

Sur des problèmes de contrôlabilité et de stabilisation

Exposé de maîtrise proposé par Olivier Glass et Jean-Michel Coron

Vincent Calvez et Thibault Fally

Juin 2002

Table des matières

1	Introduction	3
2	Un premier pas vers la théorie du contrôle	3
2.1	Présentation du système	3
2.2	Définition de la contrôlabilité	3
2.3	Systèmes linéaires autonomes	4
2.4	Systèmes affines : première approche	5
3	Éléments de calcul chronologique	6
3.1	Points, difféomorphismes et champs de vecteurs	6
3.2	Exponentielle chronologique	8
3.3	Action d'un difféomorphisme sur un champ de vecteurs	9
4	Le Théorème de l'Orbite	10
4.1	Formulation du Théorème de l'Orbite	10
4.2	Théorème de Chow et Rashevsky	11
4.3	Preuve du Théorème de l'Orbite	12
4.4	Le cas analytique	14
4.5	Le théorème de Frobénius	15
5	Stabilisation des systèmes autonomes	16
5.1	Introduction	16
5.2	Cas des systèmes linéaires	17
5.3	Méthode de Lyapounov	19
5.4	Retour sur les systèmes linéaires	21
5.5	Principe de linéarisation	22
5.6	Théorème de stabilisation de Brockett	22
6	Contrôle en dimension infinie	24

1 Introduction

On étudie un système à paramètres évoluant au cours du temps. L'objectif du contrôle est de choisir ces paramètres pendant l'évolution de ce système de manière à le conduire d'un état donné à un état final déterminé. Par exemple, on modifie l'orientation et la vitesse d'une voiture afin de l'amener d'un endroit à un autre. On traitera dans cette étude les cas particuliers de systèmes régis par des équations différentielles (à paramètres).

Dans un premier temps, on va se familiariser avec le contrôle en présentant des notions de base. Puis, on développera des outils de géométrie différentielle qui nous permettront d'étudier la contrôlabilité d'un point de vue géométrique. Ensuite, on s'intéressera à la robustesse du contrôle à travers la notion de stabilité : si un système à l'équilibre est légèrement perturbé, peut-on le ramener vers l'équilibre en contrôlant les paramètres ? Enfin, on développera un exemple de contrôle en dimension infinie, c'est-à-dire de contrôle d'équations aux dérivées partielles.

2 Un premier pas vers la théorie du contrôle

2.1 Présentation du système

Soit \mathcal{I} un intervalle de \mathbb{R} (le temps). Soient \mathcal{X} un ouvert de \mathbb{R}^n (états du système) et $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^m$ (contrôles du système).

Soit $f : \mathcal{I} \times \mathcal{X} \times \mathcal{U} \rightarrow \mathcal{X}$ de classe \mathcal{C}^1 la fonction d'évolution du système.

Etant donné une certaine fonction de contrôle $u : \mathcal{I} \rightarrow \mathcal{U}$ bornée, $a \in \mathcal{X}$ et $\sigma \in \mathcal{I}$, le problème

$$\begin{cases} \dot{x} = f(t, x, u) \\ x(\sigma) = a \end{cases} \quad (1)$$

donne éventuellement lieu à une trajectoire $x : \mathcal{I} \rightarrow \mathcal{X}$.

Définition 1. *Le contrôle u est dit admissible si le problème admet effectivement une solution sur l'intervalle \mathcal{I} .*

Exemples :

- Un système linéaire est de la forme $\dot{x} = A(t)x + B(t)u$ avec $A : \mathcal{I} \rightarrow \mathcal{M}(n, n)$ et $B : \mathcal{I} \rightarrow \mathcal{M}(n, m)$.
- Un système affine (en contrôle) est de la forme $\dot{x} = f_0(x) + \sum_{i=1}^n f_i(x)u_i$. f_0 est la dérive du système.

2.2 Définition de la contrôlabilité

Définition 2. *Soient $a, b \in \mathcal{X}$. b peut-être atteint à partir de a si*

$$\exists \sigma, \tau \in \mathcal{I} \quad \exists \omega \in L^\infty([\sigma, \tau], \mathcal{U}) \text{ tels que la solution de } \begin{cases} \dot{x} = f(t, x, \omega(t)) \\ x(\sigma) = a \end{cases} \text{ vérifie } x(\tau) = b.$$

On dit aussi que a peut-être contrôlé jusqu'à b .

Le système est dit contrôlable si pour tout $(a, b) \in \mathcal{X}^2$, a peut être contrôlé jusqu'à b .

Systèmes autonomes : si la fonction f est indépendante du temps, on parle de système autonome. Si ω est un contrôle défini sur $[0, \sigma]$ qui relie a à b , et ϖ un contrôle défini sur $[0, \tau]$ qui relie b à c , on peut "concaténer" ω et $\varpi(\cdot - \sigma)$ pour obtenir un contrôle qui relie a à c en temps $\sigma + \tau$.

2.3 Systèmes linéaires autonomes

Dans le cas des systèmes linéaires autonomes, un critère très simple permet de reconnaître les systèmes contrôlables.

Pour deux matrices A et B respectivement dans $\mathcal{M}(n, n)$ et $\mathcal{M}(n, m)$, on note $\mathbf{R}(A, B)$ la matrice obtenue en concaténant les matrices $A^i B$ pour $i = 0 \dots n - 1$.

Proposition 1 (critère de contrôlabilité de Kalman). Soit $T > 0$. Le système $\dot{x}(t) = Ax(t) + B\omega(t)$ est contrôlable en temps T si et seulement si $\text{rang } \mathbf{R}(A, B) = n$

Démonstration.

La solution de

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + B\omega(t) \\ x(0) = a \end{cases}$$

est donnée par :

$$x(t) = e^{tA}a + \int_0^t e^{(t-s)A} B\omega(s) ds$$

A partir de a , on veut atteindre tous les points de l'espace à l'aide des contrôles ω , c'est-à-dire $\omega \rightarrow x(T)$ surjective.

L'image de cette application est à l'évidence un espace affine. Donc l'application n'est pas surjective si et seulement si il existe p vecteur ligne non nul tel que $\forall \omega p \int_0^T e^{(T-s)A} B\omega(s) ds = 0$ ou encore

$$\forall \omega \int_0^T p e^{-sA} B\omega(s) ds = 0$$

En particulier, pour le contrôle $\omega(t) := B^* e^{-tA} p^*$, on a

$$\int_0^T \|B^* e^{-sA} p^*\|^2 ds = 0$$

Donc $p e^{-sA} B = 0$. En dérivant successivement, on obtient que $p A^i B = 0$ pour $i = 1 \dots n$.

Réciproquement, si $\text{rang } \mathbf{R}(A, B) < n$, on peut trouver un vecteur ligne non nul ρ tel que $\rho A^i B = 0$ pour $0 \leq i \leq n - 1$. La relation de dépendance des A^i (Cayley-Hamilton) montre que $\rho A^i B = 0 \forall i \in \mathbb{N}$. Puisque

$$e^{-sA} B = \sum_{i=0}^{\infty} A^i B \frac{(-s)^i}{i!}$$

on a $\rho e^{-sA} B = 0$. Ainsi

$$\rho \int_0^T e^{-sA} B\omega(s) ds = 0$$

et l'application $\omega \rightarrow x(T)$ n'est pas surjective. □

Décomposition de Kalman. Notons b_j le j^{eme} vecteur colonne de B et

$$\mathcal{R}(A, B) := \text{Vect}(A^i b_j) = \text{Im} \mathbf{R}(A, B)$$

\mathcal{R} est le plus petit sous-espace contenant les colonnes de B et invariant par A .

On note $r = \dim \mathcal{R}(A, B)$. Choisissons un supplémentaire \mathcal{S} de \mathcal{R} dans \mathbb{R}^n , et notons $\{v_1, \dots, v_r\}$ et $\{w_{r+1}, \dots, w_n\}$ des bases de \mathcal{R} et \mathcal{S} . Si T est la matrice $(v_1, \dots, v_r, w_{r+1}, \dots, w_n)$, on a :

$$T^{-1} A T = \begin{pmatrix} A_1 & A_2 \\ 0 & A_3 \end{pmatrix} \text{ et } T^{-1} B = \begin{pmatrix} B_1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

où A_1 est une matrice $r \times r$. On note alors $\chi_i := \chi_{A_3}$, la partie incontrôlable de χ_A .

Dans cette décomposition, le système (A_1, B_1) est contrôlable.

2.4 Systèmes affines : première approche

Tout ce que l'on verra dans cette section sera formalisé et généralisé plus tard.

On considère des systèmes affines avec deux paramètres de contrôle, et sans dérive :

$$\dot{x} = f_1(x)u_1 + f_2(x)u_2$$

A partir de $a \in \mathcal{X}$ on peut se déplacer (infinitésimalement) dans les deux directions $f_1(a)$ et $f_2(a)$ à l'aide de contrôles constants. Dans certains cas, il est possible d'obtenir une direction supplémentaire :

Définition 3. Si $u \in \mathcal{U}$, on note P_u^t le flot de $f(\cdot, u)$

Notons P_1^t le flot correspondant à $u_1 = 1$ et $u_2 = 0$, c'est à dire à l'intégration de $\dot{x} = f_1(x)$, et P_2^t celui correspondant à $u_1 = 0$ et $u_2 = 1$ c'est à dire à l'intégration de $\dot{x} = f_2(x)$.

Définition 4. Soient f_1 et f_2 des fonctions \mathcal{C}^1 de \mathbb{R}^3 dans \mathbb{R}^3 . Le crochet de Lie de f_1 et f_2 , noté $[f_1, f_2]$, est défini par :

$$[f_1, f_2](x) = f_2'(x).f_1(x) - f_1'(x).f_2(x)$$

Proposition 2. Soit $a \in \mathcal{X}$. Si $\gamma(t) = P_2^{-t} \circ P_1^{-t} \circ P_2^t \circ P_1^t(a)$, alors

$$\gamma(\varepsilon) = x + [f_1, f_2](x)\varepsilon^2 + o(\varepsilon^2)$$

Démonstration.

Le calcul, assez fastidieux, correspond à un simple développement limité.

On peut partir de

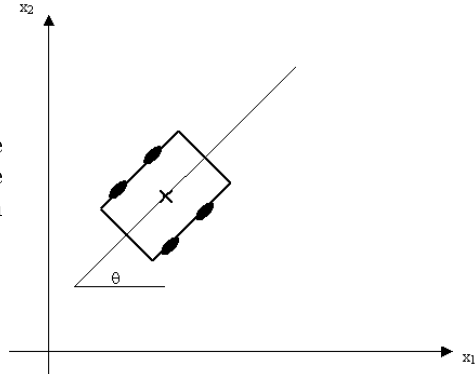
$$P_1^\varepsilon(x) = x + f_1(x)\varepsilon + f_1'(x).f_1(x)\frac{\varepsilon^2}{2} + o(\varepsilon^2)$$

On reviendra plus tard sur cette démonstration. □

Dans le cas où $[f_1, f_2] \notin \text{Vect}(f_1, f_2)$, on gagne ainsi une direction (infinitésimalement).

Exemple :

On étudie le mouvement simplifié d'une voiture : on modélise l'engin par son centre de masse $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$, et son orientation $\theta \in \mathbb{R}^2$ par rapport à l'axe x_1 .



Les mouvements autorisés sont :

1 on avance ou on recule avec une vitesse $u_1 \in \mathbb{R}$. Cela est régit par :

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = u_1 \cos(\theta) \\ \dot{x}_2 = u_1 \sin(\theta) \\ \dot{\theta} = 0 \end{cases}$$

2 on pivote autour du centre de masse avec une vitesse angulaire u_2 :

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = 0 \\ \dot{x}_2 = 0 \\ \dot{\theta} = u_2 \end{cases}$$

Au bilan, si l'on note $q = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \theta \end{pmatrix}$, $f_1(q) = \begin{pmatrix} \cos(\theta) \\ \sin(\theta) \\ 0 \end{pmatrix}$ et $f_2(q) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, alors le mouvement est régi par

$$\dot{q} = u_1 f_1(q) + u_2 f_2(q)$$

Appliquons le résultat précédent. Un calcul simple donne

$$[f_1, f_2](q) = \begin{pmatrix} \sin(\theta) \\ -\cos(\theta) \\ 0 \end{pmatrix}$$

Ceci donne la direction perpendiculaire à l'axe de la voiture. C'est ce que l'on cherche à faire lors d'un créneau. On le retrouve d'ailleurs dans l'expression

$$P_2^{-t} \circ P_1^{-t} \circ P_2^t \circ P_1^t(q)$$

\longleftrightarrow on avance, on tourne, on recule, et on tourne dans le sens inverse : c'est la manœuvre du créneau.

3 Éléments de calcul chronologique

L'objectif de cette section est d'introduire le calcul chronologique, qui permet de travailler non plus sur une variété lisse M mais sur l'algèbre commutative des fonctions lisses sur M .

3.1 Points, difféomorphismes et champs de vecteurs

Chaque point $q \in M$ définit un morphisme de l'algèbre $C^\infty(M)$ dans \mathbb{R} :

$$\hat{q} : C^\infty(M) \rightarrow \mathbb{R}, \quad \hat{q}a = a(q), a \in C^\infty(M).$$

qui vérifie :

$$\begin{aligned} \hat{q}(a + b) &= \hat{q}a + \hat{q}b, & a, b \in C^\infty(M), \\ \hat{q}(a \cdot b) &= (\hat{q}a) \cdot (\hat{q}b), & a, b \in C^\infty(M), \\ \hat{q}(\alpha \cdot a) &= \alpha \cdot \hat{q}a, & \alpha \in \mathbb{R}, a \in C^\infty(M). \end{aligned}$$

Il y a en outre une correspondance inverse :

Proposition 3. *Soit $\phi : C^\infty(M) \rightarrow \mathbb{R}$ un morphisme d'algèbre non trivial. Alors il existe un point $q \in M$ tel que $\phi = \hat{q}$.*

Démonstration. Soit ϕ un tel morphisme. $\text{Ker}\phi$ est un idéal maximal. Il suffit donc de montrer qu'il existe un point $q \in M$ tel que $\text{Ker}\phi \subset I_q$ l'idéal des fonctions nulles en q .

Supposons par l'absurde que

$$\forall q \in M, \exists b_q \in \text{Ker}\phi, O_q \subset M \text{ tel que } b_q|_{O_q} > 0.$$

Soit $e_k, k \in \mathbb{N}$ une partition de l'unité avec des supports compacts. Posons alors $a = \sum_{k=1}^{\infty} k e_k \in C^\infty(M)$. Si $\phi(a) = \alpha$ alors $a - \alpha \in \text{Ker}\phi$. Par ailleurs, la fonction a est construite de façon qu'elle diverge vers $+\infty$ en l' ∞ . Donc : $\exists K$ compact de M tel que $a(q) > \alpha, \forall q \in M \setminus K$.

Soit une suite finie $q_i \in M$ tel que K soit recouvert par les O_{q_i} . Prenons alors f_1, \dots, f_n une partition de l'unité de M subordonnée aux O_{q_i} et à $M \setminus K$. Nous avons alors une fonction de $\text{Ker}\phi$:

$$c = f_0(a - \alpha) + \sum_{i=1}^n f_i b_{q_i}$$

qui est strictement positive sur M . Or :

$$1 = \phi(c) \cdot \phi\left(\frac{1}{c}\right)$$

Donc $\phi(c) \neq 0$. Absurde. □

Remarque : La topologie de M peut être reconstituée à partir de la topologie faible sur l'espace de ces fonctionnelles sur $C^\infty(M)$:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} q_n = q \quad \text{ssi} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \hat{q}_n a = \hat{q} a \quad \forall a \in C^\infty(M)$$

Chaque difféomorphisme $P : M \rightarrow M$ définit un automorphisme de l'algèbre $C^\infty(M)$:

$$\begin{aligned} \hat{P} : C^\infty(M) &\rightarrow C^\infty(M), & \hat{P} &\in \text{Aut}(C^\infty(M)), \\ (\hat{P}a)(q) &= a(P(q)), & q &\in M, \quad a \in C^\infty(M), \end{aligned}$$

i.e., \hat{P} agit comme un changement de variable de la fonction a . Symétriquement, tout automorphisme de $C^\infty(M)$ a cette forme :

Proposition 4. *Tout automorphisme $A : C^\infty(M) \rightarrow C^\infty(M)$ est de la forme \hat{P} pour un certain $P \in \text{Diff}M$.*

Démonstration. (abrégée) Soit $A \in \text{Aut}(C^\infty(M))$. Soit un point $q \in M$. Alors la composée :

$$\hat{q} \circ A : C^\infty(M) \rightarrow \mathbb{R}$$

est un morphisme d'algèbre; il est donc de la forme $\widehat{P(q)}$ où $P(p) \in M$ et on obtient :

$$\hat{q} \circ A = \widehat{P(q)} = \hat{q} \circ \hat{P} \quad \forall q \in M,$$

i.e.,

$$A = \hat{P},$$

et P est le difféomorphisme requis. □

Rappelons que l'on peut également caractériser les vecteurs tangents et les champs de vecteurs par leur action sur l'algèbre $C^\infty(M)$ (dérivée de Lie).

A chaque vecteur tangent $v \in T_q M$, on associe une forme linéaire :

$$\hat{v} : C^\infty(M) \rightarrow \mathbb{R}$$

$$\hat{v}(a) = D_q a(v)$$

qui satisfait la règle de Leibniz :

$$\hat{v}(ab) = (\hat{v}a)b(q) + a(q)(\hat{v}b), \quad a, b \in C^\infty(M).$$

A chaque champ de vecteur $V \in \text{Vec}M$, on associe une dérivation :

$$\hat{V} : C^\infty(M) \rightarrow C^\infty(M)$$

$$(\hat{q} \circ \hat{V})(a) = D_q a(V(q)), \quad \forall q \in C^\infty(M)$$

tel que :

$$\hat{V}(ab) = (\hat{V}a)b + a(\hat{V}b), \quad a, b \in C^\infty(M),$$

Dans la suite de cette section, nous ne travaillerons plus qu'avec ces objets linéaires. Nous n'écrirons plus que $q \circ P$ au lieu de $\hat{q} \circ \hat{P}$, l'ambiguïté étant levée.

Remarque : Ces opérateurs sont munis des semies-normes usuelles construites à partir des semies-normes sur $C^\infty(M)$:

$$\|a\|_{s,K} = \sup\{|\partial^\alpha a(q)| \mid q \in K, \alpha \in \mathbb{N}^N, |\alpha| \leq s\}$$

où M est plongée dans \mathbb{R}^N et K est un compact de M .

3.2 Exponentielle chronologique

Considérons l'équation différentielle :

$$\dot{q} = V(q), \quad q(0) = q_0,$$

où $V \in VecM$. On étudie le flot généré par ce champ. Cette équation se réécrit sous forme linéaire :

$$\dot{q} = q(t) \circ V, \quad q(0) = q_0,$$

Le flot défini par

$$P^t : q_0 \mapsto q(t, q_0)$$

est l'unique solution de l'équation :

$$\dot{P}^t = P^t \circ V, \quad P^0 = Id,$$

Le flot P^t est appelé l'exponentielle chronologique du champ V et est noté :

$$P^t = e^{tV}$$

Développons maintenant l'exponentielle chronologique en une série asymptotique qui justifiera nos notations :

on réécrit l'équation différentielle sous forme intégrale :

$$q(t) = q_0 + \int_0^t q(\tau) \circ V d\tau$$

puis on substitue plusieurs fois $q(t)$ par cette expression dans le membre de droite :

$$\begin{aligned} q(t) &= q_0 + \int_0^t \left(q_0 + \int_0^{\tau_1} q(\tau_2) \circ V d\tau_2 \right) d\tau_1 \\ &= q_0 \circ (Id + tV) + \int_0^t (t - \tau) q(\tau) \circ V^2 d\tau \\ &= q_0 \circ (Id + tV + \dots + \frac{t^n}{n!} V^n) + \int_0^t \frac{(t - \tau)^n}{n!} q(\tau) \circ V^{n+1} d\tau \\ &= q_0 \circ \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} V^n \right) \end{aligned}$$

Cette dernière égalité est juste formelle. La fonction $t \mapsto q(t) \circ a$ (où $a \in C^\infty(M)$) n'est pas nécessairement égale à sa série de Taylor. Pour tout champ $V \in VecM$ non nul, on peut toujours trouver une fonction $a \in C^\infty(M)$ sur laquelle le membre de droite ne converge pas vers le membre de gauche. Cependant, cette série vérifie des propriétés asymptotiques :

$$\| (e^{tV} - \sum_{n=0}^m \frac{t^n}{n!} V^n) a \|_{s,K} = O(t^{m+1})$$

3.3 Action d'un difféomorphisme sur un champ de vecteurs

Calculons le premier terme non nul dans le développement asymptotique de la courbe suivante, où $V, W \in \text{Vec}M$:

$$\begin{aligned}
 q(t) &= q \circ e^{tV} \circ e^{tW} \circ e^{-tV} \circ e^{-tW} \\
 &= q \circ (Id + tV + \frac{t^2}{2}V^2 + \dots) \circ (Id + tW + \frac{t^2}{2}W^2 + \dots) \\
 &\quad \circ (Id - tV + \frac{t^2}{2}V^2 + \dots) \circ (Id - tW + \frac{t^2}{2}W^2 + \dots) \\
 &= q \circ (Id + t(V+W) + \frac{t^2}{2}(V^2 + 2V \circ W + W^2) + \dots) \\
 &\quad \circ (Id - t(V+W) + \frac{t^2}{2}(V^2 + 2V \circ W + W^2) + \dots) \\
 &= q \circ (Id + t^2(V \circ W - W \circ V) + \dots).
 \end{aligned}$$

Il s'en suit que le crochet de Lie, considéré comme un opérateur sur $C^\infty(M)$, est :

$$[V, W] = V \circ W - W \circ V.$$

Soit un vecteur tangent $v \in T_qM$ et un difféomorphisme $P \in \text{Diff}M$. On note $P * v \in T_{P(q)}$ le vecteur vitesse en 0 de l'image d'une courbe $t \mapsto q(t)$ ayant un vecteur vitesse v en 0. Nous affirmons que :

$$P * v = v \circ P.$$

pris comme fonctionnelle. En effet :

$$\begin{aligned}
 (P * v)a &= \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} a(P(q(t))) \\
 &= \left(\left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} q(t) \right) \circ P a \\
 &= v \circ P a, \quad a \in C^\infty(M)
 \end{aligned}$$

Soit $V \in \text{Vec}M$. Trouvons $P * V$.

$$\begin{aligned}
 q \circ P \circ (P * V) &= P(q) \circ (P * V) = P * (V(q)) = V(q) \circ P \\
 &= q \circ V \circ P \text{ pour tout } q \in M
 \end{aligned}$$

Ainsi :

$$P \circ (P * V) = V \circ P$$

d'où :

$$P * V = P^{-1} \circ V \circ P$$

L'action de P conserve la composition et le crochet de Lie :

$$P * (V \circ W) = (P * V) \circ (P * W),$$

$$P * [V, W] = [P * V, P * W].$$

Soit P^t une famille de difféomorphismes tel que $V = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} P^t$. Introduisons les notations :

$$AdP = P^{-1} * \text{ et } adV = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} AdP^t$$

On a :

$$\begin{aligned}(adV)W &= \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} (P^t \circ W \circ (P^t)^{-1}) = V \circ W - W \circ V \\ &= [V, W]\end{aligned}$$

En dérivant

$$AdP^t[X, Y] = [AdP^t X, AdP^t Y]$$

on retrouve l'identité de Jacobi :

$$\begin{aligned}[V, [X, Y]] &= [[V, X], Y] + [X, [V, Y]] \\ [Z, [X, Y]] + [Y, [Z, X]] + [X, [Y, Z]] &= 0\end{aligned}$$

Considérons $P^t = e^{tV}$. AdP^t vérifie :

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}(AdP^t)X &= \frac{d}{dt}(P^t \circ X \circ (P^t)^{-1}) \\ &= P^t \circ X \circ V \circ (P^t)^{-1} - P^t \circ X \circ V \circ (P^t)^{-1} \\ &= (AdP^t)[V, X] \\ &= (AdP^t)(adV)X\end{aligned}$$

AdP^t peut être considéré comme la solution de

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}(AdP^t) &= (AdP^t) \circ adV \\ AdP^0 &= Id\end{aligned}$$

On a donc

$$AdP^t = e^{tadV}$$

On peut également vérifier que

$$\begin{aligned}(AdP)(aX) &= (Pa)(AdP)X. \\ (adX)(aY) &= (Xa)Y + a(adX)Y, \\ (AdP)e^{tV} &= e^{t(AdP)V},\end{aligned}$$

4 Le Théorème de l'Orbite

4.1 Formulation du Théorème de l'Orbite

Soit $\mathcal{F} \subset VecM$ un ensemble de champs de vecteurs lisses. Nous supposons que les flots associés sont définis sur \mathbb{R} tout entier. Considérons l'ensemble des points de M atteignables à partir d'un point $q_0 \in M$ à l'aide d'actions successives d'une suite finie de champs de \mathcal{F} , appelée l'orbite de q_0 :

$$\mathcal{O}_{q_0} = \{q_0 \circ e^{t_1 f_1} \circ \dots \circ e^{t_k f_k} \mid t_i \in \mathbb{R}, f_i \in \mathcal{F}, k \in \mathbb{N}\},$$

Le Théorème de l'Orbite (Nagano - Sussmann) décrit la structure d'un tel ensemble. Nous avons besoin d'introduire le groupe de difféomorphismes de M engendré par les flots des champs de \mathcal{F} :

$$\mathcal{P} = \{e^{t_1 f_1} \circ \dots \circ e^{t_k f_k} \mid t_i \in \mathbb{R}, f_i \in \mathcal{F}, k \in \mathbb{N}\} \subset DiffM$$

Le Théorème de l'Orbite s'énonce ainsi :

Théorème 5. *Soit $\mathcal{F} \subset VecM$ et $q_0 \in M$. Alors :*

- (1) \mathcal{O}_{q_0} est une sous-variété immergée de M .
(2) $T_q \mathcal{O}_{q_0} = \text{vect}\{q \circ (AdP)f \mid P \in \mathcal{P}, f \in \mathcal{F}\}$, $q \in \mathcal{O}_{q_0}$.

Rappel : un sous-ensemble W de M est une sous-variété immergée s'il existe une variété lisse N et une immersion injective Φ telle que $W = \Phi(N)$. Un voisinage O_x d'un point $x \in W$ suffisamment petit est une sous-variété de M , mais W tout entier peut ne pas être une sous-variété de M . La topologie de W peut être plus forte que celle induite par la topologie de M .

Citons un exemple classique. Considérons l'équation réduite associée à un oscillateur à deux degrés de liberté :

$$\begin{aligned} \dot{z} &= i\alpha z, & \alpha \in \mathbb{R} \\ \dot{w} &= i\beta w, & \beta \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

Cette équation a pour solution

$$\begin{aligned} z(t) &= e^{i\alpha t} z(0), \\ w(t) &= e^{i\beta t} w(0). \end{aligned}$$

Les solutions sont définies sur le tore \mathbb{T}^2 :

$$\mathbb{T}^2 = \{(z, w) \in \mathbb{C}^2 \mid |z| = \text{const}, |w| = \text{const}\}.$$

Si le quotient $\frac{\beta}{\alpha}$ est irrationnel, alors la trajectoire (i.e. l'orbite associée à un seul champ de vecteurs) est dense dans le tore et ne constitue pas une sous-variété mais seulement une sous-variété immergée.

4.2 Théorème de Chow et Rashevsky

Avant de démontrer le Théorème de l'Orbite, nous énoncerons un corollaire classique.

Soit \mathcal{O}_{q_0} l'orbite de q_0 associée à une famille $\mathcal{F} \subset \text{Vec}M$. Etant donné que la courbe suivante est dans \mathcal{O}_{q_0} :

$$t \mapsto q \circ e^{tf_1} \circ e^{tf_2} \circ e^{-tf_1} \circ e^{-tf_2} \in \mathcal{O}_{q_0},$$

le vecteur tangent $[f_1, f_2](q)$ est dans $T_q \mathcal{O}_{q_0}$. Soit $\text{Lie}\mathcal{F}$ l'algèbre de Lie engendrée par \mathcal{F} . Nous obtenons alors la proposition suivante :

Proposition 6.

$$\text{Lie}_q \mathcal{F} \subset T_q \mathcal{O}_{q_0}$$

$\forall q \in \mathcal{O}_{q_0}$, où $\text{Lie}_q \mathcal{F} = \{q \circ V \mid V \in \text{Lie}\mathcal{F}\}$.

Le Théorème de Chow et Rashevsky qui s'en suit est très utilisé en théorie du contrôle (voir l'exemple du stationnement en créneau) :

Théorème 7. Soit M une variété connexe et $\mathcal{F} \subset \text{Vec}M$ tel que :

$$\text{Lie}_q \mathcal{F} = T_q M \quad \forall q \in M,$$

alors :

$$\mathcal{O}_{q_0} = M \quad \forall q_0 \in M.$$

Nous renvoyons au paragraphe sur le Théorème de Frobénius pour l'étude du cas opposé, où $\text{Lie}\mathcal{F} \subset \mathcal{F}$, avec \mathcal{F} sous-module de $\text{Vec}M$. On a alors : $T_q \mathcal{O}_{q_0} = \text{Lie}_q \mathcal{F} = q \circ \mathcal{F}$.

4.3 Preuve du Théorème de l'Orbite

Introduisons quelques notations :

$$(Ad\mathcal{P})\mathcal{F} = \{(AdP)f \mid P \in \mathcal{P}, f \in \mathcal{F}\} \subset VecM,$$

$$\Pi_q = vect\{q \circ (Ad\mathcal{P})\mathcal{F}\} \subset T_qM.$$

Ce dernier espace sera l'espace tangent de $T_q\mathcal{O}_{q_0}$.

Lemme 8. $dim\Pi_q = dim\Pi_{q_0}$ pour tout $q \in \mathcal{O}_{q_0}$, $q_0 \in M$.

Démonstration. Si $q \in \mathcal{O}_{q_0}$, alors $q = q_0 \circ Q$ pour un certain $Q \in \mathcal{P}$. Prenons un élément quelconque $q_0 \circ (AdP)f$ de Π_{q_0} , $P \in \mathcal{P}$, $f \in \mathcal{F}$. On a alors :

$$\begin{aligned} Q * (q_0 \circ (AdP)f) &= q_0 \circ (AdP)f \circ Q \\ &= q_0 \circ P \circ f \circ P^{-1} \circ Q \\ &= (q_0 \circ Q) \circ (Q^{-1} \circ P \circ f \circ P^{-1} \circ Q) \\ &= q \circ Ad(Q^{-1} \circ P)f \in \Pi_q \end{aligned}$$

puisque $Q^{-1} \circ P$ est dans \mathcal{P} .

Nous avons $Q * \Pi_{q_0} \subset \Pi_q$, et donc : $dim\Pi_{q_0} \leq dim\Pi_q$. Comme q et q_0 sont interchangeable, on a l'égalité. \square

Prouvons maintenant le Théorème de l'Orbite.

La variété M est partitionnée en orbites disjointes. Nous devons introduire un topologie plus forte pour laquelle ces orbites sont les composantes connexes.

Pour tout point $q \in M$, notons $m = dim\Pi_q$ et prenons des éléments $V_1, \dots, V_m \in (Ad\mathcal{P})\mathcal{F}$ qui forment une base de Π_q . Introduisons l'application :

$$G_q : (t_1, \dots, t_m) \mapsto q \circ e^{t_1 V_1} \circ \dots \circ e^{t_m V_m}, \quad t_i \in \mathbb{R}$$

On a :

$$\left. \frac{\partial G_q}{\partial t_i} \right|_{t_i=0} = V_i(q).$$

Dans un voisinage O_0 suffisamment petit de l'origine $0 \in \mathbb{R}^m$:

$$\frac{\partial G_q}{\partial t_1} \wedge \dots \wedge \frac{\partial G_q}{\partial t_m} \neq 0$$

dans O_0 , i.e., $G_q|_{O_0}$ est une immersion.

Les ensembles de la forme $G_q(O_0)$ sont les candidats naturels pour la base de topologie sur M . Nous allons vérifier certaines propriétés de ces ensembles.

- (1) Puisque les applications G_q sont suffisamment régulières, les ensembles $G_q(O_0)$ sont des sous-variétés de dimension m de M , pour des voisinages O_0 assez petits.
- (2) Montrons que $G_q(O_0) \subset \mathcal{O}_q$. Chaque élément V_i de la base de Π_q est de la forme : $V_i = (AdP_i)f_i$, $P_i \in \mathcal{P}$, $f_i \in \mathcal{F}$. Ainsi :

$$\begin{aligned} e^{tV_i} &= e^{t(AdP_i)f_i} \\ &= e^{tP_i \circ f_i \circ P_i^{-1}} \\ &= P_i \circ e^{tf_i} \circ P_i^{-1} \in \mathcal{P} \end{aligned}$$

et

$$G_q(t) = q \circ e^{tV_i} \in \mathcal{O}_q, \quad t \in O_0.$$

- (3) Montrons que $D_t G(T_t \mathbb{R}^m) = \Pi_{G(t)}$, $t \in O_0$. Puisque $rg D_t G = m$ sur O_0 , il suffit de montrer que $\left. \frac{\partial G_q}{\partial t_i} \right|_t \in \Pi_{G(t)}$ pour $t \in O_0$.

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial G_q}{\partial t_i} \right|_t &= \frac{\partial}{\partial t_i} q \circ e^{t_1 V_1} \circ \dots \circ e^{t_m V_m} \\ &= q \circ e^{t_1 V_1} \circ \dots \circ e^{t_i V_i} \circ V_i \circ e^{t_{i+1} V_{i+1}} \circ \dots \circ e^{t_m V_m} \\ &= q \circ e^{t_1 V_1} \circ \dots \circ e^{t_m V_m} \circ Q^{-1} \circ V_i \circ Q \end{aligned}$$

où $Q = e^{t_{i+1} V_{i+1}} \circ \dots \circ e^{t_m V_m} \in \mathcal{P}$,

$$= G_q(t) \circ Q^{-1} \circ V_i \circ Q = G_q(t) \circ (Ad Q^{-1}) V_i \in \Pi_{G(t)}$$

- (4) Prouvons maintenant que les $G_q(O_0)$ forment une base de topologie de M .

Soit $q, \check{q} \in M$, et $G_q(O_0), G_{\check{q}}(\check{O}_0), V_i, \check{V}_i$ les ouverts et les champs de vecteurs associés. Soit $\tilde{q} \in G_q(O_0) \cap G_{\check{q}}(\check{O}_0)$, il faut trouver \tilde{O}_0 tel que

$$G_{\tilde{q}}(\tilde{O}_0) \subset G_q(O_0) \cap G_{\check{q}}(\check{O}_0).$$

Considérons l'application

$$G_{\tilde{q}} : (t_1, \dots, t_m) \mapsto \tilde{q} \circ e^{t_1 \tilde{V}_1} \circ \dots \circ e^{t_m \tilde{V}_m}$$

Il faut montrer que pour (t_1, \dots, t_m) suffisamment petit,

$$G_{\tilde{q}}(t_1, \dots, t_m) \in G_q(O_0).$$

On procède successivement sur chacun des \tilde{V}_i . D'après la propriété (3), $\tilde{V}_1(q) \in \Pi_q$ pour $q \in G_q(O_0)$ suffisamment proche de \tilde{q} . Puisque $G_q(O_0)$ est une sous-variété et que $\Pi_q = T_q G_q(O_0)$, $\tilde{q} \circ e^{t_1 \tilde{V}_1} \in G_q(O_0)$. On répète l'opération m fois pour obtenir le résultat voulu.

On note désormais $M^{\mathcal{F}}$ la variété M munie de la nouvelle topologie forte.

- (5) Pour chaque $q_0 \in M$, l'orbite \mathcal{O}_{q_0} est une composante connexe de $M^{\mathcal{F}}$. En effet, elle est...

...connexe : chaque application $t \mapsto q \circ e^{tf}$, $f \in \mathcal{F}$ est continue. l'orbite \mathcal{O}_{q_0} est donc connexe par arcs.

...ouverte : $G_q(O_q) \subset \mathcal{O}_{q_0}$ pour tout $q \in \mathcal{O}_{q_0}$

...et fermée : Si q_n est une suite de \mathcal{O}_{q_0} qui tend vers q dans $M^{\mathcal{F}}$, alors, pour n assez grand, q_n est aussi dans \mathcal{O}_q . $\mathcal{O}_{q_0} \cap \mathcal{O}_q \neq \emptyset$, ce qui implique $\mathcal{O}_{q_0} = \mathcal{O}_q$.

- (6) La structure lisse des \mathcal{O}_{q_0} est donnée par les G_q où $q \in \mathcal{O}_{q_0}$. Notons que la dimension de ces orbites peut changer avec q_0 .

- (7) Grâce à la propriété (3), $T_q \mathcal{O}_{q_0} = \Pi_q$, $q \in \mathcal{O}_{q_0}$.

La preuve du Théorème de l'Orbite est terminée.

Remarque : La description de l'espace tangent de \mathcal{O}_{q_0} n'est pas très explicite : la structure du groupe \mathcal{P} est en général assez complexe. Nous avons cependant :

$$Lie_q \mathcal{F} \subset T_q \mathcal{O}_{q_0}.$$

4.4 Le cas analytique

En général, l'inclusion $Lie_q \mathcal{F} \subset T_q \mathcal{O}_{q_0}$ est stricte.

Prenons par exemple $M = \mathbb{R}^2$ et $\mathcal{F} = \left\{ \frac{\partial}{\partial x_1}, a(x_1) \frac{\partial}{\partial x_1} \right\}$, où a est lisse à support compact.

Alors M n'a qu'une seule orbite mais $Lie_q \mathcal{F} \neq T_q M = \mathbb{R}^2$.

En effet, lorsque $x_1 \notin \text{Supp } a$, $Lie_q \mathcal{F} = \text{vect} \left\{ \frac{\partial}{\partial x_1} \right\} \neq \mathbb{R}^2$.

Cette partie étudie le cas analytique où l'égalité a lieu.

Nous utiliserons le lemme suivant :

Lemme 9. *Soit $\mathcal{V} \subset \text{Vec} M$ un module de type fini sur $C^\infty(M)$. Soit $X \in \text{Vec} M$. Supposons que :*

$$(adX)\mathcal{V} = \{(adX)V \mid V \in \mathcal{V}\} \subset \mathcal{V}.$$

Alors

$$Ad e^{tX} \mathcal{V} = \mathcal{V}.$$

Nous avons alors le théorème suivant :

Théorème 10. *Soit $\mathcal{F} \subset \text{Vec} M$. Supposons que le module $Lie \mathcal{F}$ est localement de type fini sur $C^\infty(M)$. Alors*

$$T_q \mathcal{O}_{q_0} = Lie_q \mathcal{F},$$

pour chaque orbite \mathcal{O}_{q_0} et tout $q \in \mathcal{O}_{q_0}$.

Un sous-module $\mathcal{V} \subset \text{Vec} M$ est dit localement de type fini, si la restriction de \mathcal{V} au voisinage de tout point de M .

Dans le cas analytique (où M et \mathcal{F} sont analytiques), $Lie \mathcal{F}$ est localement de type fini sur $C^\infty(M)$. Cela découle du caractère noethérien de l'anneau des germes de fonctions analytique.

Démontrons d'abord le théorème.

Démonstration. D'après le Théorème de l'Orbite,

$$T_q \mathcal{O}_{q_0} = \text{vect} \{ q \circ Ad(e^{t_1 f_1} \circ \dots \circ e^{t_k f_k}) f \mid f_i, f \in \mathcal{F}, t_k \in \mathbb{R}, k \in \mathbb{N} \}$$

Par définition,

$$(adf)Lie \mathcal{F} \subset Lie \mathcal{F} \quad \forall f \in \mathcal{F}.$$

On applique le lemme :

$$(Ade^{tf})Lie \mathcal{F} \subset Lie \mathcal{F}$$

C'est pourquoi

$$Ad(e^{t_1 f_1} \circ \dots \circ e^{t_k f_k}) f = Ade^{t_1 f_1} \circ \dots \circ Ade^{t_k f_k} f \in Lie \mathcal{F}$$

Et donc

$$T_q \mathcal{O}_{q_0} \subset Lie_q \mathcal{F},$$

$$T_q \mathcal{O}_{q_0} = Lie_q \mathcal{F}.$$

□

Démontrons maintenant le lemme.

Démonstration. Soient V_1, \dots, V_k des champs de vecteurs qui engendrent \mathcal{V} . Par hypothèse,

$$[X, V_i] = \sum_{j=1}^k a_{ij} V_j$$

où $a_{ij} \in C^\infty(M)$. Nous devons prouver que le champ de vecteur suivant est dans \mathcal{V} :

$$V_i(t) = (Ade^{tX})V_i = e^{tadX} V_i$$

Or :

$$\begin{aligned}\dot{V}_i(t) &= e^{tadX} [X, V_i] = e^{tadX} \sum_{j=1}^k a_{ij} V_j \\ &= \sum_{j=1}^k (e^{tX} a_{ij}) V_j(t).\end{aligned}$$

La solution $(V_1(t), \dots, V_k(t))$ de cette équation différentielle s'exprime linéairement en fonction des conditions initiales :

$$V_i(t) = \sum_{j=1}^k \gamma_{ij}(t) V_j(0) \in \mathcal{V}$$

□

Remarque : Dans le cas analytique, on peut aussi démontrer le théorème en partant de la convergence de la série exponentielle.

4.5 Le théorème de Frobénius

Ce paragraphe décrit le cas opposé du théorème de Chow et Rashevsky, c'est-à-dire le cas où $Lie\mathcal{F} \subset \mathcal{F}$, avec \mathcal{F} sous-module de $VecM$. On a alors : $T_q\mathcal{O}_{q_0} = Lie_q\mathcal{F} = q \circ \mathcal{F}$.

Plus généralement, considérons une distribution $\Delta \subset TM$, i.e. une application lisse qui, à $q \in M$, associe un sous-espace Δ_q de T_qM . Une telle distribution est dite intégrable s'il existe, pour chaque $q \in M$, une sous-variété immergée N_q telle que $T_{\tilde{q}}N_q = \Delta_{\tilde{q}}$, $\forall \tilde{q} \in N_q$.

Une distribution de dimension un partout est intégrable. Une distribution quelconque n'est pas intégrable en général. Cherchons des conditions nécessaires. Introduisons

$$\bar{\Delta} = \{V \in VecM \mid V(q) \in \Delta_q, \forall q \in M\}$$

et supposons Δ intégrable. Soit $q \in M$ et \mathcal{O}_q , l'orbite de q associée à $\bar{\Delta}$. Chaque champ de vecteur de $\bar{\Delta}$ est tangent à N_q . Ainsi, l'orbite \mathcal{O}_q est localement incluse dans N_q . Or $dim\mathcal{O}_q \geq dim\Delta_q = dimN_q$. Localement on a donc $\mathcal{O}_q = N_q$. D'après le théorème de l'orbite,

$$Lie_q\bar{\Delta} \subset T_q\mathcal{O}_q = \Delta_q$$

c'est pourquoi

$$Lie_q\bar{\Delta} = \Delta_q$$

Cela implique que

$$\forall V_1, V_2 \in \bar{\Delta}, [V_1, V_2] \in \bar{\Delta}$$

Réciproquement, considérons une distribution Δ qui vérifie cette condition. Dans un voisinage \mathcal{O}_{q_0} de q_0 , on peut supposer que $\bar{\Delta}$ est engendré par f_1, \dots, f_k . $Lie\bar{\Delta}$ est localement un module de type fini sur $C^\infty(M)$. Grâce au théorème précédent,

$$T_q\mathcal{O}_{q_0} = Lie_q\bar{\Delta} = \Delta_q$$

Δ est bien intégrable avec $N_q = \mathcal{O}_q$.

On a prouvé le théorème de Frobénius :

Théorème 11. *Une distribution Δ est intégrable ssi localement $Lie\bar{\Delta} \subset \bar{\Delta}$.*

5 Stabilisation des systèmes autonomes

Continuité du flot. On présente ici une propriété de régularité des solutions relativement aux conditions initiales, et au contrôle effectué. La démonstration étant très technique, et sans grande nouveauté par rapport à la démonstration sans contrôle, cette propriété sera admise. [1]

Pour $\tau > 0$, on note \mathcal{D}_τ l'ensemble des couples (a, ω) de $\mathcal{X} \times L^\infty([0, \tau], \mathcal{U})$ tels que le contrôle ω est admissible pour le problème. Pour un tel couple, s'il n'y a pas d'ambiguïté, on notera en général ξ la trajectoire solution du problème. On définit également $\Phi(a, \omega) := \xi(\tau)$ le flot.

Théorème 12. *L'ensemble \mathcal{D}_τ est ouvert, et la fonction*

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_\tau &\longrightarrow \mathcal{C}^0([0, \tau]) \\ (x, \omega) &\longmapsto \xi \end{aligned}$$

est continue.

5.1 Introduction

Il existe deux variantes de la stabilité : un point de vue local, et un point de vue global. On présentera ici uniquement le point de vue local, ce qui permet de restreindre au possible les domaines de définition des objets. On démontre facilement que dans le cas d'un système linéaire, les variantes globales et locales coïncident.

On va s'intéresser à la stabilisation autour des points d'équilibre, i.e. les points x_0 tels qu'il existe $u_0 \in \mathcal{U}$ avec $f(x_0, u_0) = 0$.

Définition 5.

1 Soient $\Omega \subset \mathcal{X}$, et $a, b \in \Omega$.

a est asymptotiquement contrôlable jusqu'à b sans quitter Ω s'il existe un contrôle $\omega \in \mathcal{U}^{[0, \infty[}$ admissible tel que :

- *si ξ est la trajectoire associée à a et au contrôle ω , on a*

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \xi(t) = b$$

- $\forall t \geq 0 \quad \xi(t) \in \Omega$

2 Soit x_0 un état d'équilibre du système.

Le système est localement asymptotiquement contrôlable en x_0 si pour tout voisinage Ω de x_0 , il existe un voisinage \mathcal{V} de x_0 tel que tout point de \mathcal{V} est asymptotiquement contrôlable jusqu'à x_0 sans quitter Ω

Exemple : On considère un pendule simple représenté par l'angle θ par rapport à l'état d'équilibre stable (position verticale vers le bas). Le mouvement est décrit par $\ddot{\theta} + \sin(\theta) = 0$.

Supposons que l'on puisse de plus contrôler un moment d'inertie $u(t)$ appliqué au pendule à la liaison. On a alors $\ddot{\theta} + \sin(\theta) = u(t)$

Si on linéarise autour de la position d'équilibre instable; en posant $\varphi = \theta - \pi$, on obtient $\ddot{\varphi}(t) - \varphi(t) = u(t)$.

Supposons que l'on puisse appliquer un rétrocontrôle - i.e. un contrôle qui dépend uniquement de l'état du système - de la forme $u(t) = -\alpha\varphi(t) - \beta\dot{\varphi}(t)$.

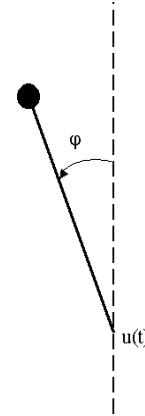
On obtient l'équation $\ddot{\varphi}(t) + \beta\dot{\varphi}(t) + (\alpha - 1)\varphi(t) = 0$.

Les racines de l'équation caractéristique sont :

$$(-\beta \pm \sqrt{\beta^2 - 4(\alpha - 1)})/2$$

Donc si l'on choisit correctement α et β , on peut obtenir des solutions qui tendent vers 0 à l'infini : on stabilise ainsi le système grâce au rétrocontrôle u .

On va montrer que si le système linéarisé est asymptotiquement contrôlable, alors le système original est localement asymptotiquement contrôlable. C'est le cas ici : on peut donc maintenir le pendule au voisinage de l'équilibre (*instable*).



Remarque : On va dans la suite se baser surtout sur la notion de rétrocontrôle. Ils sont en effet robustes, et peuvent s'adapter aux éventuelles perturbations du système au cours de l'évolution.

5.2 Cas des systèmes linéaires

Dans le cas d'un système linéaire $\dot{x} = Ax + Bu$, un rétrocontrôle (linéaire) est de la forme $u = Cx$ pour une certaine matrice $C \in \mathcal{M}(m, n)$. On se ramène ainsi à l'étude des matrices $A + BC$. On démontre d'ailleurs que ces contrôles suffisent pour stabiliser ces systèmes.

Proposition 13. *Les propositions suivantes sont équivalentes :*

- 1 *le système est asymptotiquement contrôlable à l'origine*
- 2 *chaque racine de χ_i a une partie réelle strictement négative*
- 3 *il existe une matrice $C \in \mathcal{M}(n, m)$ telle que $A + BC$ soit Hurwitz*¹

Démonstration.

(1) \Rightarrow (2)

Grâce au changement de base $z = T^{-1}x$, on se ramène à des matrices de la forme

$$\begin{pmatrix} A_1 & A_2 \\ 0 & A_3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} B_1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

où A_3 est la partie incontrôlable, comme dans la décomposition de Kalman. On considère des vecteurs de la forme $\begin{pmatrix} 0 \\ z_2 \end{pmatrix}$, où $z_2 \in \mathbb{R}^{n-r}$. On sait qu'il existe un contrôle tel que la trajectoire obtenue vérifie $\lim_{t \rightarrow \infty} \xi(t) = 0$.

Mais si l'on décompose de la même manière la trajectoire $\xi(t) = \begin{pmatrix} \xi_1(t) \\ \xi_2(t) \end{pmatrix}$, on obtient

$$\begin{cases} \dot{\xi}_2(t) = A_3 \xi_2(t) \\ \xi_2(0) = z_2 \end{cases}, \quad \lim_{t \rightarrow \infty} \xi_2(t) = 0$$

Puisque l'on a choisi z_2 arbitrairement, cela signifie que A_3 est Hurwitz.

¹i.e. les parties réelles des valeurs propres sont strictement négatives

(2) \Rightarrow (3)

C'est une conséquence du lemme suivant, appelé *Pole-Shifting Theorem*

Lemme 14. *L'ensemble des polynômes de la forme χ_{A+BC} est exactement l'ensemble des polynômes unitaires de degré n divisibles par χ_i*

Preuve du lemme : Si (A, B) n'est pas contrôlable, on effectue la décomposition de Kalman :

$$T^{-1}AT = \begin{pmatrix} A_1 & A_2 \\ 0 & A_3 \end{pmatrix} \text{ et } T^{-1}B = \begin{pmatrix} B_1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

On a alors $\chi_{A+BC} = \chi_{T^{-1}AT+(T^{-1}B)(CT)}$. Donc, par la bijection $C \mapsto CT$, on peut se ramener à un système (A, B) comme dans la décomposition. Mais alors

$$\chi_{A+BC} = \chi_{A_1+B_1C_1}\chi_i$$

avec (A_1, B_1) contrôlable. On est ramené au cas où le système est contrôlable : il suffit de démontrer que tout polynôme de degré n peut se mettre sous la forme χ_{A+BC} .

On va d'abord traiter le cas $m = 1$. On note $\chi_A = X^n - \alpha_n X^{n-1} - \dots - \alpha_2 X - \alpha_1$ le polynôme caractéristique de A .

Posons

$$\tilde{A} := \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & \alpha_1 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & \alpha_2 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & \alpha_3 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & \alpha_n \end{pmatrix} \text{ et } \tilde{b} := \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

D'après Cayley-Hamilton, on a $\mathbf{R}(A, b) = \mathbf{R}(A, \tilde{A})\tilde{A}$, et $b = \mathbf{R}(A, \tilde{A})\tilde{b}$. Puisque le système (A, b) est supposé contrôlable, de même qu'à la première étape, on peut se ramener au système (\tilde{A}, \tilde{b}) grâce au changement $T := \mathbf{R}(A, b)$.

On peut même se ramener à tout système contrôlable (\hat{A}, \hat{b}) où \hat{A} a le même polynôme caractéristique que A . En particulier le système :

$$\hat{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & \cdots & \alpha_n \end{pmatrix} \text{ et } \hat{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$$

Alors, si l'on se donne un polynôme unitaire de degré n : $\chi = X^n - \beta_n X^{n-1} - \dots - \beta_1$, le contrôle $c := (\beta_1 - \alpha_1, \dots, \beta_n - \alpha_n)$ vérifie $\chi_{\hat{A}+\hat{b}c} = \chi$.

Traisons maintenant le cas général. On choisit $b \in \text{Im}B$, $b \neq 0$. On note $b := Bv$. Si l'on démontre qu'il existe C tel que $(A + BC, b)$ soit contrôlable, on se ramène au cas $m = 1$: il existe un vecteur ligne γ tel que $\chi = \chi_{A+BC+b\gamma} = \chi_{A+B(C+v\gamma)}$, et on a montré le lemme grâce au contrôle $C + v\gamma$.

Construction de C . Si $\{x_1, \dots, x_k\}$ est une famille d'éléments de \mathbb{R}^n , on considère la propriété :

$\{x_1, \dots, x_k\}$ indépendants ,

$$x_1 = b \text{ et } \forall 2 \leq i \leq k \ x_i - Ax_{i-1} \in \text{Im}B$$

avec $x_0 = 0$. On choisit une telle famille avec k maximal, et on pose $V = \text{Vect}(x_1, \dots, x_k)$. Par maximalité $\forall u \in U \ Ax_k + Bu \in V$. En particulier pour $u = 0$, $Ax_k \in V$, et donc $\text{Im}B \subset V$. D'après la propriété, on a donc $\forall i \ Ax_i \in V$, et donc V est un espace invariant par A et contenant $\text{Im}B$. Donc $\mathcal{R}(A, B) \subset V$, et V est l'espace tout entier. C'est donc que $k = n$.

Si l'on définit, pour $i \in \{1, \dots, n-1\}$, $Cx_i := u_i$ avec u_i qui vérifie $x_i - Ax_{i-1} = Bu_{i-1}$, et Cx_n défini arbitrairement ; on a $\mathbf{R}(A + BC, x_1) = (x_1, \dots, x_n)$ de rang n . \square

Conclusion Il suffit donc de choisir un polynôme χ de degré $n - r$ dont les racines soient strictement négatives : on sait qu'il existe un rétro-contrôle C tel que $\chi_{A+BC} = \chi\chi_i$, et ainsi $A + BC$ est Hurwitz.

(3) \Rightarrow (1)

C'est évident avec le rétro-contrôle $\omega(t) := Cx(t)$. □

5.3 Méthode de Lyapounov

Définition 6. Soit x_0 un état d'équilibre du système. Une fonctionnelle de Lyapounov est une fonction V continue définie sur un voisinage \mathcal{O} de x_0 , qui vérifie les propriétés suivantes :

1 V est propre : $\{x \in \mathcal{X} | V(x) \leq \varepsilon\}$ est un compact inclus dans \mathcal{O} pour ε suffisamment petit

2 V est définie positive : $V(x_0) = 0$ et $V(x) > 0$ si $x \neq x_0$

3 quelque soit $x \neq x_0$ dans \mathcal{O} , il existe un contrôle admissible $\omega \in \mathcal{U}^{[0, \sigma]}$ tel que

$$\forall t \in [0, \sigma] \quad V(\xi(t)) \leq V(x) \quad \text{et} \quad V(\xi(\sigma)) < V(x)$$

On peut voir V comme une fonction d'énergie du système ayant une allure de "cuvette". Les trajectoires descendent dans cette cuvette jusqu'à atteindre x_0 .

La troisième propriété n'est en général pas facile à mettre en évidence pour une fonction V donnée. On utilisera en pratique le critère suivant :

Critère 15. Si l'on suppose que la fonction V définie sur l'ouvert \mathcal{O} est de classe \mathcal{C}^1 , et vérifie les propriétés (1) et (2), alors il suffit qu'elle vérifie la propriété :

$$\forall x \neq x_0 \quad \exists u \in \mathcal{U} \quad \nabla V(x) \cdot f(x, u) < 0$$

pour être une fonctionnelle de Lyapounov.

Démonstration.

Il suffit d'établir la troisième propriété.

On considère le contrôle constant $u \in \mathcal{U}^{[0, \sigma]}$. La trajectoire qui en résulte vérifie

$$\frac{dV(\xi(t))}{dt} = \nabla V[\xi(t)] \cdot f[\xi(t), u] < 0$$

si σ est choisi assez petit de manière à ce que ξ reste suffisamment proche de x (on utilise ici la continuité de ξ) □

Théorème 16. Supposons qu'il existe une fonction de Lyapounov pour x_0 . Alors le système est localement asymptotiquement contrôlable.

La démonstration, technique, se déroule en quatre étapes.

Démonstration.

Etape 1

Quelque soit $\delta > 0$, il existe $\eta > 0$ tel que $\forall y \quad V(y) < \eta \Rightarrow \|y - x_0\| < \delta$

Sinon, par l'absurde, il existe $\delta_0 > 0$ et une suite (y_n) de $\{x | V(x) \leq \delta_0\}$ telle que $V(y_n) \rightarrow 0$ et $\|y_n - x_0\| > \delta_0$. Par compacité on peut extraire de (y_n) une sous suite qui converge vers y_∞ . Par continuité, $V(y_\infty) = 0$, et donc $y_\infty = x_0$, ce qui contredit $\|y_\infty - x_0\| \geq \delta_0$.

On en déduit immédiatement :

$$\lim_{t \rightarrow \infty} V(\xi(t)) = 0 \Rightarrow \lim_{t \rightarrow \infty} \xi(t) = x_0$$

On se ramène alors à un ensemble de définition \mathcal{O} de la forme $\{x | V(x) \leq \alpha_0\}$, voisinage de x_0 , compact par hypothèse.

Etape 2

Définition 7. On dit que y est bien atteignable à partir de x si on peut atteindre y grâce à une trajectoire ξ qui vérifie $V(\xi(t)) \leq V(x)$ et $V(y) < V(x)$.

Si $x \neq x_0$, la propriété 13 montre qu'il existe un y bien atteignable à partir de x .

On définit alors :

$$B(x) := \inf\{V(z) \mid z \text{ est bien atteignable à partir de } x\}$$

Puisque $V(y) < V(x)$, on a $B(x) < V(x)$. On veut montrer que $B(x) = 0$. Supposons que $B(x) = \alpha > 0$.

Soit alors $(z_n)_n$ telle que $\forall n$ z_n est bien atteignable de x et $V(z_n) \rightarrow \alpha$ en décroissant. On reste dans le compact $C := \{z \mid V(z) \leq V(x)\}$, et on peut donc se ramener à $z_n \rightarrow z$. Par continuité de V , $V(z) = \alpha > 0$, et donc $z \neq x_0$.

Choisissons $y \in \mathcal{O}$ bien atteignable à partir de z . Choisissons également $\varepsilon > 0$ tel que $V(z) < V(x) - \varepsilon$ et $V(y) < V(z) - \varepsilon$.

Soit $\omega \in \mathcal{U}^{[0,\sigma]}$ tel que la trajectoire ξ issue de z vérifie $V(\xi(t)) \leq V(z)$ pour $t \in [0, \sigma]$ et $\xi(\sigma) = y$.

D'après la continuité uniforme de V sur C ,

$$\exists \delta > 0 \text{ t.q. } |a - b| < \delta \Rightarrow |V(a) - V(b)| < \varepsilon$$

D'après le théorème 12, $\exists n$ tel que ω est admissible pour z_n , et tel que $\|\xi_n - \xi\|_\infty < \delta$, et donc $|V(\xi_n) - V(\xi)|_\infty < \varepsilon$.

Posons $y_n := \xi_n(\sigma)$. Par concaténation : $x \rightsquigarrow z_n \rightsquigarrow y_n$; l'état y_n est bien atteignable à partir de x , car

$$\forall t \quad V(\xi_n(t)) \leq V(\xi_n(t)) - V(\xi(t)) + V(\xi(t)) \leq \varepsilon + V(z) \leq V(x)$$

Ceci fournit une contradiction, car

$$|V(y_n) - V(y)| < \varepsilon \text{ et } V(y) < B(x) - \varepsilon \Rightarrow V(y_n) < B(x)$$

Ce qui contredit la définition de $B(x)$. Ainsi $B(x) = 0$.

Etape 3 On peut maintenant construire un contrôle qui ramène un état $x \neq x_0$ à l'état d'équilibre. Pour cela on va d'abord construire pour chaque $x \neq x_0$ un contrôle en temps $\sigma \geq 1$ qui vérifie $V(\xi(t)) \leq V(x)$ et $V(\xi(\sigma)) \leq \frac{1}{2}V(x)$. Ceci permettra ainsi d'atteindre étape après étape le temps $+\infty$ tout en se rapprochant de plus en plus de l'origine (grâce au marqueur qu'est la fonctionnelle V).

On va procéder en deux parties : on se rapproche de l'origine grâce à l'étape précédente, puis on y stagne pendant un temps $= 1$ pour garantir $\sigma \geq 1$.

Contrôlons d'abord le système au voisinage de l'origine, disons pour $\{z \mid V(z) < \frac{1}{2}V(x)\}$. Par continuité de V en 0, il existe $\varepsilon > 0$ tel que $\|z - x_0\| < \varepsilon$ entraîne $V(z) < \frac{1}{2}V(x)$. Puis, d'après le théorème 12 :

$$\exists \delta > 0 \quad \forall y \quad \|y - x_0\| < \delta \Rightarrow \|\zeta(t) - x_0\|_\infty < \varepsilon$$

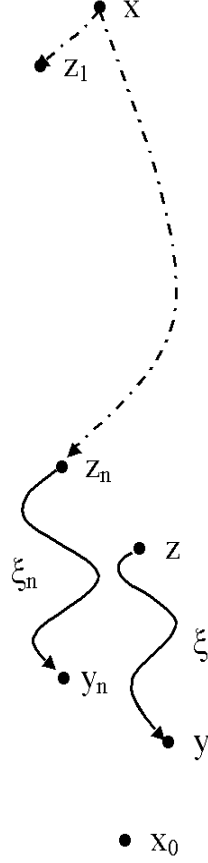
où $\zeta(t)$ désigne la trajectoire issue de y et du contrôle constant $u_0 \in \mathcal{U}^{[0,1]}$.

D'après la première étape,

$$\exists \eta > 0 \text{ t. q. } \forall y \quad V(y) < \eta \Rightarrow \|y - x_0\| < \delta$$

Maintenant que tout est en place, on peut choisir une trajectoire en temps τ partant de x , et qui vérifie

$$V(\xi(t)) \leq V(x) \text{ et } V(\xi(\tau)) < \eta$$



(d'après l'étape précédente : $B(x) = 0$).

A partir de $y := \xi(\tau)$, on applique un contrôle constant $u_0 \in \mathcal{U}^{[0,1]}$. La trajectoire finale vérifie bien les hypothèses voulues $V(\xi(t)) \leq V(x)$ et $V(\xi(\sigma)) \leq \frac{1}{2}V(x)$.

Conclusion Soit Ω un voisinage de x_0 . Soit $\alpha > 0$ tel que $\{z | V(z) < \alpha\} \subset \Omega$ et $\alpha \leq \alpha_0$.

On pose $\mathcal{V} := \{z | V(z) < \alpha\}$.

Soit $x \in \mathcal{V}$. On construit par récurrence des contrôles (ω_n) en temps > 1 qui vérifient :

$$V(\xi_0(t)) \leq V(x), \quad \text{et si } y_0 := \Phi(x, \omega_0), \quad V(y_0) \leq \frac{1}{2}V(x)$$

et, en partant de y_n :

$$V(\xi_{n+1}(t)) \leq V(y_n), \quad \text{et si } y_{n+1} := \Phi(y_n, \omega_n), \quad V(y_{n+1}) \leq \frac{1}{2}V(y_n)$$

De sorte que $V(y_n) \leq \frac{1}{2^{n+1}}V(x)$. Mis bout à bout, la trajectoire ξ qui en résulte par concaténation vérifie donc $\lim_{t \rightarrow \infty} V(\xi(t)) = 0$, et donc $\lim \xi(t) = x_0$. On vérifie de plus que la trajectoire ne quitte pas Ω , car $V(\xi(t)) \leq V(x) < \alpha$.

□

5.4 Retour sur les systèmes linéaires

On peut se ramener à des systèmes sans contrôle de la forme $\dot{x} = Ax$ à l'aide d'un rétro-contrôle $u = Cx$.

Proposition 17. *Sont équivalents :*

1 A est Hurwitz

2 il existe une matrice $P > 0$ telle que $A^*P + PA = -I$

3 il existe une matrice $P > 0$ telle que $V(x) := x^*Px$ est une fonction de Lyapounov

Démonstration.

(1) \Rightarrow (2)

Puisque A est Hurwitz, il existe $\alpha < 0$ tel que $e^{tA} = O(e^{\alpha t})$, et $e^{tA^*} = O(e^{\alpha t})$.

Alors

$$P := \int_0^\infty e^{tA^*} e^{tA} dt$$

est bien défini et convient. En effet :

$$\begin{aligned} A^*P + PA &= \int_0^\infty A^* e^{tA^*} e^{tA} + e^{tA^*} e^{tA} A dt \\ &= \int_0^\infty \frac{d(e^{tA} e^{tA^*})}{dt} dt \\ &= -I \end{aligned}$$

Enfin, puisque $x^* e^{tA^*} e^{tA} x = \|e^{tA} x\|^2$, on voit bien que la matrice P est définie positive.

(2) \Rightarrow (3)

$x \mapsto x^*Px$ est une forme quadratique définie positive. Donc $x \mapsto \sqrt{x^*Px}$ est une norme.

On voit ainsi que V est propre. La deuxième propriété est acquise par définition de P . Un rapide calcul donne enfin

$$\nabla V(x).Ax = (Ax)^*Px + x^*P(Ax) = -\|x\|^2$$

D'après le critère 15, V est une fonctionnelle de Lyapounov pour le système.

(3) \Rightarrow (2)

D'après le théorème, le système est asymptotiquement contrôlable. La proposition 13 affirme alors que A est Hurwitz (ici $B = 0$). □

5.5 Principe de linéarisation

On revient au cas général d'un système de la forme $\dot{x} = f(x, u)$.

Théorème 18. *Soit (x_0, u_0) un point d'équilibre.*

Si le système linéarisé est asymptotiquement contrôlable (en x_0), alors le système est localement asymptotiquement contrôlable.

De plus, on peut trouver une matrice C telle que le rétrocontrôle $u_0 + C(x - x_0)$ stabilise le système.

Démonstration.

Il suffit de démontrer la deuxième assertion.

Soit $\dot{y} = A(x - x_0) + B(u - u_0)$ le système linéarisé au point d'équilibre (x_0, u_0)

Par hypothèse, il existe une matrice C telle que $\Lambda := A + BC$ est Hurwitz. Soit alors P une matrice définie positive telle que $\Lambda^*P + P\Lambda = -I$.

Lorsqu'on linéarise le système $\dot{x} = \Psi(x) := f(x, u_0 + C(x - x_0))$ en x_0 , on obtient le système sans contrôle $\dot{y} = \Lambda y$:

$$\Psi(x) = \Lambda(x - x_0) + \alpha(x - x_0)$$

où $\alpha(y) = o(y)$.

On pose alors $V(x) := (x - x_0)^*P(x - x_0)$, restreinte à \mathcal{X} .

On a les propriétés (1) et (2) comme à la proposition précédente. Il reste à mettre en évidence la propriété 3 des fonctionnelles de Lyapounov :

$$\begin{aligned} \nabla V(x) \cdot \Psi(x) &= (x - x_0)^*(\Lambda^*P + P\Lambda)(x - x_0) + 2(x - x_0)^*P\alpha(x - x_0) \\ &= -\|x - x_0\|^2 + o(\|x - x_0\|^2) \end{aligned}$$

Donc $\nabla V(x) \cdot \Psi(x) < 0$ si $\|x - x_0\|$ est suffisamment petit : on obtient ainsi le voisinage \mathcal{O} de x_0 attendu dans la définition. \square

5.6 Théorème de stabilisation de Brockett

Définition 8. *On dit que le système $\dot{x} = f(x, u)$ est C^1 stabilisable au point d'équilibre x_0 s'il existe un voisinage \mathcal{O} et un rétro-contrôle C^1 $k : \mathcal{O} \rightarrow \mathcal{U}$ tel que $k(x_0) = u_0$ et qui stabilise le système en x_0 .*

Autrement dit, le système sans contrôle $\dot{x} = f(x, k(x))$ est asymptotiquement contrôlable en x_0 .

Le théorème suivant donne une condition nécessaire de stabilité dans le cadre d'un contrôle C^1 . La démonstration repose en particulier sur un lemme de topologie algébrique utilisant la notion de degré [5].

Théorème 19 (Brockett). *Si le système $\dot{x} = f(x, u)$ est C^1 stabilisable au point d'équilibre x_0 , alors l'image de f contient un voisinage de 0.*

Si l'on applique le rétro-contrôle k , que l'on effectue une translation pour ramener le point d'équilibre à l'origine, et que l'on se restreint à une boule centrée à l'origine incluse dans le domaine d'attraction, on se ramène à un système de la forme $\dot{x} = F(x)$ asymptotiquement contrôlable à l'origine.

Pour $x \in \mathcal{X}$, on note $\Phi(x, \cdot)$ la trajectoire issue de x à l'instant 0.

On définit le domaine d'attraction de x_0 :

$$D := \{x \in \mathcal{X} \mid \lim_{t \rightarrow \infty} \Phi(x, t) = x_0\}$$

Lemme 20. *Soit $x \in D$ et Ω un voisinage de x_0 . Il existe un voisinage \mathcal{W} de $x \subset D$ et $T > 0$ tel que :*

$$\forall y \in \mathcal{W} \quad \forall t \geq T \quad \Phi(y, t) \in \Omega$$

Démonstration.

Par définition de la stabilité, il existe un voisinage ouvert $\mathcal{V} \subset D$ de x_0 tel que toute trajectoire partant de \mathcal{V} reste dans Ω .

Soit $x \in D$. Il existe T tel que $\Phi(T, x) \in \mathcal{V}$. Par continuité de $\Phi(\cdot, T)$, il existe un voisinage \mathcal{W} de x tel que $\forall y \in \mathcal{W} \quad \Phi(y, T) \in \mathcal{V}$.

Puisque $\mathcal{V} \subset D$, il est clair que $\mathcal{W} \subset D$. On a bien la propriété $\forall y \in \mathcal{W} \quad \forall t \geq T \quad \Phi(y, t) \in \Omega$ par définition de \mathcal{V} . \square

On en déduit entre autre que le domaine d'attraction de x_0 est ouvert.

Lemme 21. *Le domaine d'attraction est contractile*

Démonstration.

On va démontrer que l'application

$$H : \begin{array}{ccc} D \times [0, 1] & \longrightarrow & D \\ (x, t) & \longmapsto & \Phi(x, \frac{t}{1-t}) \end{array}$$

est continue, ce qui fournira une homotopie de D vers x_0 .

Seule la continuité en $t = 1$ pose un problème. Soit $x \in D$, et Ω un voisinage de x_0 . D'après le lemme précédent, il existe \mathcal{W} et T tels que $\forall y \in \mathcal{W} \quad \forall t \geq T \quad \Phi(y, t) \in \Omega$. Si $\delta := \frac{1}{T+1}$,

$$\forall (y, s) \in \mathcal{W} \times [1 - \delta, 1] \quad \Phi(y, s) \in \Omega$$

\square

Lemme 22. *Soit $H : \overline{B}(0, \rho) \times [0, 1] \longrightarrow \mathbb{R}^n$ continue telle que $\forall x \quad H(x, 1) = -x$ et*

$$\forall t \quad \forall x \in S(\rho) \quad H(x, t) \neq 0$$

Soit

$$F : \begin{array}{ccc} \overline{B}(0, \rho) & \longrightarrow & \mathbb{R}^n \\ x & \longmapsto & H(x, 0) \end{array}$$

Alors l'image de F contient un voisinage de 0.

Démonstration.

Pour $G : \overline{B}(0, \rho) \longrightarrow \mathbb{R}^n$ continue et $y \in B(0, \rho)$ tels que $\forall x \in S(\rho) \quad G(x) \neq y$, on note $\deg(G, y)$ le degré de G en y . C'est un entier, et c'est un invariant d'homotopie à condition que $\forall x \in S(\rho) \quad H(x, t) \neq 0$.

On a donc $\deg(F, 0) = \deg(-x, 0) = (-1)^n$.

De plus, puisque F ne s'annule pas sur $S(\rho)$, $\exists \varepsilon > 0 \quad |F(x)| > \varepsilon$. Donc

$$F(x) \neq y \quad \forall y \in \overline{B}(0, \varepsilon), \quad x \in S(\rho)$$

On peut donc également définir $\deg(F, y)$ pour de tels y .

Le degré dépend continûment de y , et puisque c'est un entier, on a

$$\deg(F, y) = \deg(F, 0) = (-1)^n \quad \forall y \in \overline{B}(0, \varepsilon)$$

Mais $\deg(F, y) \neq 0$ entraîne que l'équation $F(x) = y$ a au moins une solution. Ainsi l'image de F contient $\overline{B}(0, \varepsilon)$. \square

Démonstration du théorème.

On va utiliser le lemme précédent avec l'homotopie

$$\tilde{H}(x, t) := \begin{cases} F(x) & \text{si } t = 0 \\ \frac{1}{t}[\Phi(x, \frac{t}{1-t}) - x] & \text{si } t \in]0, 1[\\ -x & \text{si } t = 1 \end{cases}$$

qui joint F à $-x$. On remarque d'abord que $\tilde{H}(x, t) \neq 0$ si $x \neq 0$, car il ne peut y avoir de points périodiques dans le domaine d'attraction outre 0.

Si $0 < t < 1$, \tilde{H} est évidemment continue. Si $t = 1$, on a vu que \tilde{H} était continue dans le lemme 21.

Il reste à montrer la continuité aux points de la forme $(0, x)$. Pour tous s et y , on a :

$$\frac{\Phi(y, s) - y}{s} = \frac{1}{s} \int_0^s F(\Phi(y, \tau)) d\tau$$

D'où

$$\frac{1+s}{s} [\Phi(y, s) - y] - F(x) = \frac{1}{s} \int_0^s [F(\Phi(y, \tau)) - F(x)] d\tau + \int_0^s F(\Phi(y, \tau)) d\tau$$

Par continuité de $F \circ \Phi$, il existe un voisinage \mathcal{W} de x et $\delta > 0$ tels que

$$\|F(\Phi(y, \tau)) - F(x)\| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \forall y \in \mathcal{W} \quad \forall \tau \leq \delta$$

Ainsi, avec $t = \frac{s}{1+s}$, on a

$$\forall \tau \leq \frac{\delta}{1+\delta} \quad \|\tilde{H}(y, t) - f(x)\| \leq \frac{\varepsilon}{2} + M \frac{t}{1-t}$$

où $M := \sup_{\tau \leq \delta, y \in \mathcal{W}} \|F(\Phi(y, \tau))\|$.

Il suffit alors de choisir t suffisamment petit pour que le deuxième terme soit $< \varepsilon/2$, ce qui démontre la continuité de \tilde{H} . \square

Complément : On considère le système affine sans dérive

$$f(x, u) = \sum_{i=1}^m f_i(x) u_i$$

Si l'on s'autorise des contrôles dépendant du temps en plus de l'état du système, i.e. de la forme $\omega(t, x)$, on peut stabiliser des systèmes moins contraignants :

Théorème 23. *Supposons que $\forall x \in \mathbb{R}^n - \{0\} \quad \{h(x), x \in \text{Lie}(\{f_1, \dots, f_n\})\} = \mathbb{R}^n$.*

Alors pour tout $T > 0$, le système peut-être asymptotiquement stabilisable grâce à un contrôle $\omega(t, x)$ T périodique de classe \mathcal{C}^∞ .

La démonstration de ce théorème est très difficile. On renvoie à [6] pour plus de détails.

6 Contrôle en dimension infinie

On s'intéresse maintenant au contrôle d'équations aux dérivées partielles. On va regarder plus particulièrement des systèmes hyperboliques, linéaires et symétriques, qui ont l'avantage d'être relativement simples à étudier, tout en utilisant des méthodes générales.

$$\frac{\partial w}{\partial t} = A(x) \frac{\partial w}{\partial x} + B(x)w, \quad x \in [0, 1] \quad t \geq 0, \quad w(x, t) \in \mathbb{R}^n$$

On va supposer que A est de classe \mathcal{C}^1 , symétrique, et que B est continue pour $x \in [0, 1]$. On suppose de plus que les valeurs propres de $A(x)$ vérifient

$$\lambda_1(x) \leq \lambda_2(x) \leq \dots \leq \lambda_p(x) < 0 < \lambda_{p+1}(x) \leq \dots \leq \lambda_{p+q}(x)$$

avec $\forall k \quad \lambda_k \equiv \lambda_{k+1}$ ou $\lambda_k < \lambda_{k+1}$.

On démontre qu'on alors peut se ramener à une matrice $A(x)$ diagonale par l'intermédiaire d'une matrice orthogonale de classe \mathcal{C}^1 .

On pose $A^- := \text{Diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_p)$ et $A^+ := \text{Diag}(\lambda_{p+1}, \dots, \lambda_{p+q})$, de sorte que

$$A := \begin{pmatrix} A^- & 0 \\ 0 & A^+ \end{pmatrix}$$

On décompose aussi $w = \begin{pmatrix} w^- \\ w^+ \end{pmatrix}$.

On va utiliser la méthode des caractéristiques :

Définition 9. Les caractéristiques associées à la k^{eme} valeur propre sont les solutions de l'équation différentielle ordinaire

$$\frac{dx}{dt} + \lambda_k(x) = 0$$

On pose $c_k[x_0, t_0]$ la caractéristique qui passe par le point x_0 au temps t_0 . Si l'on note w^k la k^{eme} composante de w , on a le long d'une caractéristique x associée à λ_k :

$$\frac{d}{dt}[w^k(x(t), t)] = \frac{\partial w^k}{\partial t}(x(t), t) - \lambda_k(x(t)) \frac{\partial w^k}{\partial t}(x(t), t) = B^k(x(t))w(x(t), t)$$

Les équations sont ici couplées par le deuxième terme en $w(x(t))$. Cela entraîne des complications non négligeables dans la résolution du problème. Pour simplifier, on va dans la suite se limiter au cas où B est diagonale elle aussi. Les principales idées de la démonstration principale seront quand même mises en évidence. On note $B := \text{Diag}(b^1, \dots, b^n)$

On se donne la valeur de w à l'instant initial : $w(\cdot, 0) = w_0 \in L^2([0, 1])$. En général, on impose également des contraintes de bord de la forme

$$w^-(0, t) = D_0 w^+(0, t) ; \quad w^+(1, t) = D_1 w^-(1, t)$$

Cependant, dans le cadre de cette théorie, on rajoute un contrôle sur les conditions aux limites de la forme

$$w^+(1, t) = D_1 w^-(1, t) + Du(t)$$

où D est une matrice $q \times q$ inversible.

Position du problème : étant donnés w_0 et w_1 dans $L^2([0, 1])$, et $T > 0$, on cherche un contrôle $u \in L^2([0, T])$ tel que $w(\cdot, T) = w_1$.

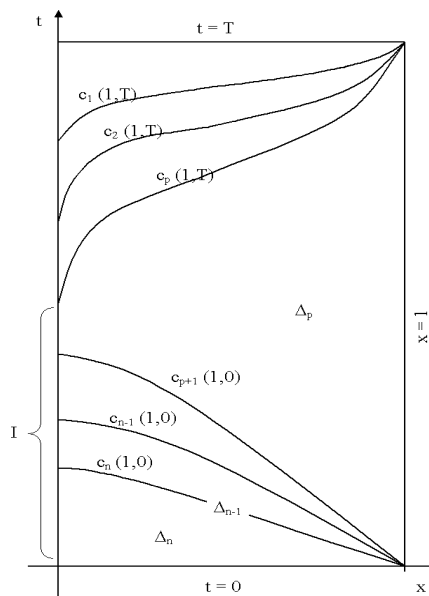
Théorème 24. On suppose

$$T \geq \int_0^1 \frac{dx}{\lambda_{p+1}(x)} - \int_0^1 \frac{dx}{\lambda_p(x)}$$

Alors un tel contrôle existe dans le cas où $w_1 = 0$.

Si de plus $p = q = n/2$, et D_0 et D_1 sont inversibles, alors un tel contrôle existe dans le cas général.

Démonstration. C'est un exercice simple sur l'agencement des caractéristiques dans le rectangle $[0, 1] \times [0, T]$. La condition $T \geq \int_0^1 \frac{dx}{\lambda_{p+1}(x)} - \int_0^1 \frac{dx}{\lambda_p(x)}$ signifie que les deux caractéristiques $c_p[1, T]$ et $c_{p+1}[1, 0]$ ne se coupent pas dans ce rectangle.



Etape 1 On résoud w^n dans Δ_n , le domaine de détermination délimité par la caractéristique $c_n[1, 0]$, et les segments $x = 0$ et $t = 0$. Dans cette zone, w_n est donné par le problème :

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}[w^n(c_n[y, \tau](t), t)] = b^n(c_n[y, \tau](t))w^n(c_n[y, \tau](t), t) \\ w^n(c_n[y, \tau](0), 0) = w_0(c_n[y, \tau](0)) \end{cases}$$

dont la reformulation intégrale est :

$$w^n(y, \tau) = w_0(c_n[y, \tau](0)) + \int_0^\tau b^n(c_n[y, \tau](t))w^n(c_n[y, \tau](t), t)dt$$

Cela se résoud par la méthode des approximations successives :

$$\begin{aligned} w_{[0]}^n(y, \tau) &:= w_0(c_n[y, \tau](0)) \\ w_{[m+1]}^n(y, \tau) &:= w_0(c_n[y, \tau](0)) + \int_0^\tau b^n(c_n[y, \tau](t))w_{[m]}^n(c_n[y, \tau](t), t)dt \end{aligned}$$

On démontre aisément par récurrence que

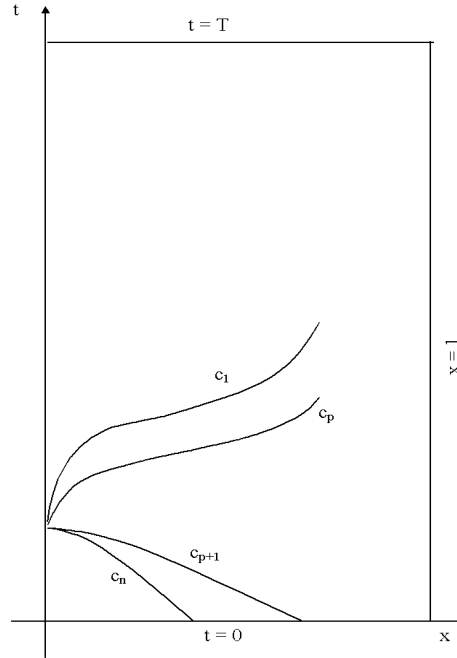
$$\sup_{y \in [0, 1]} |w_{[m+1]}^n(y, \tau) - w_{[m]}^n(y, \tau)| \leq M^{m+1} \frac{\tau^{m+1}}{(m+1)!}$$

où M majore $|b^n|$. Il y a donc convergence de $(w_{[m]}^n)_m$.

On prolonge ensuite w^n sur le segment I tout entier.

On fait de même pour les w^k , $p+1 \leq k \leq n-1$ dans leurs domaines de détermination respectifs, construits sur le même modèle. On les prolonge également sur le même segment I . On connaît ainsi w^+ sur le segment I .

Grâce à la condition au bord $w^-(0, t) = D_0 w^+(0, t)$, on en déduit la valeur de $w^-(0, \cdot)$ sur I .



Etape 2 Partant de $w(\cdot, T) = 0$, on impose $w = 0$ dans tout le domaine $\Delta_{p-1} (\supset \dots \supset \Delta_0)$ situé au-dessus cette fois de $c_p[1, T]$. En particulier, cela vérifie bien la condition au bord $w^-(0, t) = D_0 w^+(0, t)$ sur le complémentaire de I . On connaît donc la valeur de w sur les trois segments $x = 0$, $t = 0$, et $t = T$.

Étape 3 On est alors en mesure de résoudre le problème sur le rectangle tout entier, en s'appuyant sur les caractéristiques qui partitionnent le rectangle.

On obtient alors la valeur sur le bord $x = 1$, et on trouve le contrôle $u(t) := D^{-1}w^+(1, t) - D^{-1}D_1w^-(1, t)$ voulu.

Dans le cas particulier $p = q = n/2$, et D_0 et D_1 inversibles, il suffit de modifier l'étape 2. On peut retourner le problème, et résoudre à partir de $w(\cdot, T) = w_1$, exactement sur le même modèle que l'étape 1.

Remarque : Si l'on ne suppose plus les équations découplées (i.e. B diagonale), on ne peut plus résoudre les équations indépendamment le long des caractéristiques. Là encore les domaines de détermination jouent un rôle très important.

La méthode des approximations successives utilisées à l'étape 1 fonctionne telle quelle dans la zone délimitée par les caractéristiques $c_n[1, 0]$ et $c_p[0, 0]$. En dehors de cette zone, la résolution utilise *a priori* des maillages du rectangle... \square

Références

- [1] Sontag E.D., *Mathematical Control Theory : Deterministic Finite Dimensional Systems*, Springer-Verlag, New-York, 1990
- [2] Agrachev A.A., Sachkov Yu. L., *Lectures on Geometric Control Theory*, prépublication SISSA, 2001
- [3] Russell D.L., *Controllability and Stabilizability Theory for Linear Partial Differential Equations : Recent Progress and Open Questions*, SIAM Review, Vol. 20, No 4 (1978) : 639-739
- [4] Garabedian P.R., *Partial Differential Equations*, Wiley, New York, 1964
- [5] Berger M.S., *Perspectives in Nonlinearity : An Introduction to Nonlinear Analysis*, Benjamin, New-York, 1968
- [6] Coron J.-M., *Stabilization of Controllable Systems*, Progress in Mathematic, Vol. 144 (1996) : 365-388