

ASPECTS ALGORITHMIQUES ET GÉOMÉTRIQUES DES TRESSSES

JÉRÉMY CHAMBOREDON

Sous la direction de Patrick Dehornoy

ENS – Magistère MMFAI

Présentation du domaine de recherche

12 octobre 2007

INTRODUCTION

Le groupe de tresses B_n a été introduit par Emil Artin [1] en 1925 (voir aussi [2]), mais plusieurs idées remontent au XIXe siècle, dans des travaux d'Hurwicz, Klein, Poincaré, Riemann et certainement d'autres auteurs. On peut même trouver un schéma de tresse dans des livres de Gauss [14]. Les groupes de tresses constituent un domaine sujet à d'importantes recherches mathématiques dans les dernières décennies. Celui-ci a explosé au milieu des années 1980 avec les découvertes révolutionnaires de Vaughan Jones [15], qui relie les groupes de tresses avec la théorie des opérateurs, la mécanique statistique et d'autres notions de physique mathématique. De grandes avancées ont été réalisées ces dernières années. On a montré que la représentation classique de Burau [8] n'est pas fidèle [19], [18]. La propriété de linéarité des groupes de tresses a été prouvée récemment par Daan Krammer [16, 17] et Stephen Bigelow [3].

Dans cette présentation, nous rappelons tout d'abord la définition des groupes de tresses introduite par E. Artin et certaines des problématiques principales liées aux tresses. Ensuite, nous nous intéressons à différents algorithmes connus qui permettent de répondre aux problèmes que posent les tresses. Nous présentons dans un troisième temps les différentes approches géométriques et topologiques des groupes de tresses. Les deux dernières parties de la présentation évoquent certains des problèmes récents liés aux groupes de tresses, d'une part son caractère linéaire, et d'autre part différentes généralisations possibles selon l'approche envisagée.

1. PRÉSENTATION DES GROUPES DE TRESSSES

Le groupe de tresses B_n a été introduit par E. Artin dans [2] comme le groupe de présentation

$$\langle \sigma_1, \dots, \sigma_{n-1} \mid \sigma_i \sigma_j = \sigma_j \sigma_i \text{ pour } |j - i| \geq 2, \sigma_i \sigma_j \sigma_i = \sigma_j \sigma_i \sigma_j \text{ pour } |j - i| = 1 \rangle.$$

Cette définition s'appuie sur l'idée naïve d'une tresse, qui est un enchevêtrement de brins. Les relations de la présentation précédente traduisent les relations qui apparaissent naturellement lorsqu'on considère des brins qui se croisent, comme on l'explique dans la partie 3.1.

Les éléments σ_i sont appelés *générateurs canoniques* du groupe de tresses B_n . On les représente par les diagrammes de la figure 1.

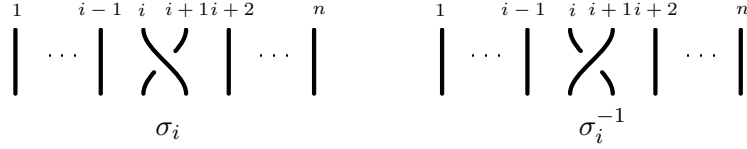


FIG. 1. Représentation des générateurs σ_i .

1.1. Problème des mots. Les éléments de B_n sont appelés des *tresses* à n brins. Chaque tresse à n brins admet des expressions en les générateurs σ_i , qu'on appelle *mots de tresse*. Un mot de tresse w est représenté par un *diagramme de tresse* en empilant des diagrammes élémentaires de générateurs σ_i , comme le montre l'exemple de la figure 2. Deux mots de

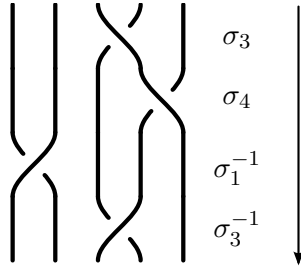


FIG. 2. Représentation du mot de tresse $\sigma_3 \sigma_4 \sigma_1^{-1} \sigma_3^{-1}$ sous forme de diagramme de tresse. On lit le mot de haut en bas.

tresse qui représentent la même tresse sont dits *équivalents*. Un des problèmes fondamentaux sur les tresses, introduit par Dehn, est de reconnaître deux mots équivalents : c'est ce qu'on appelle le *problème des mots*. Ce problème admet différentes solutions, comme on le verra dans la suite, la plus efficace à ce jour étant l'algorithme de réduction des poignées de P. Dehornoy [9], présenté dans le paragraphe 2.2. Une question proche est de savoir reconnaître des tresses conjuguées.

1.2. Propriété d'ordre. Une des propriétés principales des tresses, qui n'apparaît pas immédiatement avec l'idée de configuration de brins dans l'espace, est le fait que le groupe de tresses est ordonné. L'introduction de l'ordre des tresses est due à P. Dehornoy, et repose sur une notion de positivité. On dit qu'une tresse est σ -positive si elle est représentée par un mot w tel que, si i est le plus petit indice des σ_k intervenant dans l'écriture de w , alors w contient au moins une lettre σ_i , et aucune lettre σ_i^{-1} .

Théorème 1.1 (Dehornoy). *Le groupe de tresses B_n est muni d'une structure d'ordre total défini par*

$$\forall b, b' \in B_n, (b \leq b' \iff b^{-1}b' \text{ } \sigma\text{-positive ou triviale}).$$

Il existe plusieurs approches de l'ordre des tresses et différentes démonstrations de ce résultat, qui sont récapitulées dans [11].

2. ALGORITHMIQUE DES TRESSSES

De nombreuses études des groupes de tresses apportent des solutions algorithmiques au problème des mots que nous avons évoqué précédemment.

2.1. Forme normale de Garside. Considérons le monoïde B_n^+ de présentation

$$\langle \sigma_1, \dots, \sigma_{n-1} \mid \sigma_i \sigma_j = \sigma_j \sigma_i \text{ pour } |j - i| \geq 2, \sigma_i \sigma_j \sigma_i = \sigma_j \sigma_i \sigma_j \text{ pour } |j - i| = 1 \rangle.$$

Ce monoïde se plonge dans le groupe de tresses B_n ; c'est l'ensemble des tresses dites *positives*. De plus, le groupe B_n est le groupe de fractions du monoïde B_n^+ , c'est-à-dire que toute tresse est le quotient de deux tresses positives. Soit Δ_n la tresse $(\sigma_1)(\sigma_2\sigma_1)\dots(\sigma_k\sigma_{k-1}\dots\sigma_1)\dots(\sigma_{n-1}\dots\sigma_1)$, qui correspond à appliquer un demi-tour complet aux n brins. On appelle *simple* une tresse b de B_n qui divise Δ_n , c'est-à-dire telle qu'il existe b' dans B_n^+ avec $bb' = \Delta_n$.

Théorème 2.1 (Garside 1969 [13]). *Toute tresse de B_n a une expression unique de la forme $\Delta_n^k b_1 \dots b_\ell$, où, pour tout i , b_i est le diviseur simple maximal de $b_i b_{i+1}$.*

La forme précédente est appelée *forme normale de Garside* de la tresse considérée. Elle permet de résoudre le problème des mots dans B_n .

Théorème 2.2 (Garside). *Deux mots de tresse de B_n sont équivalents si et seulement si les tresses qu'ils représentent ont même forme normale de Garside.*

La forme normale de Garside permet également de reconnaître les tresses conjuguées dans B_n .

2.2. Réduction des poignées. Une autre réponse au problème des mots est donnée par une technique de réécriture introduite par P. Dehornoy dans [9]. Appelons *poignée* d'un mot de tresse un sous-mot de la forme $\sigma_i^e w \sigma_i^{-e}$, avec $e = \pm 1$, et tel que w ne contient pas à la fois les lettres σ_{i+1} et σ_{i+1}^{-1} , ni aucun $\sigma_j^{\pm 1}$ avec $j \leq i$. La *réduction* de la poignée $\sigma_i^e w \sigma_i^{-e}$ est alors le mot obtenu en remplaçant dans w chaque lettre $\sigma_{i+1}^{\pm 1}$ par $\sigma_{i+1}^{-e} \sigma_i^{\pm 1} \sigma_{i+1}^e$. Le mot réduit obtenu est alors équivalent au mot de départ, comme le montre la figure 3.

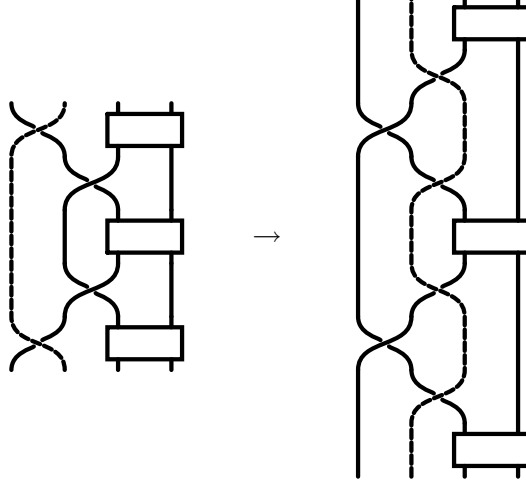


FIG. 3. Réduction d'une poignée. On pousse le brin formant la poignée pour qu'il contourne par la droite les croisements voisins. Les rectangles représentent des sous-mots quelconques. Les mots correspondant aux deux diagrammes sont équivalents.

Théorème 2.3 (Dehornoy). *Toute suite de réduction de poignées d'un mot de tresses donné est finie. De plus, un mot de tresse est équivalent au mot vide si et seulement si une suite de réduction de poignées appliquée à ce mot aboutit au mot vide.*

Cette méthode donne une nouvelle manière de répondre au problème des mots.

Corollaire 2.4 (Dehornoy). *Deux mots de tresses w et w' sont équivalents si et seulement si le mot ww'^{-1} se réduit au mot vide par réduction des poignées.*

Cependant, même si cet algorithme est le meilleur connu à ce jour pour résoudre le problème des mots, sa borne de complexité théorique reste exponentielle, alors que le temps de calcul en pratique est plutôt quadratique.

2.3. Forme normale de Bressaud. Dans un article récent [5], X. Bressaud introduit une autre forme normale pour les tresses. Notons $\sigma_{i,j} = \sigma_i \dots \sigma_{j-1}$, pour $i \leq j$, et $\sigma_{i,j} = \sigma_{j-1}^{-1} \dots \sigma_i^{-1}$, pour $j \leq i$. Ainsi, $\sigma_{i,j}$ est représenté dans tous les cas par le diagramme où le brin en position i vient en position j en passant par dessus tous les brins intermédiaires, comme représenté sur la figure 4. On note S l'alphabet des $\sigma_{i,j}$.

Définition 2.5. Soit $m \in \mathbb{N}$. On dit qu'un mot $\sigma_{i_1,j_1} \dots \sigma_{i_\ell,j_\ell}$ sur l'alphabet S est *m-normal* s'il vérifie les conditions suivantes :

- pour $k \in \{1, \dots, \ell\}$, $j_k = 1$ ou $j_k = m$,
- pour $k \in \{1, \dots, \ell - 1\}$, $j_{k+1} \in [i_k, j_k[$,
- $j_\ell = m$ ou $i_\ell = m$.

On dit alors qu'un mot w est *normal* (au sens de Bressaud) s'il s'écrit $w_n \dots w_2$, où pour chaque k , w_k est k -normal.

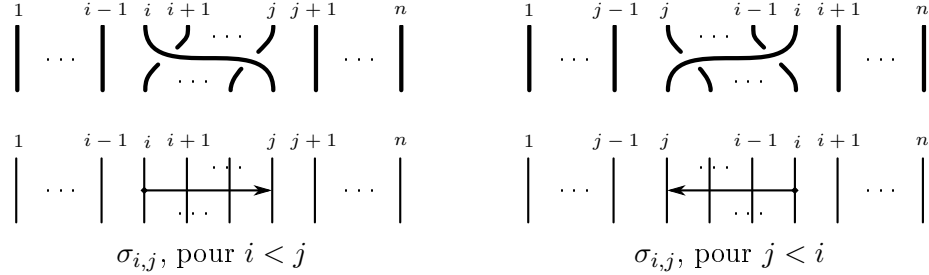


FIG. 4. Représentation des $\sigma_{i,j}$: le brin i vient en position j en passant par-dessus tous les brins intermédiaires. On représente aussi les croisements de la tresse $\sigma_{i,j}$ par une flèche horizontale partant du brin i pour arriver au brin j , les brins intermédiaires étant simplement décalés dans le sens contraire de la flèche.

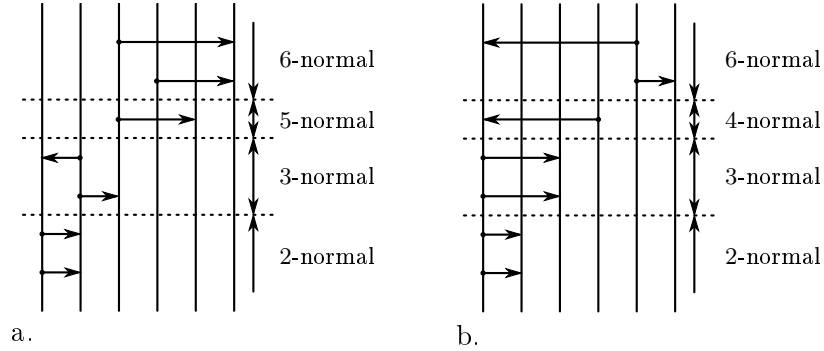


FIG. 5. Représentation Tetris des mots normaux $\sigma_{3,6}\sigma_{4,6}\sigma_{2,5}\sigma_{2,1}\sigma_{2,3}\sigma_{1,2}\sigma_{1,2}$ (a.), et $\sigma_{5,1}\sigma_{5,6}\sigma_{4,1}\sigma_{1,3}\sigma_{1,3}\sigma_{1,2}\sigma_{1,2}$ (b.). La condition de normalité est vérifiée car les diagrammes se décomposent en 4 blocs de largeurs décroissantes, chaque bloc de largeur m étant m -normal.

Théorème 2.6 (Bressaud). *Tout mot de tresse admet un unique mot équivalent normal au sens de Bressaud.*

Bressaud donne une démonstration géométrique de ce résultat qui s'appuie sur un procédé de relaxation de lacets dans le disque troué, et se traduit dans la pratique par des opérations sur des mots du groupe libre à n éléments. La forme normale de Bressaud ainsi définie permet de répondre au problème des mots et de donner une autre approche de l'ordre des tresses. Dans son article, Bressaud propose également un algorithme «Tetris» de réécriture de mots qui permet de trouver le mot normal équivalent à un mot donné de manière plus efficace, comme le montre l'exemple de la figure 6.

Cependant, si cet algorithme donne une démonstration de l'existence de la forme normale, il ne donne pas l'unicité. Dans l'optique d'obtenir une deuxième démonstration du théorème 2.6, entièrement combinatoire et au moyen de réécriture de mots, on s'intéresse à un éventuel algorithme Tetris non déterministe. Pour ce faire, il faut redéfinir le système

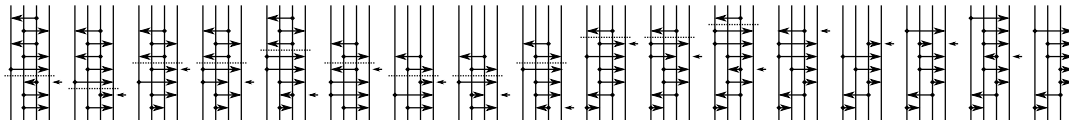


FIG. 6. Application de l'algorithme Tetris pour le calcul de la forme normale du mot $\sigma_{3,1}\sigma_{2,4}\sigma_{3,1}\sigma_{2,4}\sigma_{1,4}\sigma_{3,2}\sigma_{2,4}^2$.

de réécritures autorisées, puis montrer la confluence et la noethérianité du système obtenu. D'autre part, un algorithme non déterministe permettrait d'améliorer la complexité théorique de l'algorithme Tetris de Bressaud, en utilisant la technique du «diviser pour régner».

3. ASPECTS GÉOMÉTRIQUES ET TOPOLOGIQUES

La nature même d'une tresse est géométrique, et les idées de la géométrie servent souvent de base aux études algébriques.

3.1. Tresses géométriques. Une tresse est, comme le suggère l'idée d'une tresse matérielle, une configuration de brins dans $\mathbb{R}^3$, qui conservent une même orientation générale. Plus précisément, on appelle *tresse géométrique à n brins* un ensemble de n chemins continus sans intersection dans $\mathbb{R}^3$, partant des points de coordonnées $(1, 0, 0), \dots, (n, 0, 0)$ et arrivant aux points de coordonnées $(1, 0, 1), \dots, (n, 0, 1)$, tel que chaque chemin ne rencontre qu'une fois tout plan d'équation $z = a$, pour $0 \leq a \leq 1$. Un diagramme de tresse peut alors être vu comme la projection de l'image des chemins sur le plan d'équation $y = 0$, en indiquant la nature de chaque croisement. La relation d'équivalence entre mots de tresse

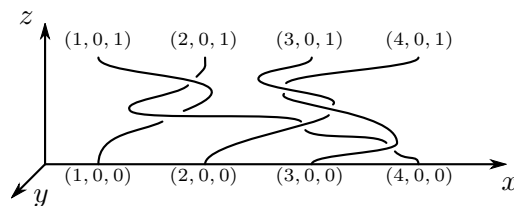


FIG. 7. Tresse géométrique à 4 brins dans $\mathbb{R}^3$.

correspond à la relation d'isotopie entre des figures dans $\mathbb{R}^3$ associées aux diagrammes de tresses. Deux mots sont équivalents si et seulement si on peut passer de la configuration de brins dans $\mathbb{R}^3$ représentant le premier à la configuration représentant le deuxième, et ce sans faire se croiser de brins, ni bouger les extrémités. La relation d'isotopie s'exprime aussi par le fait que le groupe de tresses B_n est isomorphe au groupe fondamental de E_n , où E_n est l'ensemble des configurations de n points distincts de $\mathbb{C}$.

3.2. Groupes des difféotopies d'un disque troué. On note D_n le disque privé de n points. Une *difféotopie* de D_n est une classe d'isotopie de difféomorphismes C^1 de D_n dans lui-même qui fixent la frontière ∂D_n .

Théorème 3.1 ([4]). *Le groupe de tresse B_n est isomorphe au groupe des difféotopies de D_n .*

Il en résulte qu'une tresse agit sur les classes d'homotopie de lacets dans D_n , un point de base étant choisi arbitrairement sur la frontière de D_n , comme on l'a représenté sur la figure 8.

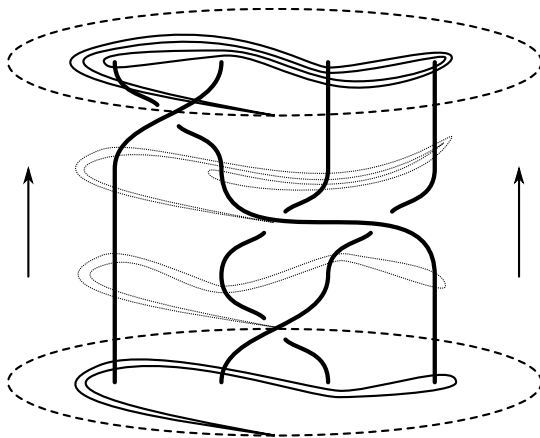


FIG. 8. Action d'une tresse sur un lacet dans D_n : le lacet remonte le long des brins de la tresse sans les traverser.

La représentation précédente est un aspect fondamental du groupe de tresses, qui le relie au groupe fondamental de D_n , c'est-à-dire au groupe d'automorphismes du groupe libre à n générateurs, via la représentation d'Artin. C'est sur cette action que s'appuie notamment la première démonstration de l'existence et de l'unicité de la forme normale de Bressaud évoquée au paragraphe 2.3. L'action d'une tresse vue comme difféotopie de D_n peut être représentée par exemple comme l'image du diamètre principal du disque D_n , comme expliqué dans [11].

L'algorithme de relaxation de lacets de Bressaud, en plus de donner une forme normale de Bressaud, permet de reconnaître les éléments de $\pi_1(D_n)$ qui correspondent à des lacets simples qui font le tour d'un et un seul point, c'est-à-dire qui sont l'image d'un générateur de $\pi_1(D_n)$ par une tresse. On note x_i la classe d'un lacet faisant le tour du point i .

Théorème 3.2. *Un élément u du groupe fondamental $\pi_1(D_n)$ est l'image d'un générateur x_i par une tresse si et seulement si l'algorithme de relaxation appliqué à u termine.*

3.3. Fermeture de tresses et entrelacs. Lorsqu'on ferme une tresse géométrique, en reliant chaque point $(i, 0, 0)$ au point $(i, 0, 1)$ correspondant par un chemin continu, et ce sans que les projections des chemins ajoutés ne se croisent dans le plan $y = 0$, on obtient un entrelacs, qu'on appelle *clôture* de la tresse. Cet entrelacs peut être constitué d'un ou plusieurs nœuds enchevêtrés. La construction de clôtures de tresses relie la théorie des tresses à la théorie des nœuds, grâce aux résultats suivants.

Théorème 3.3 (Markov).

- (i) *Tout entrelacs s'obtient comme clôture d'une tresse.*
- (ii) *Soient b et b' deux tresses de B_n . Les clôtures de b et b' sont isotopes comme entrelacs si et seulement si on peut passer de b à b' par une suite finie de transformations appelées mouvements de Markov consistant soit à remplacer une tresse c par une tresse conjuguée aca^{-1} , soit à remplacer une tresse c de B_n par une tresse $c\sigma_n^{\pm 1}$ de B_{n+1} , ou inversement.*

4. ASPECTS LINÉAIRES

On évoque ici quelques résultats récents relatifs au caractère linéaire des groupes de tresses. Ces résultats sont d'un tout autre niveau.

4.1. Représentation de Burau. La représentation de Burau [8] est définie par l'application qui envoie le générateur σ_i de B_n sur la matrice diagonale par blocs

$$\begin{bmatrix} I_{i-1} & 0 & 0 \\ 0 & A & 0 \\ 0 & 0 & I_{n-i-1} \end{bmatrix}$$

où la matrice I_k est la matrice unité de taille k , et la matrice A est la matrice $\begin{bmatrix} 1-t & t \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$, t étant une indéterminée.

Théorème 4.1 ([18, 19]). *La représentation de Burau est fidèle pour $n = 3$, et non fidèle pour $n \geq 5$. Le cas $n = 4$ est ouvert.*

Cette représentation est très importante car elle mène au polynôme d'Alexander des nœuds.

4.2. Algèbres de Hecke. Une des approches contemporaines les plus prometteuses est la représentation des groupes de tresses dans des algèbres de Hecke.

Définition 4.2. L'algèbre de Hecke $H_n(q)$ est la $\mathbb{C}[q, q^{-1}]$ -algèbre associative engendrée par des générateurs $e_1, \dots, e_{n-1}$ vérifiant les relations de tresses habituelles ainsi que la relation $e_i^2 = (q-1)e_i + q$, pour $1 \leq i \leq n-1$.

On représente alors B_n dans $H_n(q)$ en envoyant σ_i sur e_i .

En construisant une représentation de B_n via $H_n(q)$ et en montrant son invariance par les transformations de Markov, V. Jones a construit en 1984 le polynôme qui porte son nom [15], et permis ainsi de nombreux développements sur les invariants des nœuds et des variétés de dimension 3, dus, entre autres, à V. Turaev, E. Witten, et M. Kontsevich.

4.3. Représentation de Krammer et linéarité des groupes de tresses. En 2000, Daan Krammer a construit une représentation de B_n dans le groupe $GL_m(\mathbb{Z}[t, q, t^{-1}, q^{-1}])$, pour $m = \frac{n(n-1)}{2}$.

Théorème 4.3 (Bigelow [3], Krammer [16, 17]). *La représentation de Krammer est fidèle pour tout n .*

Corollaire 4.4. *Le groupe de tresses B_n est linéaire.*

On sait donc à présent réaliser les groupes de tresses comme groupes de matrices.

5. GÉNÉRALISATIONS DES GROUPES DE TRESSSES

On obtient des généralisations naturelles des groupes de tresses en étendant les diverses approches qui y mènent. De nombreuses questions demeurent quant à la généralisation éventuelle des résultats.

5.1. Groupes de tresses et groupes de Thompson. En 2006, P. Dehornoy a étudié conjointement les groupes de tresses et le groupe de Thompson F au moyen du *groupe de tresses parenthésées* [10]. Ce groupe contient les groupes de tresses B_n et le groupe F . Il a montré que ce groupe, comme les groupes de tresses, est un groupe de fractions, qu'il est muni d'une structure d'ordre, et qu'il s'envoie sur le groupe de difféotopies d'une sphère trouée.

5.2. Généralisation aux croisements singuliers de brins. On généralise la définition du groupe de tresses B_n en faisant intervenir de nouveaux générateurs τ_i , qui correspondent à des croisements singuliers de brins, jusqu'ici interdits. L. Paris a montré récemment qu'en envoyant τ_i sur $\sigma_i - \sigma_i^{-1}$, on obtient un plongement des tresses singulières dans les combinaisons linéaires formelles de tresses.

5.3. Groupes de tresses d'un groupe de réflexion. Soit un groupe de Coxeter fini W , c'est-à-dire un groupe engendré par des réflexions dans un espace euclidien. On construit son groupe de tresses $B(W)$ par la même présentation que le groupe de Coxeter W , en enlevant les relations quadratiques. Cette définition généralise le fait que le groupe de tresses $B(W)$ obtenu est le groupe fondamental d'un ensemble de configurations dépendant de W , comme dans le cas de B_n . On peut alors généraliser la théorie de Garside à $B(W)$. P. Deligne, d'une part, et E. Brieskorn – K. Saito, d'autre part, ont montré que les propriétés obtenues pour $B(W)$ sont alors semblables à celles de B_n [12, 6]. M. Broué – G. Malle – R. Rouquier ont par la suite étendu cette définition aux groupes de réflexions complexes, qui sont des généralisations naturelles des groupes de Coxeter [7].

CONCLUSION

Les groupes de tresses ont de nombreux aspects et applications en mathématiques, certains des plus généraux n'ayant été développés que très récemment. Dans le cadre de mon magistère, j'ai surtout pu m'intéresser aux approches géométriques et algorithmiques, en particulier lors de mon stage de Master 2, ainsi qu'au lien des tresses avec les groupes de réflexions réels et complexes.

RÉFÉRENCES

- [1] E. Artin. « Theorie der Zöpfe ». *Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg*, (4), 1925.
- [2] E. Artin. « Theory of braids ». *Annals of Mathematics*, pages 101–106, 1947.
- [3] S. Bigelow. « Braid groups are linear ». *J. Amer. Math. Soc.*, (14), 2001.
- [4] J.S. Birman. « Braids, links and mapping class groups ». *Annals of Mathematics Studies* 82.

- [5] X. Bressaud. « A normal form for braids ». *Journal of Knot Theory and Its Ramification*.
- [6] E. Brieskorn and K. Saito. « Artin-Gruppen und Coxeter-Gruppen ». *Invent. Math.*, (17), 1972.
- [7] M. Broué, G. Malle, and R. Rouquier. « Complex reflexion groups, braid groups, Hecke algebras ». *J. reine angew. Math.*, (205), 2002.
- [8] W. Burau. « Über Zöpfgruppen und gleichsinnig verdrehte Verkettungen ». *Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg*, (4), 1925.
- [9] P. Dehornoy. « Convergence of handle reduction of braids ». *Lecture notes*.
- [10] P. Dehornoy. « The group of parenthesized braids ». *Advances in Mathematics*, (205), 2006.
- [11] P. Dehornoy, I. Dynnikov, D. Rolfsen, and B. Wiest. *Why are braids orderable?* Panoramas et Synthèses 14. Société Mathématique de France, Paris, 2002.
- [12] P. Deligne. « Les immeubles des groupes de tresses généralisés ». *Invent. Math.*, (17), 1972.
- [13] F.A. Garside. « The braid groups and other groups ». *Quart. J. Math. Oxford Ser. (2)*, (20), 1969.
- [14] K.F. Gauss. *Handbuch 7*. Univ. Göttingen collection.
- [15] V. Jones. « Hecke algebras representations of braid groups and link polynomials ». *Annals of Mathematics*, (126).
- [16] D. Krammer. « The braid group B_4 is linear ». *Invent. Math.*, (142), 2000.
- [17] D. Krammer. « Braid groups are linear ». *Annals of Mathematics*, (155), 2002.
- [18] D. Long and M. Paton. « The Burau representation is not faithful for $n \geq 6$ ». *Topology*, (32), 1992.
- [19] J. Moody. « The Burau representation of the group B_n is unfaithful for large n ». *Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.)*, (25), 1991.