $[0, +\infty]$ (elle ne peut être égale à un segment car par continuité de lambda, il existe $\delta > 0$, $\dot{\psi}(t) > \delta$). On peut alors étudier la trajectoire donnée par : $\chi(t) = \phi(\psi^{-1}(t), x)$ et l'on constate que $\dot{\chi}(t)_i = x_i(F_i(x) - \bar{F}(x))$ est l'équation des réplicateurs, avec égalité des conditions initiales. Les trajectoires issues de x en suivant la dynamique des réplicateurs où celle suivant la monotonie généralisée sont donc les mêmes.

Preuve :

On considère une dynamique respectant la monotonie généralisée. Soit $x \in X$. On distinguera deux cas, selon que F(x) soit colinéaire au vecteur (1,1,...1) ou non.

Premier cas. On suppose que F(x) n'est pas colinéaire au vecteur (1,1,...,1). Soit h et h' deux stratégies mixtes ayant le même gain. Alors, par monotonie généralisée :
$\langle h, g(x)\rangle = \langle h', g(x)\rangle$
d'où $\langle h - h', g(x)\rangle = 0$.

On s'intéresse alors à l'espace vectoriel
$E = Vect\{h-h',\ h, h' \in X,\ \langle h, F(x)\rangle = \langle h', F(x)\rangle\}$ (E est l'espace vectoriel engendré par les différences entre deux stratégies ayant le même gain pour l'état x). On a alors : $\forall v \in E,\ \langle v, (1,1,...,1)\rangle = 0\, et\, \langle v, F(x)\rangle = 0$. En fait, on a même $E^{\perp} = Vect((1,1,...,1), F(x))$ (car $Vect\{h-h',\ h, h' \in X\} = (1,1,...,1)^{\perp}$). Comme pour tout v dans E on a : $\langle v, g(x)\rangle = 0$ On en déduit donc que $g(x) \in E^{\perp}$, il existe $\lambda(x)$ et $a(x)$ tels que : $g(x) = \lambda(x)F(x) + a(x)(1,1,...,1)$.
Montrons que $\lambda(x)$ est strictement positif. Comme $F(x)$ n'est pas colinéaire au vecteur (1,1,...,1) on peut trouver deux stratégies mixtes h et h' telles que : $\langle h, F(x)\rangle > \langle h', F(x)\rangle$ soit $\langle h-h', F(x)\rangle > 0$. Alors avec la monotonie généralisée : $\lambda(x)\langle h - h', F(x)\rangle = \langle h - h', g(x)\rangle > 0$ Donc $\lambda(x) > 0$.

Il reste à expliciter $a(x)$. Pour cela, on constate que :
$0 = \sum_1^n x_i g_i(x)$
$= \sum_1^n x_i(\lambda(x)F_i(x) + a(x)$
$= \lambda(x)\langle x, F(x)\rangle + a(x)$

d'où $a(x) = -\lambda(x)\bar{F}(x)$ et l'on a alors : $g_i(x) = \lambda(x)(F_i(x) - \bar{F}(x))$.

Si F(x) est colinéaire à (1,1,...,1), alors par stricte monotonicité on obtient : $g_i(x) = g_j(x)$ pour toute stratégie i et j. Ainsi, le fait que $\sum x_i g_i(x) = 0$ implique que $g(x) = 0$. Comme en outre $F_i(x) - \bar{F}(x) = 0$ on peut en fait choisir $\lambda(x)$ comme on veut (et donc le prendre strictement positif)

3 Survie de stratégies strictement dominées

Théorème :

Soit un protocole ρ de la forme $\rho_{ij} = \phi(F_j - \bar{F})$ ou de la forme $\rho_{ij} = \phi(F_j - F_i)$ avec ϕ qui vérifie :
$-\phi\, lipschitzienne$ (1)
$-\phi \geq 0$, $\phi(u) = 0\, si\, u \leq 0$ (2)
$-\phi'(0^+) > 0$ (3)
Alors il existe un jeu pour lequel, en partant de la plupart des conditions initiales, une stratégie strictement dominée survive, c'est-à-dire dont la proportion de la population la jouant ne tende pas vers 0, et même soit jouée à une proportion supérieure à $\frac{1}{6}$: $\forall t \geq 0, \exists t' \geq t \mid x_i(t') \geq \frac{1}{6}$

Remarque :

(1) est l'hypothèse habituelle de continuité des fonctions mis en jeu, (2) explique que si la stratégie j gagne moins que la i (ou moins que la moyenne) on a moins envie de passer de i vers j. Enfin (3) implique que ϕ croit localement à droite de 0 : il y a des migrations de i vers j dès que l'écart de gain est strictement positif (on n'attend pas de dépasser un certain seuil)

Démonstration :

La démonstration est très similaire à celle du théorème beaucoup plus général que nous allons énoncer dans peu de temps. La seule différence est qu'ici l'on puisse quantifier à quel point la stratégie strictement dominée survive.

Définition :

On dit que x_0 est un équilibre de Nash de F ssi $\forall x \in X, \langle x, F(x_0)\rangle \leq \langle x_0, F(x_0)\rangle$ cela signifie qu'un joueur de la population n'est pas tenté par le fait de changer de stratégie car il y gagnerai moins, d'où le terme "équilibre"). On note NE(F) l'ensemble des équilibres de Nash de F.

Théorème :

Soit g une fonction d'accroissement. On suppose que pour toute fonction de gain F on a :
− g lipschitzienne (C)
$-g(F(x), x) \neq 0 \Rightarrow \langle g(F(x), x), F(x)\rangle > 0 \; ie \; \sum_{i \in S} \dot{x}_i F(x_i) > 0$ (PC)
$-g(F(x), x) = 0 \Rightarrow x \in NE(F)$ (NS)
$-x \notin NE(F), x_i = 0 \; et \; e_i \in B^F(x) \Rightarrow g_i(F(x), x) > 0 \; ie \; \dot{x}_i > 0$ (IN)

Alors il existe une fonction de gain F_d, un voisinage U de NE(F_d) et une stratégie strictement dominée i, tels que si $x(0) \notin U$ alors
$\exists \epsilon > 0 \mid \forall t \geq 0, \exists t' \geq t \mid x_i(t') \geq \epsilon$

Remarque :

−

(C) est l'hypothèse habituelle de continuité
−(PC) est la corrélation positive : il serait trop simpliste de dire qu'on augmente les $x_i \mid F(x_i) > 0$ et qu'on diminue les $x_i \mid F(x_i) \leq 0$, cependant en moyenne on veut que les variations apportent un meilleur gain
−(NS) est la stationnarité de Nash : si on ne bouge pas c'est qu'on est sur un équilibre de Nash (la réciproque étant toujours vraie)
−(IN) est l'innovation : lorsque la stratégie i n'est pas jouée, et que le gain moyen augmenterait si toute la population jouait i, alors quelques joueurs se mettent à jouer i

Là encore, des dynamiques utilisées en économie et en biologie répondent aux critères de ce théorème. C'est le cas de la dynamique BNN donnée en exemple au début, mais également de la dynamique de Smith.

Idée de la preuve :

On va construire pour n=3 une fonction de gain telle que x(t) ne tende pas vers un point mais vers un cycle qui passe dans les zones de prédominances de chaque stratégie, ie que les stratégies sont à tours de rôle les meilleures réponses à l'état actuel de la population.
On duplique ensuite la stratégie 3, c.a.d qu'on crée une stratégie 4 telle que le gain en jouant 3 ou en jouant 4 est identique et ne dépende que de $x_3 + x_4$. On montre alors (grâce à l'innovation) que des gens vont jouer cette stratégie une infinité de fois avec une proportion $\geq \epsilon$. On modifie alors légèrement le gain pour que la stratégie 4 devienne strictement dominée. Par continuité on aura des gens qui joueront 4 une infinité de fois avec une proportion $\geq \frac{\epsilon}{2}$

Outils préliminaires :

Représentation graphique :

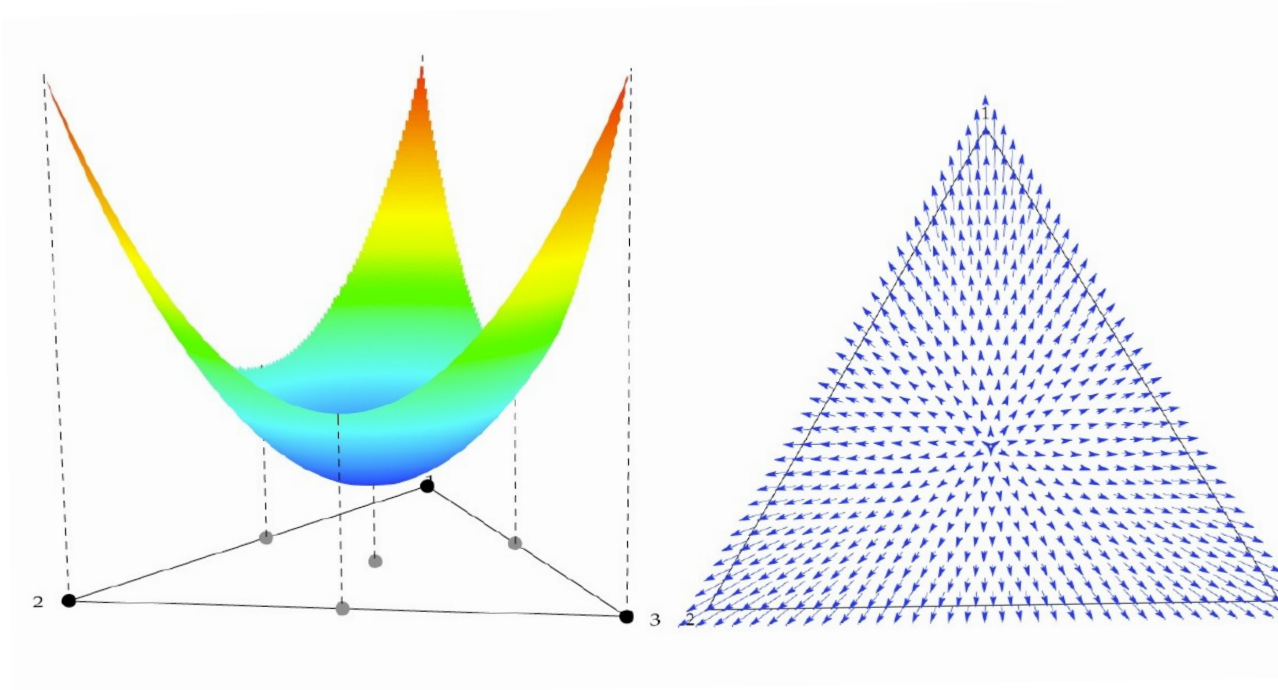
Tout point à l'intérieur d'un triangle ABC s'écrit de manière unique
$x_1 A + x_2 B + x_3 C$ avec $x_1 + x_2 + x_3 = 1$. Pour n=3 on identifie donc X à un triangle pour avoir une représentation graphique du problème.
Pour n=4 on identifie X à une pyramide à base triangulaire.

Jeu à potentiel :

On considère une fonction de gain de la forme F(x)=$\nabla f(x)$ *où* $f \in C^1(\mathbb{R}^n_+, \mathbb{R})$. Alors $\frac{df(x_t)}{dt} = \sum_{i \in S} \frac{\partial f}{\partial x_i}(x(t)) \times \dot{x_i}(t) = \langle \nabla f(x(t)), \dot{x}(t) \rangle$
$= \langle F(x(t)), g(F(x(t)), x(t)) \rangle \geq 0$ d'après (PC) avec égalité ssi $x(t) \in NE(F)$ d'après (NS)
Graphiquement en regardant $\{f(x), x \in X\}$, f(x(t)) va aller vers le haut de cette surface. On peut simplement considérer la projection des gradients de f sur le triangle représentant f ; pour avoir une idée de la trajectoire il suffit de suivre les flèches.
Si on considère une fonction de gain F qui n'est pas issue d'un jeu à potentiel et qu'on projette les vecteurs F(x) sur le triangle l'idée précédente reste intuitivement valable.

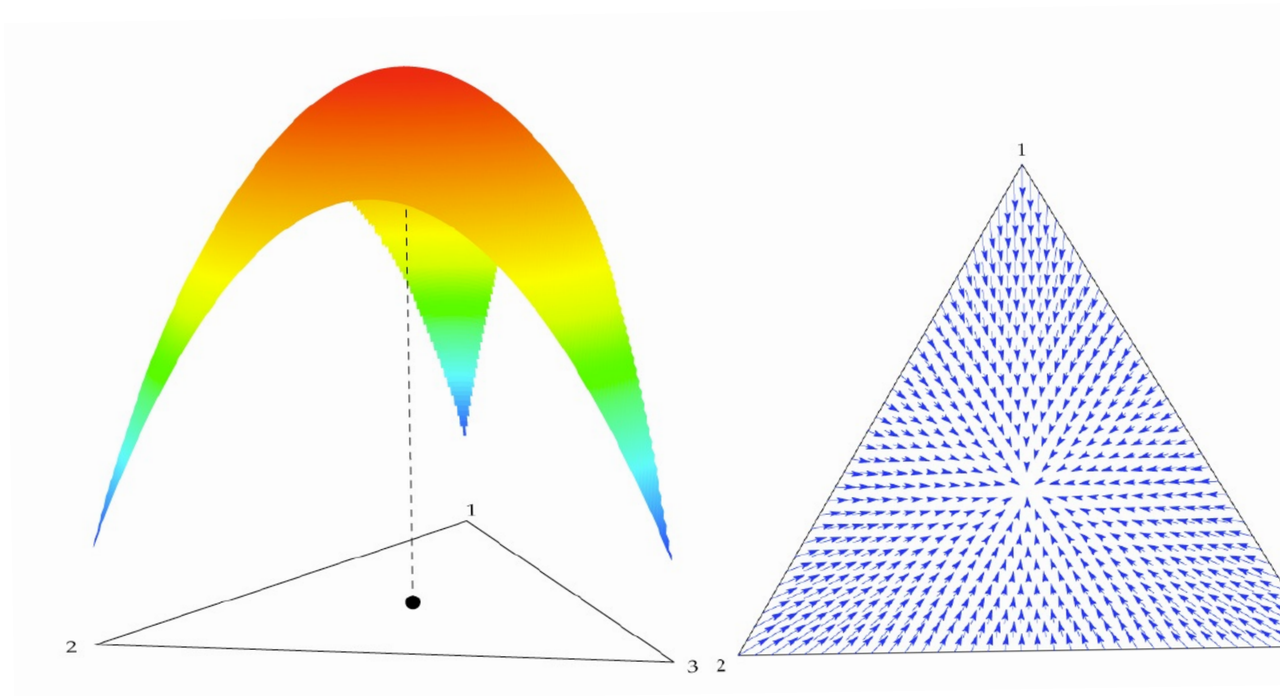
Exemples :

On considère la fonction $f_0(x) = \frac{x_1^2+x_2^2+x_3^2}{2}$ alors on obtient les graphes suivants :



fonction à potentiel f_0 et projection des vecteurs
(figure extraite de l'article)

La trajectoire va vers un coin. Si on considère -f_0 la trajectoire va vers le centre :



fonction à potentiel $-f_0$ et projection des vecteurs
(figure extraite de l'article)

Revenons à la démonstration
On cherche un jeu pour avoir une projection des vecteurs de la forme suivante :

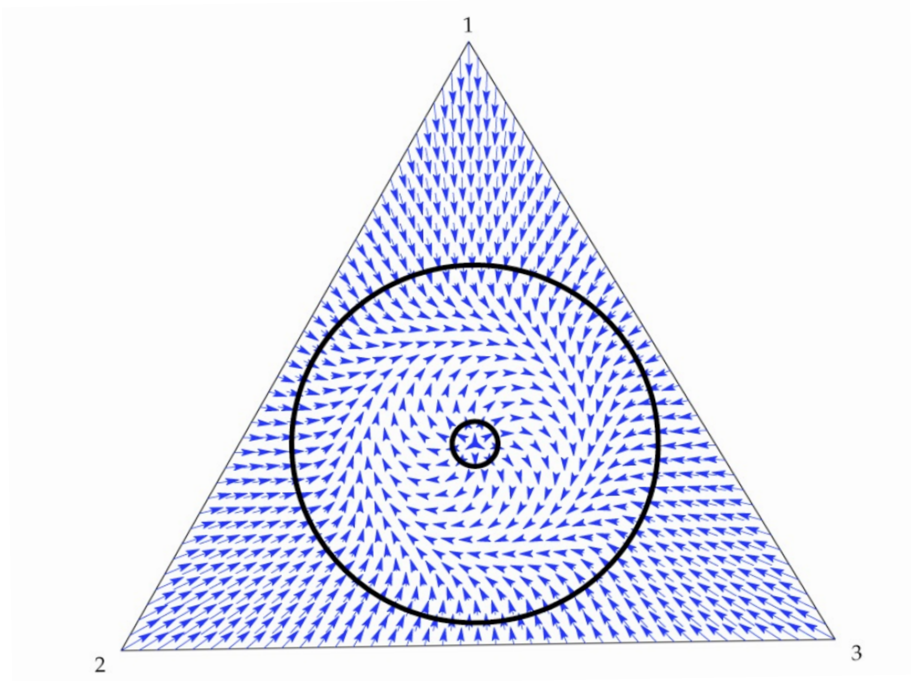


figure extraite de l'article

On considère la fonction de gain

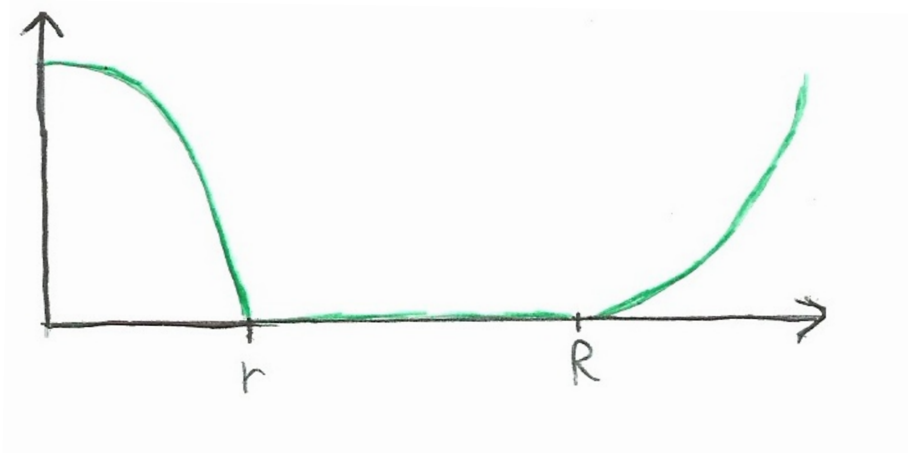
H(x)=$cos(\theta(x)) \times \begin{pmatrix} x_1 - \frac{1}{3} \\ x_2 - \frac{1}{3} \\ x_3 - \frac{1}{3} \end{pmatrix} + \frac{\sqrt{3}}{3} sin(\theta(x)) \times \begin{pmatrix} x_2 - x_3 \\ x_3 - x_1 \\ x_1 - x_2 \end{pmatrix} + \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

où $\theta(x)$ vaut 0 à l'intérieur du petit cercle, π à l'extérieur du grand cercle et linéaire entre

Alors H est un jeu qui convient. Son unique équilibre de Nash est $x^* = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

Pour tout point x à l'extérieur de la couronne, au bout d'un certain temps t_0 on aura $\phi_t(x)$ à l'intérieur de la couronne pour tout $t \geq t_0$.

La justification exacte de ce phénomène se fait avec les fonctions de Liapunov, en remarquant que la fonction $\tilde{f}(x) = \begin{cases} -f_0(x) + \frac{R^2}{2} & si \parallel x - x^* \parallel \geq R \\ f_0(x) - \frac{r^2}{2} & si \parallel x - x^* \parallel \leq r \\ 0 & sinon \end{cases}$
définit un jeu à potentiel dont la projection des gradients a la forme voulue en dehors de la couronne et que le graphe de $-\tilde{f}(\parallel . \parallel)$ est :



De plus à l'intérieur de la couronne il n'y a pas de points stationnaires, notamment parce qu'on évite l'équilibre de Nash.

On fabrique alors le double de la stratégie 3 en considérant la fonction de gain F vérifiant :
$-F_i(x_1, x_2, x_3, x_4) = H_i(x_1, x_2, x_3 + x_4)$ *pour* $i \leq 3$
$- F_4(x) = F_3(x)$
Alors NE(F) est la droite $\{x \mid x_1 = \frac{1}{3}, x_2 = \frac{1}{3}, x_3 + x_4 = \frac{1}{3}\}$.

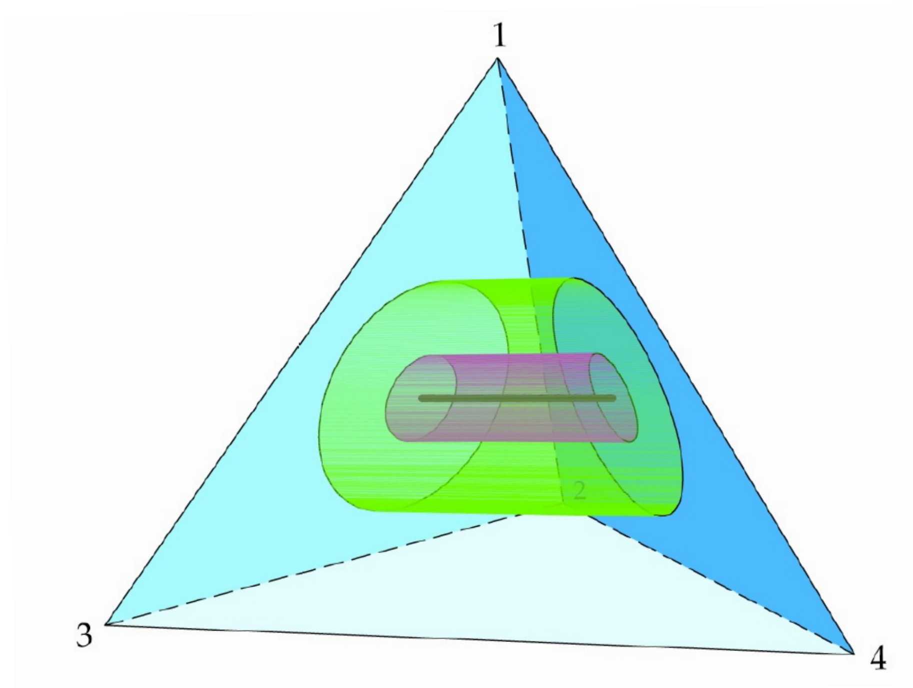


figure extraite de l'article

Dans le dessin ci dessus d'après ce qui précède si on est à l'extérieur du gros tube ou à l'intérieur du petit tube, au bout d'un certain temps on arrive entre les deux tubes et on y reste.
En considérant l'ensemble des valeurs d'adhérence de la trajectoire, on obtient un attracteur faible, et de plus d'après ce qui précède cet attracteur est entre les deux tubes. On sait alors (cf appendice) qu'il existe un attracteur fort A. Montrons que A est disjoint du plan $Z = \{x_4 = 0\}$

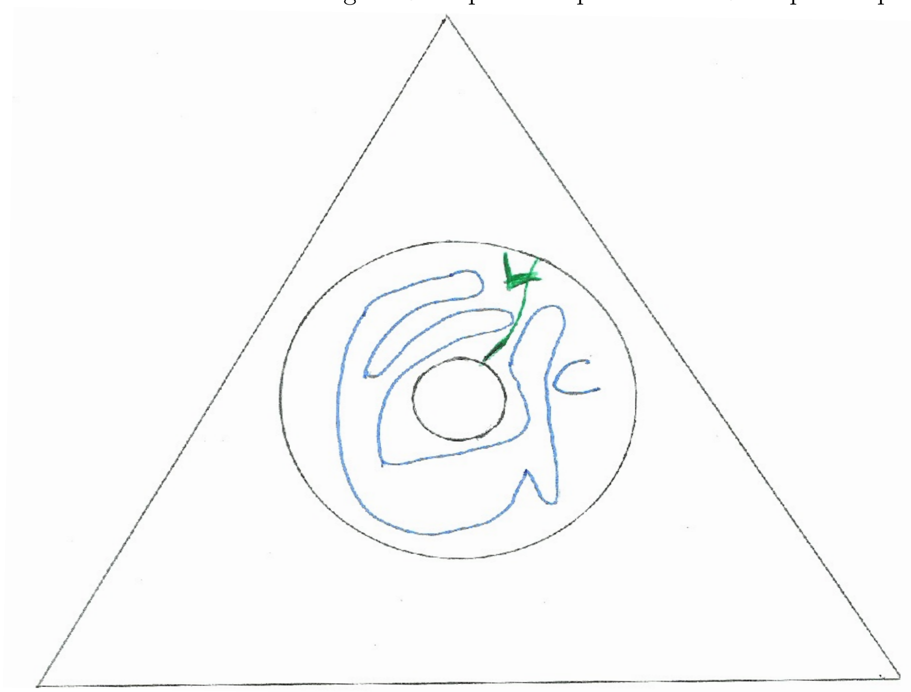
Par l'absurde soit $z \in A \cap Z$. On considère alors la dynamique où on va en marche arrière en partant de x, ie la courbe $C = \{\phi_t(z), t \leq 0\}$ Alors la courbe C est inclue dans $x \in A \cap Z$. En effet on sait déjà que A est invariant (cf appendice). Montrons que Z est invariant pour la marche arrière, c'est à dire que si on est dans Z à un instant, on y est depuis le début.

Posons z(t)=$\phi_t(z)$. On a par la condition de Lipschitz :
$\mid \dot{z_4}(t) - \dot{z_4}(0) \mid \leq K \mid z_4(t) - z_4(0) \mid$
Comme $z(0) = z \in Z$, $z_4(0) = 0$ *donc* $\dot{z_4}(0) \geq 0$ (s'il n'y a personne qui joue 4 il ne peut y en avoir moins qui joue 4). De plus $z_4(t) \geq 0$
Alors l'inégalité précédent devient :
$\mid \dot{z_4}(t) - \dot{z_4}(0) \mid \leq K z_4(t)$
$\Rightarrow \dot{z_4}(t) \geq -K z_4(t) + \dot{z_4}(0)$

$\Rightarrow \dot{z_4}(t) \geq -Kz_4(t)$
$\Rightarrow \forall t_0, \forall t \geq t_0 \; z_4(t) \geq z_4(t_0)e^{-K(t-t_0)}$
Donc il ne peut y avoir de $t_0 < 0 \mid z_4(t_0) > 0$ car $z_4(0) = z_4 = 0$

On peut alors s'intéresser à $\omega_-(z)$ l'ensemble des valeurs d'adhérence de la trajectoire issue de z pour la dynamique inverse (donnée par $-V^F$). La trajectoire inverse ne sort pas du simplexe X car, comme un attracteur est invariant (cette propriété est démontrée en annexe), cette trajectoire est contenue dans $A \cap Z$. Par des propriétés élémentaires sur les attracteurs (elles aussi dans la partie "outils"), on a : $\omega(z) \subseteq A \cap Z$. Comme V^F ne s'annule pas sur $A \cap Z$ par construction, la dynamique inverse n'y admet pas de points stationnaires. On a donc, par le théorème de Poincaré Bendixson : $\omega_-(z)$ est une courbe périodique (pour la dynamique inverse et donc pour la dynamique initiale également). D'où $A \cap Z$ contient une trajectoire périodique, nous appellerons cette courbe C. Montrons que C passe par chaque zone de prédominance des stratégies de 1 à 3.

Par l'absurde si C n'entoure pas le cercle intérieur, alors il existe une courbe L qui va du cercle intérieur au cercle extérieur sans intersecter C. On considère alors l'ouvert $\{x \mid r <\| x \|< R\} - L$ qui est simplement connexe et qui contient C. La restriction de H à cet ouvert admet donc une primitive. Or cette primitive doit croitre strictement le long de C ce qui est impossible car C est périodique.



Lorsque z(t) est dans la zone 1, 3 et 4 sont des meilleures réponses, et comme par définition de Z 4 n'est pas jouée, par innovation des gens vont se mettre à jouer 4 donc on va sortir de Z contradiction.

Ainsi $A \cap Z = \emptyset$ donc $\epsilon = d(A, Z) > 0$ On considère la fonction de gain $\tilde{F}$ définie par $\tilde{F_i}(x) = F_i(x)$ pour $i \leq 3$ et $\tilde{F_4} = F_4(x) - \eta$ avec η choisi assez petit pour que le nouvel attracteur $\tilde{A}$ vérifie $d(\tilde{A}, Z) > \frac{\epsilon}{2}$ (c'est possible par continuité cf appendice). Alors comme la trajectoire passe une infinité de fois à une distance $\leq \frac{\epsilon}{4}$ de A elle passe une infinité de fois à une distance $\geq \frac{\epsilon}{4}$ de Z

4 Outils

Dans cette section sont regroupés tous les outils, ainsi que leur démonstration, qui auront été utilisé dans la preuve du théorème précédent. Elle constitue une introduction aux concepts de base des systèmes dynamiques. Nous étudierons en premier lieu le flot que définit une dynamique. Ensuite nous montrerons quelques propriétés de base sur les attracteurs, notamment leur stabilité en lien avec les fonctions de Liapunov. Nous finirons par une démonstration du théorème de Poincaré-Bendixson.

4.1 Théorie générale

On peut se demander en premier lieu : "le problème est-il bien posé ?". C'est-à-dire, en imposant le champ des vitesses sur X (en imposant les paiements $F : X \to \mathbb{R}^n$ ainsi que la dynamique $g : \mathbb{R}^n \times X \to \mathbb{R}^n$, a-t-on l'existence et l'unicité des trajectoires issues de tout point x_0 ? De plus, de telles solutions définissent un flot sur X à savoir : $\phi : \mathbb{R} \times X \to X$, $\phi(t, x_0)$ représentant la position au temps t du point dont la trajectoire est issue de $\phi(0, x_0) = x_0$. On peut alors se demander si ce flot est continu en x_0 et en t. Ces questions feront l'objet des trois propositions suivantes, dont les démonstrations seront quelque peu succinctes.

La proposition 1 est relative aux problèmes d'existence et d'unicité.

Proposition 1 :

Si $V^F : X \to \mathbb{R}^n$ est lipschitzienne, alors pour tout $x_0 \in X$ il existe une unique solution $\phi(\cdot, x_0)$ définie sur $\mathbb{R}_+$ et telle que : $\forall t \in \mathbb{R}_+$, $\dot{\phi}(t, x_0) = V^F(\phi(t, x_0))$

Preuve :

Lorsque X est ouvert et V^F est lipschitzienne, l'unicité et l'existence d'une solution définie sur un intervalle ouvert maximal contenant 0 et tel que $\phi(0, x_0) = x_0$ sont des propriétés bien connues.
Ici, X est un fermé d'intérieur vide. Mais V^F peut être prolongée en une fonction toujours lipschitzienne sur un voisinage U de X (prendre par exemple $\tilde{V}^F(y) = V^F(x)$ où $x \in X$ est tel que $d(y, x) = d(y, X)$). Il reste à voir que les solutions pour $\tilde{V}^F$ partant de X restent dans X. Ce sont les conditions aux bords $V_i^F(x) \geq 0$ si $x_i = 0$, et la condition d'invariance $\sum_{i \in S} V_i^F = 0$ qui l'assurent. L'intervalle de définition peut alors être pris égal à $\mathbb{R}_+$. On remarque qu'il se peut cependant que X ne soit pas invariant pour les $t < 0$.

La proposition 2 porte sur les propriétés fondamentales du flot.

<u>Proposition 2</u> :

Pour tous $(t,s) \in \mathbb{R}^2$, pour tout $x \in X$, $\phi(t, \phi(s,x)) = \phi(t+s, x)$.
$\phi : \mathbb{R}_+ \times X \to X$ est continue.

<u>Preuve</u> :

La première assertion provient de l'unicité des solutions (voir proposition 1 précédente).

Pour prouver la continuité, on va chercher à majorer la différence. Pour cela, on remarque que, pour $x_0 \in X$ et $t \in \mathbb{R}_+$,
$\phi(t, x_0) = x_0 + \int_0^t V^F(\phi(t, x_0))dt$.
Pour $(x_1, x_2) \in X^2$ et $(t,h) \in \mathbb{R}^2$:

$\|\phi(t+h, x_2) - \phi(t, x_1)\| = \left\| x_2 - x_1 + \int_0^t (V^F(\phi(t,x_2)) - V^F(\phi(t,x_1)))dt + \int_t^{t+h} V^F(\phi(t,x_2))dt \right\|$
$\leq \|\phi(0,x_2) - \phi(0,x_1)\| + \int_0^t K \|\phi(t,x_2) - \phi(t,x_1)\| + |h| \left\|V^F\right\|_\infty$ où K est la constante de lipschitz de V^F et $\left\|V^F\right\|_\infty$ sa norme infinie. On rappelle alors le lemme de Gronwall :

Soit $f : [0,t] \to \mathbb{R}$ une fonction continue et positive telle qu'il existe deux constantes positives C et K avec : $f(t) \leq C + \int_0^t Ku(s)ds$.
Alors pour tout $u \in [0,t]$, $f(u) \leq Ce^{Ku}$

On a ainsi : $\|\phi(t,x_2) - \phi(t,x_1)\| \leq \|x_2 - x_1\| e^{Kt}$, ce qui prouve la continuité en x et en t de ϕ vis à vis de la majoration précédente.

Dans les preuves précédentes, la notion d'attracteur a été fréquemment utilisée. La continuité des attracteurs a joué un rôle essentiel pour montrer qu'en affaiblissant le double, celui-ci continuait pourtant à être joué. Nous commencerons cette partie par les définitions adéquates. Ensuite quelques propriétés fondamentales seront énoncées. Pour finir, nous nous attarderons sur les effets d'une perturbation sur un attracteurs.

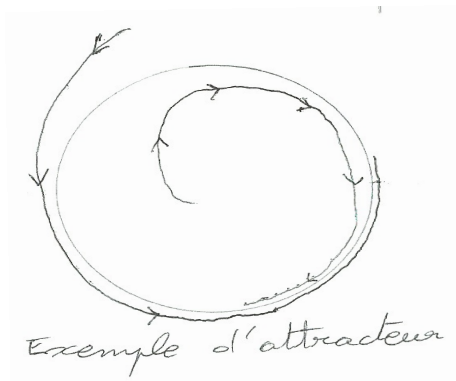
4.2 Attracteurs

Définition :

Soit $P \subseteq \mathbb{R}$, et $A \subseteq X$
On définit alors $\phi_P(A) = \{\phi(t, x),\ t \in P,\ x \in A\}$

On définit également ω(A)=$\bigcap_{t \geq 0} \overline{\phi_{[t;\infty[}(A)}$
ω(A) représente l'ensemble des valeurs d'adhérence asymptotique de la partie A pour le flot ϕ.

On dit qu'un ensemble A est attracteur si il existe un voisinage U de A tel que $\omega(U) = A$



Propriété :

Si A est un attracteur alors $\forall t \in \mathbb{R},\ \phi_t(A) = A$

Remarque :

Pour $t \geq 0$ la propriété précédente coïncide avec l'idée intuition que l'on se fait d'un attracteur : si on part de l'ensemble, comme il nous attire, on y reste. Pour $t \leq 0$ cela signifie que si l'on est arrivé dans l'attracteur, on y était depuis le début ; en partant d'en dehors de l'attracteur on s'en approche mais l'on y arrive jamais en un temps fini.

Démonstration :

On conserve les notations précédentes.

$\subseteq$:
Soit s $\in \mathbb{R}$ et b $\in \phi_s$(A), b=ϕ_s(a). Montrons que b $\in A = \bigcap_{t\geq 0} \overline{\phi_{[t;\infty[}(U)}$

Soit $r > 0$ et t$\geq$ 0. Par continuité de $\phi_s, \exists\ \eta > 0 \mid \phi_s(B(a,\eta))\subseteq$ B(b,r). Comme a$\in$A=$\omega(U), \exists$t'$\geq$t-s, u $\in$ U tel que $\phi_{t'}(u)\in B(a,\eta)$. Alors s+t'$\geq$t et $\phi_{s+t'}(u) = \phi_s(\phi_{t'}(u))\in$ B(b,r) d'où le résultat anoncé.

$\supseteq$:
Soit $t \in \mathbb{R}$ et a$\in$A.
Comme A=$\omega(U), \forall k \in \mathbb{N}$, $\exists t_k \in \mathbb{R}_+$, $\exists u_k \in U$ tel que $\phi_{k+t_k}(u_k)\in$ B(a,$\frac{1}{k}$). Soit z$_k$ =ϕ_{k+t_k-t}, de sorte que $\phi_t(z_k)$$\longrightarrow$a. Montrons que à une extraction près z$_k$$\longrightarrow$z$\in$A et on aura alors a=$\phi_t(z)\in \phi_t(A)$

Soit V$_n = \{x, d(x,A) < \frac{1}{n}\}$. Montrons qu'il existe $T_n \in \mathbb{R}_+$ tel que
$\forall s \geq 0$, $\phi_{T_n+s}(U) \subseteq V_n$ (*)
Soit $x \in V_n^c$. En particulier x $\notin$ A=$\omega(U), donc\, \exists t_x\, tel\, que\, x \notin \overline{\phi_{[t_x;\infty[}(U)}$ c.a.d $\exists t_x, \exists r_x$ tels que $\forall s \geq 0,\ \phi_{s+t_x}(U) \bigcap B(x,r_x) = \varnothing$. Or V_n^c est compact (fermé dans un compact), donc $\exists p_n$ tel que $V_n^c \subseteq \bigcup_{i=1}^{p_n} B(x_i, r_{x_i})$. Alors avec $T = max\, t_{x_i}$ on a $\forall s \geq 0,\ \phi_{T+s}(U) \bigcap V_n^c \subseteq \bigcup_{i=1}^{p_n}(\phi_{T+s}(U) \bigcap B(x_i, r_{x_i})) = \varnothing$ d'où T_n=T convient.

$\forall n \in \mathbb{N}, \exists k \mid k - t \geq T_n$ donc $z_k \in V_n$. Soit $k_n = min\{k \in \mathbb{N}, v_k \in V_n\}$ Soit $w_n = z_{k_n}$ et φ tel que $w_{\varphi(n)} \longrightarrow w$ Alors x$\in$A (car A compact et $d(A, x_{\varphi(n)}) \leq \frac{1}{\varphi(n)}$). D'où le résultat.

Remarque :

On sait qu'en partant d'un point de U, on est proche de A au bout d'un certain temps ; dans (*) on montre que ce temps ne dépend pas du point choisi.

Proposition :

Si il existe t tel que $\phi_t(\bar{U}) \subseteq U$ alors $\omega(U)$ est attracteur et U est un voisinage d'attraction de $\omega(U)$

Démonstration :

Il suffit de montrer que U est un voisinage de $\omega(U)$ car on a évidemment $\omega(U) = \omega(U)$. Comme U est ouvert il suffit de montrer que $\omega(U) \subseteq U$

Soit $\delta = d(\phi_t(\bar{U}), \delta U) > 0$ (car $\phi_t(\bar{U})$ est un compact de U.
$K = \phi_t(\bar{U}) \times [0;1]$ est compact et $(u,s) \to \phi_s(u)$ est continue donc uniformément continue sur K donc $\exists \epsilon > 0$ tel que $\forall x, y \in \phi_t(\bar{U}), \forall s, s' \in [0;1], \| x - y \| \leq \epsilon$ et $| s - s' | \leq \epsilon$ implique que $\| \phi_s(x) - \phi_{s'}(y) \| \leq \frac{\delta}{2}$ en particulier $\forall s \in [0;\epsilon], \forall x \in \phi_t(\bar{U})$,
$\| \phi_s(x) - \phi_s(0)\| \leq \frac{\delta}{2} \Rightarrow \forall s \in [0;\epsilon] \phi_{s+t}(\bar{U}) \subseteq V \subseteq \bar{V} \subseteq U$ (car $\forall y \in \phi_{s+t}(\bar{U})\, d(y, \phi_t(\bar{U})) \leq \frac{\delta}{2}$).

On montre ensuite par récurrence en itérant la fonction ϕ_{s+t} que $\forall n \in \mathbb{N}\, \phi_{n*(s+t)}(\bar{U}) \subseteq V$ puis en prenant l'union sur tous les s possibles que
$\forall n \in \mathbb{N}\, \phi_{[n*t; n*t+n*\epsilon[}(\bar{U}) \subseteq V$ en particulier $\forall n \in \mathbb{N}\, \phi_{[n*t; n*t+n*\epsilon[}(U) \subseteq V$
Alors avec N assez grand pour que $N * \epsilon > 1$ on a $\forall n \geq N\, \phi_{[n*t; n*t+1[}(U) \subseteq V$
en prenant l'union sur tous n possibles on a $\phi_{[N*t; +\infty[}(U) \subseteq V$
$\Rightarrow \overline{\phi_{[N*t; +\infty[}(U)} \subseteq \bar{V} \Rightarrow \omega(U) \subseteq U$.

A présent, on peut se demander : "qu'advient-il de l'attracteur si l'on change la dynamique". La réponse est que, si la dynamique change continument, alors il en est de même pour l'attracteur. Ceci fait l'objet de la proposition suivante. Mais avant, nous avons besoin de définir l'ensemble des points "attirés" par l'attracteur.

Définition :

Le bassin d'attraction d'un attracteur $A \subseteq X$ est l'ensemble $\{x \in X, \omega(x) \subseteq A\}$

Proposition :

On considère une famille de fonctions $(V_\epsilon)_{\epsilon \in [0,1]}$, telle que $x \to V_\epsilon(x)$ soit lipschitzienne (pour garantir l'existence et l'unicité des solutions), et que $\Theta : \epsilon \to V_\epsilon$ soit continue (vis à vis de la norme infinie).
Soit A un attracteur de bassin B(A) pour la dynamique V_0.
Alors la fonction : $\epsilon \to A_\epsilon$ est semi-continue supérieurement en 0, et $\epsilon \to B(A_\epsilon)$ est semi-continue inférieurement en 0.

Remarque :

Cela signifie qu'un attracteur ne peut pas exploser ; toutefois, cela n'exclue pas que celui-ci implose. Nous allons voir dans la preuve que le bassin d'attraction lui, tend à remplir tout l'espace contenu dans B(A).

Preuve :

Tout d'abord la fonction $(x, t, \epsilon) \to \phi_\epsilon(t, x)$ est continue. La preuve est similaire à celle de la continuité du flot vue précédemment.

On prouve d'abord la première assertion. Soit U un ouvert tel que $A \subset U$. Sans pertes de généralité on peut supposer que $\bar{U} \subset B(A)$. En effet, B(A) est un ouvert contenant A (B(A) contient A par invariance de A. Pour voir que B(A) est ouvert, il suffit de remarquer que pour $x \in B(A)$, il existe t,r tels que $\forall y \in B(x,r)$, $\phi_0(t,y) \in V$ où V est un ouvert tel que $\omega(V) = A$. Il s'en suit alors que $\forall y \in B(x,r)$, $\omega_0(y) \subset A$))

On a vu lors des preuves précédentes qu'il existe donc T tel que $\phi_0(T, \cdot)(\bar{U}) \subset U$. Par compacité de $\bar{U}$ et par continuité de ϕ il existe $\eta > 0$ tel que $\phi_\epsilon(T, \cdot)(\bar{U}) \subset U$ pour tout $\epsilon \leq \eta$. D'après une des proposition précédente, on a alors : $\omega_\epsilon(U) \subset U$ est un attracteur pour la dynamique V_ϵ.

Il reste à étudier la semi-continuité inférieure d'un tel attracteur. On constate d'abord que pour tout V ouvert tel que $A \subset U \subseteq V \subseteq \bar{V} \subseteq B(A)$ (où U reste l'ouvert précédent), il existe $\eta > 0$ tel que, $\forall \epsilon \leq \eta$, on ait l'existence de l'attracteur $A_\epsilon \subseteq U$ avec $V \subseteq B(A_\epsilon)$. En effet, il suffit de reprendre la démarche utilisée dans le paragraphe précédent avec T tel que $\phi_0(T, \cdot)(\bar{V}) \subset U$. La semi-continuité inférieure en découle instantanément.

4.3 Stabilité asymptotique et fonctions de Liapunov

Dans la partie précédente, nous avons étudié certaines propriétés des attracteurs. Cependant, comment peut-on en reconnaître un ? Une caractérisation utile est celle donnée par les fonctions de Liapunov. Le principe est simple : trouver une fonction qui est monotone le long des trajectoires. Ainsi, en connaissant les variations de la fonction, on en apprend plus sur la direction des trajectoires. Nous avons besoin donc besoin d'introduire de nouvelles définitions. Ensuite, nous énoncerons les théorèmes.
Dans la preuve du théorème principal précédemment énoncé, cette méthode aura été utilisée pour montrer que l'extérieur de la couronne était répulsif (excepté un petit voisinage entourant les équilibres de Nash), ie pour montrer que la couronne était asymptotiquement stable, et donc qu'elle contenait un attracteur.

Définition :

Soit $B \subseteq X$ une partie compacte. On dit que B est stable si pour tout voisinage U de B il existe un ouvert $V \subseteq U$ positivement invariant (c'est-à-dire $\phi(\mathbb{R}_+ \times V) \subseteq V$)
On dit que B est un attracteur faible si $\{x, \omega(x) \subseteq B\}$ est un voisinage de B (cette notion est moins forte que celle d'attracteur (X est toujours un attracteur faible !), mais derrière un attracteur faible se cache toujours un attracteur car, pour un ouvert U tel que $B \subseteq U \subseteq \bar{U} \subseteq \{x, \omega(x) \subseteq B\}$, on a vu que $\omega(U) \subseteq B$ est attracteur et U est un voisinage attiré par $\omega(U)$.
B est asymptotiquement stable si B est est un attracteur faible et si B est stable.
Le bassin d'attraction d'un attracteur faible B est défini comme celui d'un attracteur : $\{x \in X, \omega(x) \subseteq B\}$.

Théorème :

Une partie compacte $B \subseteq X$ est asymptotiquement stable si et seulement si il existe une fonction f continue positive définie sur un voisinage V de B telle que :
(1)$f(x) = 0$ si $x \in B$ et $f(x) > 0$ sinon
(2)$f(\phi(t, x)) < f(x)$ si $x \notin B$, $t > 0$ et $\phi(s, x) \in V$, $\forall s \in [0, t]$

Remarque :

Ce théorème ne dit pas quel est le rapport entre l'ouvert sur lequel cette fonction est définie et le bassin d'attraction, ce sera l'objet de la proposition suivante. Il convient de remarquer que c'est une condition nécessaire et suffisante, nous venons donc d'énoncer une caractérisation.

Preuve :

$\Leftarrow$
On garde les notations introduites dans l'énoncé du théorème. Nous prouverons d'abord la stabilité, puis l'attraction faible.

Soit U un ouvert contenant B. Sans pertes de généralités, on peut supposer que $B \subseteq U \subseteq \bar{U} \subseteq V$. On note alors $\alpha = inf_{x \in \partial U} f(x) > 0$. On pose alors $U^* = \{x \in U, \, f(x) < \alpha\} \subseteq U$. Montrons que U^* est positivement invariant. Par l'absurde, si U ne l'était pas, il existerait $x_0 \in U$ et t tels que $\phi(t,x) \notin U^*$. La trajectoire intersecte donc ∂U^* : il existe $s \in [0,t]$, $\phi(s,x) \in \partial U^*$. Or sur ∂U^*, on a $f \geq \alpha$. D'où la contradiction avec la deuxième hypothèse sur f. B est donc stable.

Il reste à montrer l'attraction. Soit toujours U tel que $B \subseteq U \subseteq \bar{U} \subseteq V$. Alors pour tout $x \in U$, on a : $\omega(x) \subset \bar{U}$, donc $\omega(x) \subset V$. On suppose par l'absurde que $\omega(x) \nsubseteq B$, alors il existe $y \in V \setminus B$ tel que la trajectoire issue de x s'approche infiniment près de y. Or il existe $t \in \mathbb{R}_+$ tel que : $f(\phi(t,y)) < f(y)$. Par continuité de f, de ϕ, il existe donc un voisinage O de y tel que : $\forall z \in O$, $f(\phi(t,z)) < f(y)$. Comme il existe t' tel que $\phi(t',x) \in O$, il existe donc T $\in \mathbb{R}_+$ tel que, $f(\phi(T,x)) < f(y)$, contredisant le fait que y soit une valeur d'adhérence de la trajectoire à cause de la deuxième condition sur f.

On suppose maintenant que B est asymptotiquement stable, de bassin B(B). Nous allons construire une fonction de Liapunov adéquate sur B(B).
On pose $g : B(B) \to \mathbb{R}_+$ définie par : $g(x) = sup_{t \in \mathbb{R}_+} d(\phi(t,x), B)$ où d désigne la distance usuelle. g ainsi définie est continue. En effet, soit $x \in B(B)$. Si $x \notin B$, comme A est un attracteur, il existe un voisinage K compact de x tel que $d(\phi(t,y), B) \leq c < d(x,B)$, $\forall y \in K, t \geq T$ (les arguments pour ce résultats ont été vu lors des premières propriétés des attracteurs). D'où $g(x) = sup_{t \in [0,T]} d(\phi(t,x), B)$, et par continuité de $\phi(T, \cdot)$ la formule reste valable pour un voisinage compact K' de x. Comme $[0,T] \times K$ est compact, on en déduit que ϕ est uniformément continue sur cet ensemble. Il en résulte donc facilement que g est continue en x. Si $x \in B$ un raisonnement sensiblement pareil peut être mené pour montrer la continuité en x.

Il est clair que g est décroissante le long des trajectoires, mais elle ne l'est pas forcément strictement. On pose alors $f(x) = \int_0^\infty g(\phi(t,x)) e^{-t} dt$. f est bien continue (en appliquant le théorème de convergence dominée par exemple), décroissante le long des trajectoires. Supposons par l'absurde qu'elle ne vérifie pas la seconde condition du théorème. Alors, il existe $x \notin B$, $t > 0$ tels que $f(x) = f(\phi(t,x))$. Cela implique en particulier que $g(\phi(s,x)) = g(\phi(s+t,x))$, $\forall s \in \mathbb{R}_+$. On en déduit alors que $g(x) = g(\phi(t,x)) = g(\phi(2t,x)) = ... = g(\phi(kt,x))$, pour tout $k \in \mathbb{N}$. Ce qui est absurde car $g(\phi(t,x)) \to 0$. f est donc de la forme recherchée.

On peut dorénavant s'intéresser à la question : "a-t-on $V \subseteq B(B)$ ou $B(B) \subseteq V$ dans la réciproque ? La réponse est que, sans imposer plus de condition sur la fonction de Liapunov, on ne peut rien dire de la sorte. Des contre exemples existent (dans le Bhatia Szegö par exemple) pour les deux situations. Le prochain théorème nous renseigne sur la question lorsque f est uniformément non bornée. Nous ne donnerons pas de preuve de ce théorème, elle serait du même type que la précédente.

Définition :

Une fonction f définie sur un ensemble V est dite uniformément non bornée si, pour tout $C > 0$ il existe un sous-ensemble compact $K_C \subseteq V$, $K_C \neq V$ tel que pour tout $x \in V \setminus K_C$, $f(x) \geqslant C$.

Proposition :

Si une partie compacte $B \subseteq X$ est asymptotiquement stable, alors il existe une fonction f continue positive uniformément non bornée, définie sur B(B) vérifiant les propriétés (1) et (2).

Réciproquement, si il existe une fonction continue positive uniformément non bornée, définie sur un voisinage ouvert V de B, vérifiant (1) et (2), alors A est asymptotiquement stable et l'on a $V \subseteq B(B)$.

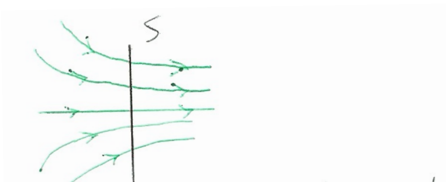
4.4 Théorème de Poincaré-Bendixon

Le but de cette partie est d'expliquer le théorème de Poincaré-Bendixson. Ce théorème permet de décrire l'aspect d'un attracteur (pour une trajectoire) dans le plan, soit, ici, pour une dynamique d'évolution à 3 stratégies. Sa démonstration, assez amusante, repose sur une construction impossible à réaliser lorsque l'on dessine sur une feuille, comme il sera expliqué plus loin. Pour simplifier la compréhension et les démonstrations, l'ensemble X de départ sera dorénavant considéré comme étant un ouvert de $\mathbb{R}^n$. Comprendre comment appliquer ce théorème à une trajectoire plane sur X en dimension 3 ne posera pas de problèmes.

La première étape est de se faire une idée de la forme du flot, localement, autour d'un point non stationnaire. On rappelle que pour tout $x \in X$, $\dot{\phi}(0,x) = V^F(x)$

Définition :

Une section locale en $x \in \mathring{X}$ est la donnée d'une partie S d'un hyperplan H de $\mathbb{R}^n$ telle que $\{x\} + S \subset X$ soit un ouvert de $(\{x\} + H)$ pour la topologie induite, qui a la propriété suivante : $\forall y \in \{x\} + S$, $V^F(x) \notin H$. Cela signifie que le flot "traverse" S.



Exemple de Section et du Flot la traversant

Ce qui va être intéressant maintenant, c'est que l'on va pouvoir décrire entièrement le comportement du flot au voisinage de ce point par la donnée du point d'intersection avec cette section et du temps t de cette intersection. Ceci est l'objet de la proposition suivante :

Proposition :

Soit S une section au point x. On garde les notations de la proposition précédente.
Il existe alors un ouvert de la forme $[-t_0, t_0] \times S'$ de $\mathbb{R} \times H$ tel que la fonction $\Theta : [-t_0, t_0] \times S' \to X$ définie par $\Theta(t, s) = \phi(t, x + s)$ soit un difféomorphisme sur son image.

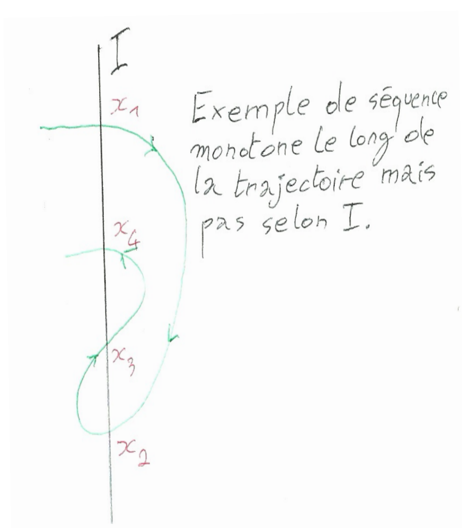
Preuve :

Soit θ définie comme dans la proposition.
Alors $\frac{\partial\theta}{\partial t}(0,0) = V^F(x)$ d'une part, et comme $\theta(0,s) = x + s$, $\frac{\partial\theta}{\partial s_i}(0,0) = e_i$ ($(e_i)_{1\leq i\leq n-1}$ étant une base de H). Cela signifie que la différentielle de θ au point (0,0) restreinte à H est l'identité. Or $V^F(x) \notin H$. On en conclut donc que la différentielle de θ est inversible en (0,0).
On applique ensuite le théorème d'inversion locale pour obtenir le résultat souhaité.

On se place maintenant dans le plan. Si l'on se donne une trajectoire issue d'un point x, le but est d'étudier comment cette courbe coupe les sections qu'elle traverse. Ceci est l'objet de la proposition suivante.

Définition :

Soit $(x_n = \phi(t_n, x))_n$ une suite de points, on dit que la séquence est monotone le long de la trajectoire si $t_n \leq t_{n+1}$.
On suppose que pour tout n, $x_n \in I$ où I est une droite affine dans $\mathbb{R}^2$. Elle est alors monotone selon I si $x_{n+1} - x_n = \lambda_n(x_1 - x_0)$, $\lambda_n \geq 0$.



Proposition :

Soit S=I une section locale pour le flot, et $(x_n = \phi(t_n, x))_n$ une suite de points appartenant à la trajectoire issue d'un même point x telle que $x_n \in x+S$

pour tout n. Alors si la séquence est monotone le long de la trajectoire, elle l'est aussi selon I.

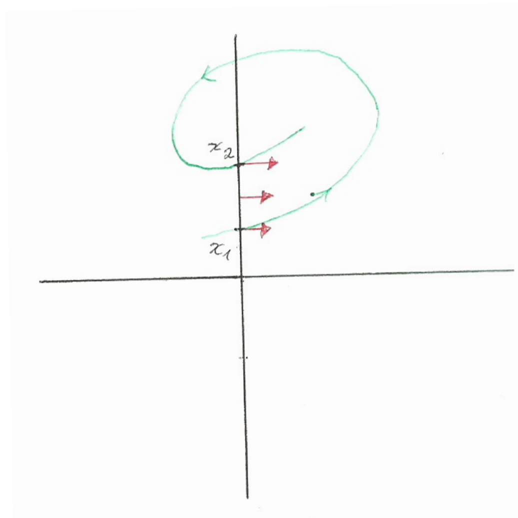
Preuve :

On suppose que $t_n \leq t_{n+1}$. Si l'on arrive à montrer le résultat pour $x_1,\ x_2\ et\ x_3$ Alors en itérant on obtiendra le résultat annoncé.

Soit S une section. Sans pertes de généralités, on peut supposer que $S = \{0\}\times]0,3[\subset \mathbb{R}^2$, que le premier point d'intersection est le point (0,1) et que le second est le point (0,2) (en effet, les transformation utilisées ne sont que des rotations, translations, symétries et homothéties et donc permettent de généraliser le résultat). On notera (e_1, e_2) la base usuelle du plan. Sur S, on doit avoir : $V^F(x) \notin Vect(e_2)$ D'où $\langle V^F(x), e_1\rangle \neq 0$. Par continuité cela impose qu'on l'on peut choisir, par exemple (l'autre cas étant similaire), que $\langle V^F(x), e_1\rangle > 0$ sur S.

A quoi ressemble alors la courbe décrite par $\phi(\cdot, x_1)$ entre le moment où elle passe par x_1 et celui où elle atteint x_2 ? En fait, on vérifie aisément à la main la propriété en essayant de faire le dessin avec un crayon. Pourtant, une justification claire nécessite un argument plus évolué, le théorème de Jordan.

On considère maintenant le lacet γ suivant : partant de x_1, on suit la courbe $\phi(t, x_1)$ jusqu'à atteindre x_2, puis on redescend de x_2 à x_1 en suivant S (ce lacet peut être facilement paramétré mais nous ne le ferons pas). Ce lacet est donc injectif, car la courbe entre x_1 et x_2 l'est, et car par définition de x_1 et x_2 la courbe entre x_1 et x_2 ne coupe pas le segment $[x_1, x_2]$. On peut donc lui appliquer le théorème de Jordan : ce lacet sépare le plan en 2 composantes connexes, l'une bornée, l'autre non, dont il est la frontière.

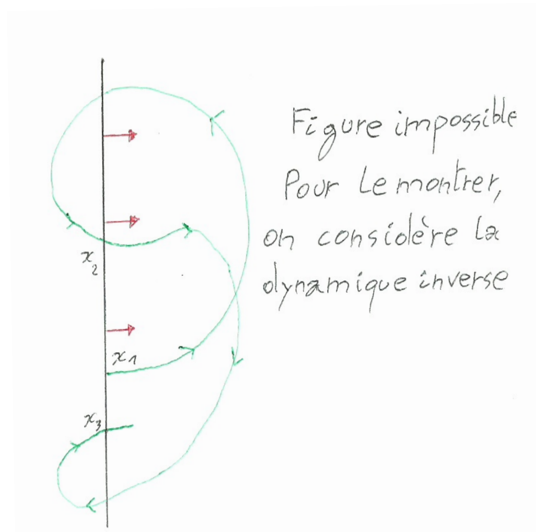


On peut donc supposer (l'autre cas étant symétrique) qu'à gauche de $]x_1, x_2[$ on soit dans la composante connexe non bornée, et qu'à droite l'on soit dans la composante connexe bornée. (ici, à gauche signifie, pour $y = x - \delta e_1$ avec $x \in]x_1, x_2[$ pour δ assez petit dépendant de x.

Comme $\langle V^F(x_2), e_1 \rangle > 0$, on a que pour t assez petit, $\phi(t, x_2)$ est dans la composante connexe bornée (car pour t et ϵ assez petits on a $\gamma \bigcap B(x_2, \epsilon) = \phi([-t, 0] \times \{x\}) \cup [x_2, x_2 - \epsilon e_1]$.

On suppose maintenant par l'absurde que $x_3 \in]x_1, x_2[$. Alors $\langle V^F(x_3), e_1 \rangle > 0$. D'où, de même, pour t assez petit, $\phi(-t, x_3)$ appartient à la composante connexe non bornée. On a donc montré que la courbe de x_2 à x_3 relie deux points dans les deux composantes connexes distinctes, sans couper γ, ce qui est absurde.

Montrons maintenant que x_3 ne peut pas non plus être en dessous de x_1. Supposons par l'absurde que ce soit le cas. Considérons alors la dynamique opposé à V^F telle que les trajectoires soient suivies à l'envers. S reste alors toujours une section. La courbe issue de x_3 passe par x_2, puis par x_1, ce qui est absurde, car $x_1 \in [x_3, x_2]$ et d'après le résultat précédent.
Nous venons donc de montrer le résultat !



Proposition :

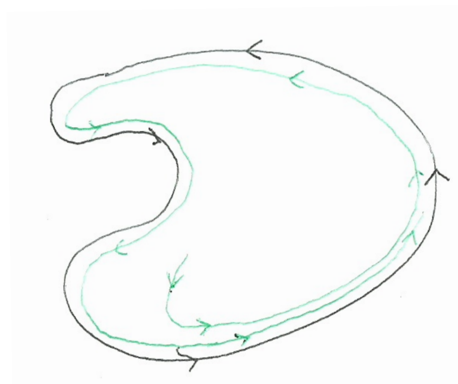
Soit $x \in X$, soit $y \in \omega(x)$, alors la trajectoire issue de y ne peut pas couper une section en plus d'un point.

Preuve :

On suppose par l'absurde que la trajectoire issue de y coupe une section S en 2 points distincts z_1 et z_2. Alors, par le même argument que dans les preuves précédentes, il existe deux voisinages distincts V_1 et V_2 de z_1 et z_2 tels que, pour tout $x \in V_i$ il existe un temps $t \in [-t_i, t_i]$ tel que $\phi(t, x) \in V_i \cap S$.
Or la trajectoire issue de x passe une infinité de fois dans chaque voisinage V_i car $z_i \in \omega(x)$. Donc d'après le premier point il va exister une suite de temps t_n strictement croissante telle que : $\phi(t_{2n}, x) \in V_1 \cap S$, $\phi(t_{2n+1}, x) \in V_2 \cap S$. Ce qui est absurde, vis à vis de la proposition précédente.

Théorème (Poincaré-Bendixson) :

Soit un flot Φ de classe C^1 défini sur un ouvert U du plan. Soit $x \in U$. Si $\omega(x)$ est compact et n'admet pas de point stationnaire, alors il existe $y \in U$ tel que la trajectoire de y soit périodique (c'est-à-dire qu'il existe $t > 0$ tel que $\phi(t, y) = y$) et tel que $\omega(x) = \phi(\mathbb{R} \times \{y\}) = \omega(y)$.



Remarque :

Ici, le théorème est donné sous une forme plus générale que celle requise pour la démonstration du théorème précédent. Comme X est compact, la condition de compacité de $\omega(x)$ est toujours remplie. Pour pouvoir appliquer ce théorème dans notre cas, il faut considérer à nouveau la dynamique définie sur un voisinage de X (pour répondre à la condition d'ouverture)et utiliser l'invariance de X sous cette dynamique pour s'assurer qu'à aucun moment on n'en est sorti. De plus, le théorème reste valable si l'on considère $\alpha(x) = \bigcap_{t \leq 0} \overline{\phi_{]-\infty;t]}(A)}$ pour la dynamique inverse, qui est le résultat que nous avons en pratique utilisé.

Preuve :

Nous allons d'abord montrer que si $y \in \omega(x)$ alors y appartient à une trajectoire périodique.
On a : $\omega(y) \subseteq \omega(x)$ (ce fait n'est pas difficile à voir en revenant aux définitions). De plus, comme y appartient au compact invariant $\omega(x)$, alors $\omega(y)$ est non vide.
Soit donc $z \in \omega(y)$. Comme $\omega(x)$ ne contient pas de points stationnaires, $V^F(z) \neq 0$. Cela signifie que l'on peut exhiber une section S concernant le point z. On note V l'ouvert de X, $z \in V$ tel qu'il existe un C^1 difféomorphisme θ entre $[-t_0, t_0] \times S\, et\, V$ (cf proposition concernant les sections). Comme $z \in \omega(y)$, il existe $t_1\, et\, t_2$ distincts tels que $\phi(t_1, y)$, $\phi(t_2, y) \in V$. Mais alors il existe s_1, $s_2 \in S$ et t'_1, $t'_2 \in [-t_0, t_0]$ tels que $\theta(t'_1, s_1) = \phi(t_1, y)$, $et\, \theta(t'_2, s_2) = \phi(t_2, y)$. D'où $\phi(t_1 - t'_1) = z + s_1$, et $\phi(t_2 - t'_2) = z + s_2$ (on peut de plus imposer que $t_i - t'_i \geq 0$ car on peut prendre t_i aussi grand que l'on veut et que t'_i est borné). Or d'après la proposition précédente, la courbe issue de y ne doit couper la section $\{x\} + S$ qu'en un point. D'où $\phi(t_1 - t'_1) = \phi(t_2 - t'_2)$. De plus, on peut s'assurer que $t_1 - t'_1 - t_2 > t_0$ ce qui garantit que $t_1 - t'_1 \neq t_2 - t'_2$. Il existe donc $t \in \mathbb{R}$ et $T > 0$ tels que $\phi(y, t) = \phi(y, t + T)$ La trajectoire de y est donc périodique et l'on a : $\phi(\mathbb{R} \times \{y\}) = \omega(y) \subseteq \omega(x)$

On veut maintenant montrer l'inclusion réciproque. Comme $V^F(y) \neq 0$, on peut exhiber une section S, un intervalle $[-t_0, t_0]$(on prendra $t_0 < T$), un voisinage ouvert V de y et un difféomorphisme θ comme dans la proposition précédente. De plus, ϕ est continue sur le compact $[-T - t_0, T + t_0] \times \bar{V}$ donc uniformément continue. En particulier, pour tout $\epsilon > 0$ il existe une boule $B(y, r_\epsilon) \subset V$ telle que : $\forall (t, z) \in [-T - t_0, T + t_0] \times B(y, r_\epsilon)$, $d(\phi(t, x), \phi(t, z)) < \epsilon$.

Pour tout $\epsilon > 0$ il existe t_1 tel que $\phi(t_1, x) \in B(y, r_\epsilon)$. Comme $B(y, r_\epsilon) \subset V$, il existe $t'_1 \in [-t_0, t_0]$ tel que $\phi(t_1 + t'_1, x) \in \{y\} + S$. On peut de plus imposer que $\phi(t_1 + t'_1, x) \in B(y, r_\epsilon)$. On a donc : $\forall t \in [-T, T]$, $d(\phi(t, y), \phi(t_1 + t'_1 + t, x)) < \epsilon$, on peut imposer en outre que $B(y, \epsilon) \subset V$. D'où en particulier $\phi(t_1 + t'_1 + T, x) \in V$, donc il existe $t'_2 \in [-t_0, t_0]$ tel que $\phi(t_1 + t'_1 + T + t'_2, x) \in S)$. De même on peut imposer (en modifiant les ϵ et par continuité) que $\phi(t_1 + t'_1 + T + t'_2, x) \in B(y, r_\epsilon)$. On peut donc construire un troisième point dans S, $\phi(t_1 + t'_1 + T + t'_2 + T + t'_3, x)$ Or la séquence des points d'intersection entre la courbe issue de x et la section en y doit être monotone, et tendre vers y. Par conséquent on a donc forcément $\phi(t_1 + t'_1 + T + t'_2 + T + t'_3, x) \in S \cap B(x, r_\epsilon)$, idem pour le quatrième point et ainsi de suite. Par récurrence pour tout n, le point $\phi(t_1 + t'_1 + T + ... + T + t'_n, x)$ est dans la boule $B(x, r_\epsilon)$. Comme $T > t_0$, la suite des temps considérés tend vers $+\infty$, et entre chaque temps $t_n = t_1 + t'_1 + T + ... + T + t'_n$ et $t_{n+1} = t_1 + t'_1 + T + ... + T + t'_n + T + t'n + 1$, on a $d(\phi(t_n + t, x), \omega(y)) < \epsilon$ par choix de $B(y, r_\epsilon)$. Ainsi, pour tout $t \geq t_1$ on a : $d(\phi(t, x), \omega(y)) < \epsilon$. D'où $d(\phi(t, x), \omega(y)) \to 0$. On vient de montrer que $\omega(x) \subseteq \omega(y)$.

5 Conclusion

Nous avons montré dans cet exposé comment essayer d'étudier un critère simple de rationalité : l'élimination des stratégies strictement dominées. Certaines dynamiques les éliminent, en particulier les variantes de celle des réplicateurs. Pour d'autres, on peut créer un jeu où de telles stratégies survivent. Dans le premier cas, la population, même si chaque individu agit sans avoir une parfaite connaissance du jeu, va asymptotiquement se comporter comme "rationnelle". Ceci est intéressant, car c'est une nouvelle sorte de rationalité, touchant une population et non forcément ses individus. Dans l'autre cas, dans un jeu avec des gains très changeants, avec une grande instabilité des trajectoires, trouver des stratégies optimales, ou du moins ne pas jouer celles strictement dominées, est beaucoup plus dur. Un exemple de dynamique du deuxième type est la dynamique BNN.
En plus de l'introduction aux dynamiques d'évolution, cet exposé aura permis d'étudier également certaines propriétés des systèmes dynamiques. La partie "outil" peut sembler importante face aux parties précédentes, mais c'est une conséquence de l'attrait de certains résultats, notamment le théorème de Poincaré-Bendixson.

6 Bibliographie

Analyse complexe et harmonique	Laure Saint-Raymond	2010	*ENS*
Evolutionary selection against dominated strategies	Josef Hofbauer Jörgen W.Weibull	1995	*Journal of economic literature*
Evolutionary Stability in asymmetric games	Larry Samuelson Jianbo Zhang	1992	*Journal of economic theory*
Isolated invariant sets and the morse index	Charles Conley	1976	*American Mathematical Society*
Stability theory of dynamical systems	NP Bhatia GP Szegö	1970	*Springer Verlag Berlin*
Survival of dominated strategies under evolutionnary dynamics	Josef Hofbauer William H.Sandholm	2010	