Chapitre A

Espaces de Banach

A.1. Rappels de topologie

A.1.1. Théorème de Baire.

Rappels. • Un espace topologique est dit *localement compact* s'il est séparé (deux points distincts admettent des voisinages distincts) et s'il admet un système fondamental de voisinages compacts (ou encore si tout élément admet un voisinage compact). Par exemple $\mathbb{R},]a, b[, \mathbb{R}^n$ sont localement compacts. En revanche $\mathbb{Q}$ et $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ ne le sont pas.

• Dans tout espace topologique X, l'intersection d'une famille finie d'ouverts denses est encore dense (si $(U_i)_{0\leq i\leq n}$ est une telle famille et V est un ouvert non vide de X, alors $V \cap U_0$ est un ouvert non vide de X car U_0 est dense, et ainsi de suite). Cette propriété ne se généralise pas aux familles infinies, même dénombrables (par exemple si $X = \mathbb{Q}$, muni de la topologie induite de la topologie usuelle sur $\mathbb{R}$, alors $(\mathbb{Q} \setminus \{x\})_{x\in\mathbb{Q}}$ est une famille dénombrable d'ouverts denses dont l'intersection est vide).

Théorème A.1.1 (Baire, 1874-1932)**.** *Les espaces topologiques localement compacts et les ouverts d'un espace métrique complet sont des espaces de Baire au sens où l'intersection d'une famille dénombrable d'ouverts denses est dense dans ces espaces.*

Démonstration. Nous ne démontrerons que le premier cas, l'autre a été traité dans le cours de Topologie et Calcul Différentiel du premier semestre.

Soit donc X un espace topologique localement compact et soit $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une famille dénombrable d'ouverts denses. Soit V un ouvert non vide de X et montrons que $V\cap(\cap_{n\in\mathbb{N}}U_n)$ est non vide. On sait que $V \cap U_0$ est non vide, soit donc $x_0 \in V \cap U_0$ et soit V_0 un voisinage ouvert de x_0 avec $\overline{V_0}$ compact inclus dans $V \cap U_0$. On construit ainsi par récurrence une suite de points $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et une famille d'ouverts $(V_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tels que V_n est un voisinage ouvert de $x_n \in V_{n-1} \cap U_n$ et $\overline{V_n}$ est un compact inclus dans $V_{n-1} \cap U_n$. Alors $\cap\overline{V_n}$ est une intersection décroissante de compacts non vides de $\overline{V}$, qui est non vide et contenue dans $V \cap (\cap_{n\in\mathbb{N}}U_n)$. D'où le résultat. □

Exercice. Tout ouvert d'un espace de Baire est de Baire.

Corollaire A.1.2. *Soit X un espace de Baire. Une réunion dénombrable de fermés d'intérieur vide de X est d'intérieur vide dans X.*

Si la réunion d'une famille dénombrable de fermés de X est d'intérieur non vide dans X, alors l'un des fermés est d'intérieur non vide dans X.

Démonstration. Exercice. □

Définition A.1.3. *a) Une partie d'un espace topologique est dite maigre, ou négligeable au sens de Baire, si elle est contenue dans une réunion dénombrable de fermés d'intérieur vide.*

b) Un $\mathcal{G}_\delta$-dense est une intersection dénombrable d'ouverts denses.

c) Une propriété portant sur les points d'un espace topologique est vraie presque partout au sens de Baire si elle est vraie en dehors d'un ensemble maigre (donc au moins sur un $\mathcal{G}_\delta$-dense).

Exemples. L'ensemble $\mathbb{Q}$ est maigre dans $\mathbb{R}$. L'ensemble $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ est un $\mathcal{G}_\delta$-dense dans $\mathbb{R}$. Le corollaire A.1.5 ci-dessous indique qu'une fonction dérivable est de classe C^1, Baire presque partout.

Attention. Ne pas confondre *presque partout au sens de Baire* et *presque partout au sens des mesures* ! (voir Exercices).

Proposition A.1.4. *Soit X un espace de Baire et Y un espace métrique. Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'applications continues de X dans Y, convergeant simplement vers une application f. Alors f est continue presque partout au sens de Baire.*

Démonstration. On définit les fermés, pour tous les entiers naturels n, p, q,

$$F_{n,p,q} := \Big\{ x \in X \,/\, d\big(f_p(x), f_q(x)\big) \leq 2^{-n} \Big\} \quad \text{et} \quad F_{n,p} := \bigcap_{q \geq p} F_{n,p,q} \, .$$

Pour tout $x \in X$, $f_p(x)$ converge vers $f(x)$ quand p tend vers l'infini, donc la suite $(f_p(x))_{p\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy pour tout $x \in X$ et donc

$$X = \bigcup_{p\in\mathbb{N}} F_{n,p} \, ,$$

pour tout $n \in \mathbb{N}$. Soit U un ouvert non vide de X, alors U est de Baire. En écrivant

$$U = \bigcup_{p\in\mathbb{N}} F_{n,p} \cap U$$

réunion dénombrable de fermés de U, il existe par le corollaire A.1.2 un entier p_0 tel que l'intérieur de $F_{n,p_0} \cap U$ dans U soit non vide. Notons-le $A_{n,U}$. Comme U est ouvert, l'ensemble $A_{n,U}$ est inclus dans F_{n,p_0}. Donc l'union sur tout les ouverts U des $A_{n,U}$, notée A_n, est un ouvert dense. Notons $A := \bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n$, qui est un $\mathcal{G}_\delta$-dense, et montrons que f est continue en tout point de A. Soit $a \in A$. Alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe $p \in \mathbb{N}$ tel que a appartient à l'intérieur de $F_{n,p}$. Soit donc $n \in \mathbb{N}$ et $p \in \mathbb{N}$ associé. Par continuité de f_p il existe un voisinage de a dans lequel tout a' vérifie

$$d\big(f_p(a), f_p(a')\big) \leq 2^{-n} \, .$$

Par ailleurs tous les points x de $F_{n,p}$ vérifient

$$d\big(f_p(x), f(x)\big) = \lim_{q\to\infty} d\big(f_p(x), f_q(x)\big) \leq 2^{-n} \, .$$

Le résultat suit alors par l'inégalité triangulaire : on a pour tout a' dans $F_{n,p}$ suffisamment proche de a

$$d\big(f(a'), f(a)\big) \leq d\big(f(a'), f_p(a')\big) + d\big(f_p(a'), f_p(a)\big) + d\big(f_p(a), f(a)\big) \leq 3 \cdot 2^{-n}$$

et la proposition est démontrée. □

Corollaire A.1.5. *Soit I un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$, F un espace de Banach et $f : I \to F$ une application dérivable. Alors f' est continue Baire presque partout.*

Démonstration. Il suffit d'appliquer la proposition précédente à

$$f_n(x) := 2^n \Big(f(x + 2^{-n}) - f(x) \Big) \, ,$$

ce qui démontre le résultat. □

A.1.2. Semi-normes. On rappelle qu'un espace vectoriel (réel) topologique E est un espace vectoriel muni d'une topologie rendant continues les applications

$$(x, y) \in E \times E \longmapsto x + y\,, \quad (\lambda, x) \in \mathbb{R} \times E \longmapsto \lambda x\,.$$

Définition A.1.6. *Soit E un espace vectoriel. On appelle semi-norme sur E toute application $p : E \to \mathbb{R}^+$ sous-additive et absolument homogène :*

$$\forall (x, y) \in E \times E\,, \quad p(x + y) \le p(x) + p(y)\,;$$
$$\forall \lambda \in \mathbb{R}\,, \quad \forall x \in E\,, \quad p(\lambda x) = |\lambda| p(x)\,.$$

On dit qu'une famille $\mathcal{P}$ de semi-normes sépare les points (ou est séparante) si

$$p(x) = 0 \ \forall p \in \mathcal{P} \quad \Longrightarrow \quad x = 0\,.$$

Soit $\mathcal{P} = (p_\alpha)_{\alpha \in \mathcal{A}}$ une famille de semi-normes. Les ouverts de la topologie associée à $\mathcal{P}$ sont les parties U de E telles que

$$\begin{gathered}\forall x \in U\,, \quad \exists \mathcal{B} \subset \mathcal{A} \neq \emptyset \text{ fini et } r > 0 \quad \text{tels que}\\ B_{\mathcal{B}}(x, r) := \{y \in E \,/\, \forall \beta \in \mathcal{B}\,,\ p_\beta(x - y) < r\} \subset U\,.\end{gathered} \tag{A.1}$$

On rappelle que dans un espace vectoriel topologique E, une suite (x_n) converge vers X si et seulement si pour tout voisinage U de l'origine, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $x_n - x \in U$ pour tout $n \ge N$.

Proposition A.1.7. *Soit E un espace vectoriel topologique muni d'une famille de semi-normes $\mathcal{P} = (p_\alpha)_{\alpha \in \mathcal{A}}$. Une suite de points (x_n) de E converge vers $x \in E$ pour la topologie associée si et seulement si pour tout $\alpha \in \mathcal{A}$, $p_\alpha(x_n - x)$ converge vers 0.*

Démonstration. Exercice. □

Remarques. a) E est séparé si et seulement si $\mathcal{P}$ sépare les points.

b) Si $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}'$ sont deux familles de semi-normes avec $\mathcal{P} \subset \mathcal{P}'$ alors la topologie associée à $\mathcal{P}'$ est plus fine que celle associée à $\mathcal{P}$.

On rappelle qu'un ensemble A d'un espace vectoriel topologique E est borné si pour tout voisinage V de l'origine, il existe $C > 0$ tel que $A \subset C \cdot V$.

Proposition A.1.8. *Soit E un espace vectoriel topologique muni d'une famille séparante de semi-normes $\mathcal{P} = (p_j)_{j \in J}$. Un ensemble $A \subset E$ est borné si et seulement si pour tout $j \in J$ il existe C_j tel que*

$$\forall x \in A\,, \quad p_j(x) \le C_j\,.$$

Démonstration. Supposons A borné. Par la définition (A.1), pour tout $j \in J$ l'ensemble

$$V_j := \{x \in E \,/\, p_j(x) < 1\}$$

est un voisinage de 0 donc il existe une constante $C_j > 0$ telle que $A \subset C_j \cdot V_j$. Par homogénéité de p_j on a donc

$$\forall x \in A\,, \quad p_j(x) \le C_j\,.$$

Inversement supposons cette assertion vraie pour tout $j \in J$. On sait que tout ouvert de E voisinage de 0 contient un ensemble du type

$$V = \bigcap_{j=1}^{L} \{x \in E \,/\, p_{i_j}(x) < \varepsilon_j\}$$

pour un certain choix de $L, p_{i_1}, \dots, p_{i_L}, \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_L$. On vérifie alors que

$$A \subset C \cdot V \quad \text{avec} \quad C = 2 \max_{1 \leq j \leq L} \frac{C_{i_j}}{\varepsilon_j}$$

La proposition est démontrée. $\square$

A.1.3. Espaces de Fréchet.

Définition A.1.9. *On dit qu'un espace vectoriel E est un pré-Fréchet s'il existe une famille dénombrable $\mathcal{P} = (p_j)_{j \in \mathbb{N}}$ de semi-normes séparantes telles que*

$$p_j(x) \leq p_{j+1}(x)\,, \quad \forall j \in \mathbb{N}\,, \quad \forall x \in E\,.$$

Notons que l'hypothèse de croissance n'est pas strictement nécessaire mais on peut toujours s'y ramener en remplaçant p_j par $\sum_{k \leq j} p_k$. La topologie d'un pré-Fréchet est métrisable avec la distance (invariante par translation)

$$d(x, y) := \sum_{j \in \mathbb{N}} 2^{-j} \min(1, p_j(x - y))\,.$$

Définition A.1.10. *Un espace de Fréchet est un pré-Fréchet complet.*

Exemples. a) Soit K un compact de $\mathbb{R}^n$. L'ensemble des fonctions $C^\infty(K)$ est un espace de Fréchet, muni des semi-normes

$$\forall j \in \mathbb{N}\,, \quad p_j(f) := \sup_{|\alpha| \leq j} \sup_{x \in K} |\partial^\alpha f(x)|\,.$$

b) L'espace L^p_{loc} est un Fréchet (considérer les applications $f \mapsto \|f\|_{L^p(K_j)}$).

c) Tout sous-espace fermé d'un Fréchet est un Fréchet.

Remarque. Si Ω est un ouvert de $\mathbb{R}^n$, il est beaucoup plus difficile de définir sur l'ensemble des fonctions $C^\infty(\Omega)$ à support compact une «bonne» topologie. On y reviendra au Chapitre B.

On rappelle qu'une application entre deux espaces vectoriels topologiques E et F est continue si et seulement si l'image réciproque de tout ouvert de F est un ouvert de E. Dans le cas d'espaces E et F définis par une famille de semi-normes $\mathcal{P}$ et $\mathcal{Q}$, la continuité d'une application $\varphi : E \to F$ en x signifie que pour tout $\varepsilon > 0$ et $q \in \mathcal{Q}$ il existe $\delta > 0$ et $p \in \mathcal{P}$ tels que pour tout $x' \in E$ tel que $p(x - x') \leq \delta$, on a $q(\varphi(x') - \varphi(x)) \leq \varepsilon$.

Lemme A.1.11. *Soient $(E, (p_j)_{j \in \mathbb{N}})$ et $(F, (q_k)_{k \in \mathbb{N}})$ deux pré-Fréchet, et soit T une application linéaire de E dans F. Alors T est continue si et seulement si*

$$\forall k \in \mathbb{N}\,, \quad \exists C > 0\,, j \in \mathbb{N}\,, \quad \forall x \in E\,, \quad q_k(Tx) \leq C p_j(x)\,. \tag{A.2}$$

Démonstration. Supposons que l'application T est linéaire continue. Alors pour tout entier k, il existe un voisinage U de l'origine tel que

$$\forall x \in U\,, \quad q_k(Tx) \leq 1\,.$$

Mais il existe $j \in \mathbb{N}$ et $\varepsilon > 0$ tels que

$$\{x \in E \,/\, p_j(x) < \varepsilon\} \subset U$$

et le résultat (A.2) suit alors par homogénéité : si $x \in E$ alors $\dfrac{\varepsilon}{2p_j(x)} x$ appartient à U et donc

$$q_k(Tx) = \frac{2}{\varepsilon} p_j(x) q_k\Big(\frac{\varepsilon}{2p_j(x)} Tx\Big) \leq \frac{2}{\varepsilon} p_j(x)\,.$$

Inversement supposons que (A.2) soit satisfaite et soit $T : E \to F$ une application linéaire. Soit $x \in E$. Si U est un voisinage de Tx dans F alors il existe $k \in \mathbb{N}$ et $\varepsilon > 0$ tels que

$$\Big\{ y \in F \,/ \quad q_k(Tx - y) \leq \varepsilon \Big\} \subset U\,.$$

Par hypothèse il existe $C > 0$ et $j \in \mathbb{N}$ tels que si

$$p_j(x - x') \leq \frac{\varepsilon}{C}$$

alors

$$q_k(Tx - Tx') \leq \varepsilon$$

et donc Tx' appartient à U. Le résultat suit. $\square$

A.1.4. Théorème de Banach-Steinhaus.

Théorème A.1.12 (1927 ; Banach 1892-1945, Steinhaus 1887-1972)**.** *Soient E un espace de Fréchet et F un pré-Fréchet. On considère une famille $(T_\alpha)_{\alpha \in \mathcal{A}}$ d'applications linéaires continues de E dans F telles que pour tout $x \in E$, la famille $(T_\alpha x)_{\alpha \in \mathcal{A}}$ est bornée dans F. Alors $(T_\alpha)_{\alpha \in \mathcal{A}}$ est équi-continue : plus précisément*

$$\forall k \in \mathbb{N}\,, \quad \exists C > 0\,, j \in \mathbb{N}\,, \quad \forall x \in E\,, \quad \forall \alpha \in \mathcal{A}\,, \quad q_k(T_\alpha x) \leq C p_j(x)\,.$$

Dans le cas où E et F sont des espaces de Banach cela signifie qu'il existe $C > 0$ telle que

$$\forall x \in E\,, \quad \forall \alpha \in \mathcal{A}\,, \quad \|T_\alpha x\|_F \leq C \|x\|_E\,.$$

Démonstration. Soit $k \in \mathbb{N}$ fixé. Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on considère

$$F_n := \{x \in E \,/\, \forall \alpha \in \mathcal{A}\,, \quad q_k(T_\alpha x) \leq n\}\,.$$

L'ensemble F_n est fermé, et par l'hypothèse du théorème on a

$$\bigcup_{n \in \mathbb{N}} F_n = E\,.$$

Par le théorème de Baire (Corollaire A.1.2) il existe un entier $N \in \mathbb{N}$ tel que l'intérieur de F_N est non vide. Soit alors $x_0 \in E$ et un voisinage V de 0 dans E, tels que $x_0 + V \subset F_N$. Ce voisinage contient

$$B_{j,\varepsilon} := \{x \in E \,/\, p_j(x) \leq \varepsilon\}$$

pour un certain entier j et un certain réel $\varepsilon > 0$. Alors pour tout $x \in B_{j,1}$

$$\begin{aligned} q_k(T_\alpha x) &= \frac{1}{\varepsilon} q_k(T_\alpha(\varepsilon x)) \\ &\leq \frac{1}{\varepsilon}\Big(q_k(T_\alpha(x_0 + \varepsilon x)) + q_k(T_\alpha x_0)\Big) \leq \frac{2N}{\varepsilon}\,. \end{aligned}$$

Le théorème est démontré. $\square$

Corollaire A.1.13. *Soient E un espace de Fréchet et F un pré-Fréchet. On considère une famille $(T_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'applications linéaires continues de E dans F convergeant simplement vers T. Alors T est linéaire continue de E dans F. De plus si (x_n) converge vers x dans E alors $(T_n x_n)$ converge vers Tx dans F.*

Démonstration. Exercice. $\square$

Corollaire A.1.14. *Soit G un espace de Banach et B un sous-ensemble de G. On suppose que pour tout $f \in G^*$, l'ensemble $f(B) := \bigcup_{x \in B} \langle f, x \rangle$ est borné. Alors B est borné.*

Démonstration. Il suffit d'appliquer le théorème de Banach-Steinhaus à $E = G^*$, $F = \mathbb{R}$ et $\mathcal{A} = B$. La famille $(T_b f)_{b\in B}$ défine par

$$T_b f := \langle f, b\rangle\,, \quad f \in G^*\,, \quad b \in B$$

et bornée donc $(T_b f)_{b\in B}$ est uniformément bornée : il existe une constante $C > 0$ telle que pour tout $f \in G^*$ et tout $b \in B$

$$|T_b f| \leq C\|f\|_{G^*}\,.$$

Le corollaire est démontré. □

A.1.5. Théorèmes de l'application ouverte et du graphe fermé.

Théorème A.1.15 (Application ouverte)**.** *Soient E et F deux espaces de Fréchet et T une application de E dans F linéaire, continue et surjective. Alors T est ouverte, c'est-à-dire que l'image par T de tout ouvert de E est un ouvert de F. Si T est bijective alors c'est un homéomorphisme.*

Démonstration. On munit E et F d'une famille de semi-normes et on leur associe la topologie définie au Paragraphe A.1.2 ainsi que les distances d_E et d_F associées (voir le Paragraphe A.1.3). Montrons tout d'abord que

$$\forall r > 0\,, \quad \exists \rho > 0\,, \quad \forall x \in E\,, \quad B_F(Tx, \rho) \subset \overline{T(B_E(x, r))}\,. \tag{A.3}$$

Commençons par montrer le résultat pour $x = 0$. Soit donc $r > 0$, et soit $F_n := n\overline{T(B_E(0, \frac{r}{2}))}$. Alors $F = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} F_n$ car T est linéaire surjective et

$$E = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} nB_E(0, \frac{r}{2})\,.$$

Donc par le théorème de Baire (Corollaire A.1.2), il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que l'intérieur de F_N est non vide. Donc l'intérieur de $\overline{T(B_E(0, \frac{r}{2}))}$ est non vide (car les homothéties sont des homéomorphismes). Donc il existe $y \in F$ et $\rho > 0$ tel que $B_F(y, \rho) \subset \overline{T(B_E(0, \frac{r}{2}))}$. On écrit alors

$$\begin{aligned} B_F(0, \rho) &= -y + B_F(y, \rho) \\ &\subset -y + \overline{T(B_E(0, \frac{r}{2}))} \end{aligned}$$

et donc par symétrie et par linéarité de T,

$$\begin{aligned} B_F(0, \rho) &\subset \overline{T(B_E(0, \frac{r}{2}))} + \overline{T(B_E(0, \frac{r}{2}))} \\ &\subset \overline{T(B_E(0, r))}\,. \end{aligned}$$

Le résultat (A.3) suit par invariance par translation de la distance associée aux semi-normes et par linéarité de T.

Pour conclure montrons plus généralement le résultat suivant : si X et Y sont deux espaces métriques avec X complet et si T est une application continue de X dans Y vérifiant

$$\forall r > 0\,, \quad \exists \rho > 0\,, \quad \forall x \in X\,, \quad B_Y(Tx, \rho) \subset \overline{T(B_X(x, r))}\,, \tag{A.4}$$

alors

$$\forall r > 0\,, \quad \exists \rho > 0\,, \quad \forall x \in X\,, \quad B_Y(Tx, \rho) \subset T(B_X(x, 3r))$$

ce qui achèvera la démonstration du théorème. Soit donc $r > 0$ et ρ associé par (A.4) et considérons une suite $(\rho_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de réels positifs, décroissante vers zéro telle que $\rho_0 = \rho$ et

$$\forall x \in X\,, \quad B_Y(Tx, \rho_n) \subset \overline{T(B_X(x, 2^{-n}r))}\,.$$

Soit maintenant $x \in X$ fixé, et soit $y \in B_Y(Tx, \rho)$. Il s'agit de montrer que $y \in T\big(B_X(x, 2r)\big)$.

On va construire par récurrence une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de X telle que $Tx_n \in B_Y(y, \rho_n)$ et $x_n \in B_X(x_{n-1}, 2^{1-n}r)$. On choisit $x_0 = x$, qui convient puisque y appartient à $B_Y(Tx, \rho)$ et donc Tx appartient à $B_Y(y, \rho)$. Supposons $x_0, \ldots, x_{n-1}$ construits. Alors y appartient à $B_Y(Tx_{n-1}, \rho_{n-1})$, et donc à $\overline{T\big(B_X(x_{n-1}, 2^{1-n}r)\big)}$ par définition de ρ_{n-1}. On peut donc trouver un point de $B_X(x_{n-1}, 2^{1-n}r)$ arbitrairement proche de y, et en particulier il existe x_n dans $B_X(x_{n-1}, 2^{1-n}r)$ tel que $Tx_n \in B_Y(y, \rho_n)$, ce qui termine la construction. La suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy dans X car par l'inégalité triangulaire dès que $p \geq 2$

$$d_X(x_n, x_{n+p}) \leq \sum_{k=0}^{p-1} d_X(x_{n+k}, x_{n+k+1}) \leq r \sum_{k=0}^{p-1} 2^{-n-k} < 2^{1-n}r \quad \longrightarrow 0\,, \quad n \to \infty\,.$$

Donc la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers une limite $x' \in X$, qui vérifie par le même calcul que ci-dessus (en prenant $n = 0$ et $p \to \infty$)

$$d_X(x, x') < 3r\,.$$

Par continuité de T et comme $d_Y(Tx_n, y) \leq \rho_n$, on en déduit que

$$y = \lim_{n\to\infty} Tx_n = Tx'\,.$$

On a donc $y \in T\big(B_X(x, 2r)\big)$, ce qu'il fallait démontrer. □

Remarque. La démonstration montre que si T n'est pas surjective alors $T(E)$ est maigre.

Théorème A.1.16 (Graphe fermé)**.** *Soient E et F deux espaces de Fréchet et T une application de E dans F. Alors T est continue si et seulement si son graphe*

$$G := \big\{(x, y) \in E \times F \,/\, y = Tx\big\}$$

est fermé dans $E \times F$.

Démonstration. Il est toujours vrai que si T est continue alors son graphe est fermé.

Inversement supposons que G est fermé. Comme T est linéaire, G est un sous-espace vectoriel de $E \times F$, qui est fermé dans $E \times F$ par hypothèse, donc G est un Fréchet. L'application de première projection

$$\pi_1 : \begin{array}{r} G \longrightarrow E \\ (x, y) \longmapsto x \end{array}$$

est linéaire, continue et bijective donc par le théorème de l'application ouverte c'est un isomorphisme. En notant

$$\pi_2 : \begin{array}{r} G \longrightarrow F \\ (x, y) \longmapsto y \end{array}$$

l'application de deuxième projection, il s'ensuit que $T = \pi_2 \circ \pi_1^{-1}$ est continue. □

A.2. Théorèmes de Hahn-Banach

A.2.1. Rappels sur le lemme de Zorn. Soit P un ensemble muni d'une relation d'ordre partielle $\prec$.

On dit qu'un sous-ensemble Q de P est *totalement ordonné* si

$$\forall (a, b) \in Q\,, \quad \text{soit} \quad a \prec b \quad \text{soit} \quad b \prec a\,.$$

On dit que $c \in P$ est un *majorant* d'un sous-ensemble Q de P si

$$\forall a \in Q\,, \quad a \prec c\,.$$

On dit que $m \in P$ est un *élément maximal* de P si

$$\forall x \in P\,, \quad m \prec x \Longrightarrow x = m\,.$$

On dit que P est *inductif* si tout sous-ensemble totalement ordonné de P admet un majorant.

Lemme A.2.1 (Zorn, 1935)**.** *Tout ensemble ordonné inductif non vide admet un élément maximal.*

Remarque. La démonstration repose sur la forme forte de l'axiome du choix (Zermelo, 1904) et sera admise. Ce lemme a des applications importantes, pour montrer des résultats d'existence (base d'un espace vectoriel, forme linéaire sur un espace vectoriel...).

Exemples. a) Soit E un ensemble. L'ensemble des parties de E muni de l'inclusion est inductif car E majore tout sous-ensemble de E. Dans ce cas le lemme de Zorn est trivial puisque E est maximal.

b) Soit $\mathcal{I}(E, F)$ l'ensemble des injections partielles de E dans F défini de la façon suivante. Un ensemble $G \subset E \times F$ appartient à $\mathcal{I}(E, F)$ si l'on a : (x, y) et (x, y') sont dans G implique que $y = y'$ et de même (x, y) et (x', y) sont dans G implique que $x = x'$. Muni de l'inclusion, cet ensemble est inductif. Le lemme de Zorn implique alors qu'il existe un élément maximal, dont on vérifie que c'est le graphe d'une injection de E dans F, ou d'une injection de F dans E. On en déduit que pour tous les ensembles E et F, il existe une injection de l'un dans l'autre ou réciproquement (c'est le *théorème de comparabilité cardinale*).

Les théorèmes A.2.2 et A.2.13 qui suivent peuvent être démontrés sans le lemme de Zorn (donc sans la forme forte de l'axiome du choix) si l'on suppose que l'espace de départ est de dimension dénombrable (par exemple un espace de Hilbert) ou séparable. Ils ont été obtenus de manière indépendante par Hahn et Banach dans les années 1927-1930.

L'intérêt de la «forme analytique» (Paragraphe A.2.2) est de permettre d'introduire (par dualité) des topologies faibles, pour lesquelles on a de bonnes propriétés de compacité. La «forme géométrique» (Paragraphe A.2.3) est notamment utile en analyse convexe. Nous verrons des applications des deux formes dans ce cours.

A.2.2. Théorème de Hahn-Banach (forme analytique). Soit E un espace vectoriel réel et F un sous-espace vectoriel de E. Si f est une forme linéaire sur F, on dit que $\widetilde{f}$ est un prolongement linéaire de f à E si $\widetilde{f}$ est une forme linéaire sur E telle que $\widetilde{f}_{|F} = f$.

On rappelle qu'une application positivement homogène vérifie

$$\forall \lambda > 0\,, \quad \forall x \in E\,, \quad p(\lambda x) = \lambda p(x)\,.$$

Théorème A.2.2 (Hahn-Banach - forme analytique)**.** *Soit E un espace vectoriel réel et $p : E \to \mathbb{R}$ une application sous-additive et positivement homogène. Si F est un sous-espace vectoriel de E et f est une forme linéaire sur F telle que*

$$\forall x \in F\,, \quad f(x) \le p(x)\,,$$

alors il existe un prolongement linéaire $\widetilde{f}$ de f à E tel que

$$\forall x \in E\,, \quad \widetilde{f}(x) \le p(x)\,.$$

Démonstration. Soit $\mathcal{P}$ l'ensemble des prolongements de f, c'est-à-dire l'ensemble des couples (G, g) avec G sous-espace vectoriel de E contenant F, et où g est une forme linéaire sur G telle que $g_{|F} = f$ et vérifiant

$$\forall x \in G\,, \quad g(x) \leq p(x)\,.$$

Alors $\mathcal{P}$ est non vide car $(F, f) \in \mathcal{P}$. Par ailleurs $\mathcal{P}$ est ordonné par la relation d'ordre partiel

$$(G_1, g_1) \prec (G_2, g_2) \quad \text{si} \quad G_1 \subset G_2 \quad \text{et} \quad g_{2|G_1} = g_1\,.$$

Montrons que $\mathcal{P}$ est inductif : soit $\mathcal{Q} \subset \mathcal{P}$ un ensemble totalement ordonné, que l'on écrit sous la forme

$$\mathcal{Q} = (G_i, g_i)_{i \in I}\,.$$

Un majorant de $\mathcal{Q}$ est le couple $(\widetilde{G}, \tilde{g})$ avec

$$\widetilde{G} := \bigcup_{i \in I} G_i \quad \text{et} \quad \forall x \in \widetilde{G}\,,\ \tilde{g}(x) = g_i(x) \text{ avec } x \in G_i\,.$$

En effet $\tilde{g}$ est bien définie, $(\widetilde{G}, \tilde{g}) \in \mathcal{P}$ et $(\widetilde{G}, \tilde{g})$ est un majorant pour $\mathcal{Q}$. L'ensemble $\mathcal{P}$ est donc inductif. Par le lemme de Zorn, $\mathcal{P}$ admet donc un élément maximal $(G_0, g_0) \in \mathcal{P}$.

Montrons que $G_0 = E$. Sinon il existe $x_0 \in E \setminus G_0$ et on pose $G' := G_0 + \mathbb{R}x_0$. On définit l'application g' sur G' par, pour tout $x \in G_0$ et pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$g'(x + tx_0) = g_0(x) + t\alpha$$

et l'on va construire $\alpha \in \mathbb{R}$ de sorte que $(G', g') \in \mathcal{P}$ (ce qui fournira une contradiction puisque $(G_0, g_0) \prec (G', g')$). On doit donc choisir α de sorte que pour tout $x \in G_0$ et pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$g'(x + tx_0) \leq p(x + tx_0)\,.$$

Comme p est positivement homogène, il suffit de démontrer le résultat pour $|t| = 1$, donc de montrer que pour tout $x \in G_0$

$$g_0(x) + \alpha \leq p(x + x_0) \quad \text{et} \quad g_0(x) - \alpha \leq p(x - x_0)\,.$$

Il suffit donc de démontrer qu'il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que

$$\sup_{y \in G_0} \big(g_0(y) - p(y - x_0)\big) \leq \alpha \leq \inf_{y \in G_0} \big(p(y + x_0) - g_0(y)\big)\,, \tag{A.5}$$

ce qui suit du fait que pour tout $y, y' \in G_0$

$$g_0(y) + g_0(y') = g_0(y + y') \leq p(y + y') \leq p(y' + x_0) + p(y - x_0)\,.$$

On a donc

$$\sup_{y \in G_0} \big(g_0(y) - p(y - x_0)\big) \leq \inf_{y' \in G_0} \big(p(y' + x_0) - g_0(y')\big)\,,$$

et (A.5) est donc vérifié. On en déduit la contradiction cherchée, donc $G_0 = E$.

Le théorème A.2.2 est démontré en choisissant $\widetilde{f} = g_0$. □

On note dorénavant E^* l'ensemble des formes linéaires continues sur E, muni de la norme

$$\|f\|_{E^*} := \sup_{\|x\|_E \leq 1} |f(x)| = \sup_{\|x\|_E \leq 1} f(x)\,.$$

Corollaire A.2.3. *Soit E un espace vectoriel normé et G un sous-espace de E. Si f est une forme linéaire continue sur G alors on peut la prolonger en une forme linéaire continue sur E, de même norme que f.*

Démonstration. Il suffit d'appliquer le théorème précédent à la fonction

$$p : \begin{array}{l} E \longrightarrow \mathbb{R}^+ \\ x \longmapsto \|f\|_{G^*}\|x\|_E \end{array}$$

et le corollaire est démontré. □

Corollaire A.2.4. *Soit E un espace vectoriel normé. Pour tout $x_0 \in E$, il existe une forme linéaire continue $f_0 \in E^*$ telle que*

$$\|f_0\|_{E^*} = \|x_0\|_E \quad et \quad f_0(x_0) = \|x_0\|_E^2 .$$

Démonstration. Il suffit d'appliquer le corollaire précédent à $G = \mathbb{R}x_0$ et

$$f(tx_0) := t\|x_0\|_E^2 .$$

et le corollaire est démontré. □

Corollaire A.2.5. *Soit E un espace vectoriel normé, alors pour tout $x \in E$ on a*

$$\|x\|_E = \sup_{\|f\|_{E^*} \leq 1} |f(x)| = \max_{\|f\|_{E^*} \leq 1} |f(x)| .$$

Démonstration. Soit $x \neq 0$ fixé dans E. On sait que

$$\sup_{\|f\|_{E^*} \leq 1} |f(x)| \leq \|x\|_E .$$

D'après le Corollaire A.2.4, il existe $f_x \in E^*$ telle que

$$\|f_x\|_{E^*} = \|x\|_E \quad \text{et} \quad f_x(x) = \|x\|_E^2 .$$

Il suffit alors de poser

$$\tilde{f}_x := \frac{1}{\|x\|_E} f_x$$

qui vérifie

$$\|\tilde{f}_x\|_{E^*} = 1 \quad \text{et} \quad \tilde{f}_x(x) = \|x\|_E .$$

Cela démontre le résultat cherché. □

A.2.3. Théorème de Hahn-Banach (forme géométrique).

A.2.3.1. *Hyperplans affines.* Soit E un espace vectoriel réel. Un *hyperplan affine* de E est un sous-espace affine de codimension 1 dans E. De manière équivalente, c'est un sous-espace H de E de la forme

$$H = \{x \in E \,/\, f(x) = \alpha\}$$

où f est une forme linéaire non identiquement nulle et $\alpha \in \mathbb{R}$ est donné. On dit que $f = \alpha$ est l'équation de H (toute autre équation est de la forme $\lambda f = \lambda\alpha$ avec $\lambda \neq 0$) et on note $H = [f = \alpha]$.

Proposition A.2.6. *Soit E un espace vectoriel topologique réel. L'hyperplan $H = [f = \alpha]$ est fermé si et seulement si f est continue.*

Démonstration. Si f est continue alors clairement l'hyperplan $H = [f = \alpha]$ est fermé, puisque les singletons de $\mathbb{R}$ sont fermés et $H = f^{-1}(\{\alpha\})$.

Montrons l'implication réciproque. Comme les translations sont des homéomorphismes on peut supposer que $\alpha = 0$. On rappelle que l'espace quotient $E_{/H}$ est séparé si et seulement si H est fermé. En outre comme H est un hyperplan, $E_{/H}$ est de dimension 1. On définit l'application linéaire f passée au quotient

$$\widetilde{f} : E_{/H} \longrightarrow \mathbb{R}$$

et en notant $\pi : E \to E_{/H}$ la projection canonique (continue) on a $f = \widetilde{f} \circ \pi$ donc il suffit de montrer que $\widetilde{f}$ est continue, en 0 par linéarité. Notons que l'application $\widetilde{f}$ est définie de la manière suivante : on fixe dorénavant $x \in E_{/H}$ non nul, et l'on a

$$\forall y = \lambda x \in E_{/H}\,, \quad \widetilde{f}(y) = \lambda f(x)\,.$$

Soit $\varepsilon > 0$. Comme $E_{/H}$ est séparé, il existe un voisinage V_ε de 0 dans $E_{/H}$ ne contenant pas εx. On pose

$$V'_\varepsilon := \bigcap_{|\lambda| \geq 1} \lambda V_\varepsilon\,.$$

On a clairement $V'_\varepsilon \subset V_\varepsilon$, montrons que V'_ε est un voisinage de 0. Par continuité de l'application $(\lambda, y) \mapsto \lambda y$, il existe $\eta > 0$ et un voisinage W de 0 dans $E_{/H}$ tels que pour tout $y \in W$, pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $|\lambda| \leq \eta$, on ait $\lambda y \in V_\varepsilon$. Alors ηW est un voisinage de 0 contenu dans V'_ε — puisque si $y \in W$ et $|\lambda| \geq 1$ alors $|\eta/\lambda| \leq \eta$ et donc $\eta y \in \lambda V_\varepsilon$. On en déduit que V'_ε est un voisinage de 0. Notons en outre que par construction,

$$|\mu| \leq 1 \Longrightarrow \mu V'_\varepsilon \subset V'_\varepsilon\,.$$

Montrons à présent que

$$\text{si} \quad y = \lambda x \in V'_\varepsilon\,, \quad \text{alors} \quad |\lambda| < \varepsilon\,,$$

ce qui impliquera que $\widetilde{f} : y = \lambda x \mapsto \lambda f(x)$ est continue en 0. Supposons donc qu'il existe $y = \lambda x \in V'_\varepsilon$ avec $|\lambda| \geq \varepsilon$. Alors en écrivant

$$\varepsilon x = \frac{\varepsilon}{\lambda} y$$

on constate que $y \in V'_\varepsilon$ et $|\varepsilon/\lambda| \leq 1$ donc $\varepsilon x \in V'_\varepsilon$. On a donc une contradiction et le résultat suit. □

A.2.3.2. *Espaces localement convexes.* Cette notion, utile pour la théorie de la dualité (voir le paragraphe A.3.1) a été introduite dans les années trente, notamment par A. Kolmogorov. On rappelle que $A \subset E$ est convexe si

$$\forall t \in [0,1]\,, \quad \forall (x,y) \in A \times A\,, \quad tx + (1-t)y \in A\,.$$

Définition A.2.7 (Espace vectoriel topologique localement convexe)**.** *Soit E un espace vectoriel topologique réel. On dit que E est localement convexe si l'origine admet un système fondamental de voisinages convexes.*

Définition A.2.8 (Jauge d'un convexe)**.** *Soit E un espace vectoriel topologique réel et C un voisinage convexe de l'origine. On appelle jauge de C (ou encore fonctionnelle de Minkowski) l'application*

$$\|\cdot\|_C : \begin{array}{l} E \longrightarrow \mathbb{R}^+ \\ x \longmapsto \inf\{t > 0 \,/\, \frac{1}{t} x \in C\} = \inf\{t > 0 \,/\, x \in tC\}\,, \end{array}$$

en convenant que $\inf(\emptyset) = \infty$.

Lemme A.2.9. *Soit E un espace vectoriel topologique réel et C un voisinage convexe de l'origine. La jauge de C est bien définie et les propriétés suivantes sont vérifiées :*

a) pour tout $\lambda > 0$ et pour tout couple (x,y) de E,

$$\|\lambda x\|_C = \lambda \|x\|_C \quad \text{et} \quad \|x+y\|_C \leq \|x\|_C + \|y\|_C\,;$$

b) si C est ouvert alors $C = \{x \in E \,/\, \|x\|_C < 1\}$;

c) la jauge de C est une application continue.

Démonstration. Remarquons que $\|\cdot\|_C$ est bien définie : pour tout $x \in E$ et pour tout t assez grand, comme C est un voisinage de 0 on a bien $\frac{1}{t}x \in C$.

a) On note que $\|0\|_C = 0$ (d'ailleurs $\|x\|_C = 0$ pour tout x tel que $\mathbb{R}^+x \subset C$). Par construction $\|\lambda x\|_C = \lambda\|x\|_C$ si $\lambda > 0$. Montrons la sous-additivité : soient $x, y \in E$ et $s, t > 0$ tels que $\dfrac{1}{s}x$ et $\dfrac{1}{t}y$ sont dans C. Soit $\sigma := \frac{s}{s+t} \in [0, 1]$. Alors

$$\frac{1}{s+t}(x+y) = \sigma\frac{x}{s} + (1-\sigma)\frac{y}{t} \in C$$

car C est convexe. Donc

$$\|x+y\|_C \leq s+t\,.$$

En prenant l'inf sur s et t on en déduit le résultat.

b) Supposons que C est ouvert. Alors pour tout $x \in C$ il existe $\varepsilon > 0$ tel que $(1+\varepsilon)x$ appartient à C. On en déduit que

$$\|x\|_C \leq \frac{1}{1+\varepsilon} < 1\,.$$

Inversement si $x \in E$ est tel que $\|x\|_C < 1$, montrons que $x \in C$. Comme $\|x\|_C < 1$, il existe $t \in (0, 1)$ tel que $\frac{1}{t}x \in C$, et donc on a

$$x = t\Big(\frac{1}{t}x\Big) + (1-t)0 \in C$$

puisque C est convexe, d'où le résultat.

c) On a par *a)*

$$\Big|\|x\|_C - \|y\|_C\Big| \leq \|x-y\|_C$$

donc il suffit de montrer la continuité en 0. Celle-ci provient du fait que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe V_ε voisinage de 0 contenu dans εC. Pour tout $x \in V_\varepsilon$ on a $\|x\|_C \leq \varepsilon$, et le résultat suit. $\square$

Théorème A.2.10. *Un espace vectoriel topologique est localement convexe si et seulement si sa topologie est définie par une famille de semi-normes.*

De même un espace vectoriel topologique admet un système fondamental dénombrable de voisinages convexes de l'origine si et seulement si sa topologie est définie par une famille dénombrable de semi-normes.

Démonstration. $\Longleftarrow$ Soit E un espace vectoriel topologique, et $(p_\alpha)_{\alpha\in\mathcal{A}}$ une famille de semi-normes sur E. Alors les ensembles

$$\{x \in E \,/\, \forall \beta \in \mathcal{B}\,,\ p_\beta(x) < \varepsilon\}$$

où $\mathcal{B}$ est une partie finie de $\mathcal{A}$ et ε un réel strictement positif, forment un système fondamental de voisinages ouverts (dénombrable si la famille $\mathcal{A}$ l'est, et ε est rationnel) pour la topologie définie par ces semi-normes. Comme ces ensembles sont convexes par l'inégalité triangulaire, l'ensemble E muni de cette topologie est localement convexe.

$\Longrightarrow$ Soit E un espace vectoriel topologique localement convexe. On remarque que pour tout voisinage ouvert convexe C de 0 alors $C \cap -C$, qui est non vide, est aussi un voisinage ouvert convexe de 0, et il est de plus symétrique et contenu dans C. Soit donc $\mathcal{V}$ un système fondamental de voisinages ouverts de 0, convexes et symétriques, et montrons que la topologie définie par $(\|\cdot\|_C)_{C\in\mathcal{V}}$ (qui est dénombrable si $\mathcal{V}$ l'est) coïncide avec la topologie originelle $\mathcal{T}$ de E. Il suffit de montrer que tout voisinage de 0 pour l'une est voisinage de 0 pour l'autre et réciproquement.

- Si $C \in \mathcal{V}$ alors par le lemme précedent

$$C = \{x \in E \,/\, \|x\|_C < 1\}$$

donc tout voisinage ouvert de 0 pour $\mathcal{T}$ est un voisinage ouvert de 0 pour la topologie définie par $(\|\cdot\|_C)_{C\in\mathcal{V}}$.

- Soit $C \in \mathcal{V}$ et $\varepsilon > 0$, on a

$$\{x \in E \,/\, \|x\|_C < \varepsilon\} = \varepsilon C\,.$$

Comme les homothéties sont des homéomorphismes fixant le vecteur nul, tout voisinage ouvert de 0 pour $(\|\cdot\|_C)_{C\in\mathcal{V}}$ est un voisinage ouvert de 0 pour $\mathcal{T}$. □

Lemme A.2.11. *Soit E un espace vectoriel topologique réel et soit C un convexe ouvert non vide de E. Pour tout $x_0 \in E \setminus C$, il existe une forme linéaire continue ℓ sur E telle que*

$$\forall x \in C\,, \quad \ell(x) < \ell(x_0)\,.$$

Démonstration. Par linéarité de ℓ on peut supposer que $0 \in C$. Soit $F := \mathbb{R}x_0$ et soit p la jauge de C. Soit la forme linéaire

$$f : \begin{array}{rcl} F & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ \lambda x_0 & \longmapsto & \lambda\,. \end{array}$$

On sait par le lemme A.2.9 que $C = \{x \in E \,/\, p(x) < 1\}$ donc comme $x_0 \notin C$, $p(x_0) \geq 1$. On a donc

$$\forall \lambda \in \mathbb{R}\,, \quad f(\lambda x_0) \leq p(\lambda x_0)$$

(notons que pour $\lambda \leq 0$ c'est évident !)

Par le théorème de Hahn-Banach analytique il existe donc ℓ sur E prolongeant f, telle que $\ell \leq p$. Donc pour tout $\varepsilon > 0$ et pour tout $x \in \varepsilon C \cap (-\varepsilon C)$

$$|\ell(x)| = \ell((\operatorname{signe} \ell(x))\, x) \leq p((\operatorname{signe} \ell(x))\, x) \leq \varepsilon$$

car $(\operatorname{signe} \ell(x))\, x$ appartient à εC, donc ℓ est continue en 0 donc partout. De plus pour tout $x \in C$ on a

$$\ell(x) \leq p(x) < 1$$

et comme $\ell(x_0) = 1$ le lemme suit. □

A.2.3.3. *Énoncé et démonstration du théorème.*

Définition A.2.12. *Soit E un espace vectoriel topologique réel, et A et B deux sous-ensembles de E. On dit que l'hyperplan $H = [f = \alpha]$ sépare A et B si*

$$\forall x \in A\,, \quad f(x) \leq \alpha \quad \text{et} \quad \forall x \in B\,, \quad f(x) \geq \alpha\,.$$

On dit que l'hyperplan $H = [f = \alpha]$ sépare strictement A et B s'il existe $\varepsilon > 0$ tel que

$$\forall x \in A\,, \quad f(x) \leq \alpha - \varepsilon \quad \text{et} \quad \forall x \in B\,, \quad f(x) \geq \alpha + \varepsilon\,.$$

Théorème A.2.13 (Hahn-Banach - forme géométrique)**.** *Soit E un espace vectoriel topologique réel, et A et B deux convexes non vides disjoints de E.*

a) Si A est ouvert alors il existe un hyperplan affine fermé séparant A et B ;

b) Si E est localement convexe, si A est compact et B est fermé, alors il existe un hyperplan affine fermé séparant strictement A et B.

Démonstration. *a)* Soit $C := \{x - y\,,\ x \in A\,, y \in B\}$, convexe et non vide (car c'est le cas pour A et B), et ouvert car

$$C = \bigcup_{y \in B} (A - y)$$

et ne contenant pas 0 car $A \cap B = \emptyset$. Par le Lemme A.2.11 avec $x_0 = 0$, il existe une forme linéaire continue ℓ sur E telle que $\ell(c) < 0$ pour tout $c \in C$. Alors $\ell(x) < \ell(y)$ pour tout $x \in A$ et $y \in B$. Soit $\alpha := \sup_{x \in A} \ell(x)$, alors

$$\alpha \leq \inf_{y \in B} \ell(y)$$

et donc $H = [\ell = \alpha]$ convient : il sépare A et B et est fermé car ℓ est continue (voir la Proposition A.2.6).

b) On a $A \cap B = \emptyset$ et B est fermé donc pour tout $x \in A$ il existe un voisinage ouvert V_x de 0 dans E tel que

$$(x + V_x) \cap B = \emptyset\,. \tag{A.6}$$

Par continuité de l'application $(x, y) \mapsto x + y$ en $(0, 0)$, on peut trouver V'_x voisinage ouvert de 0 dans E tel que $V'_x + V'_x \subset V_x$. Mais A est compact donc il existe $x_1, \ldots, x_n$ dans A tels que $A \subset (x_1 + V'_{x_1}) \cup \cdots \cup (x_n + V'_{x_n})$. Comme $V'_{x_1} \cap \cdots \cap V'_{x_n}$ est un voisinage de 0 et E est localement convexe, il existe W voisinage ouvert convexe de 0 dans E tel que l'on ait $W + (-W) \subset V'_{x_1} \cap \cdots \cap V'_{x_n}$ (par continuité de l'application $(x, y) \mapsto x - y$ en $(0, 0)$). Soient alors $A' := A + W$ et $B' := B + W$, ouverts convexes non vides dans E. Montrons que $A' \cap B' = \emptyset$. Si $a + w = b + w'$ avec $a \in A$, $b \in B$ et $w, w' \in W$, alors on peut écrire $a = x_i + v'_i$ avec $v'_i \in V'_{x_i}$ et alors $b = x_i + v'_i + w - w'$ qui appartient à $B \cap (x_i + V_{x_i})$, ce qui est en contradiction avec (A.6).

Donc $A' \cap B' = \emptyset$ et par *a)* il existe $H := [\ell = \alpha]$ hyperplan affine fermé séparant A' et B' : on a

$$\forall x \in A'\,, \quad \ell(x) \leq \alpha \quad \text{et} \quad \forall y \in B'\,, \quad \ell(y) \geq \alpha\,. \tag{A.7}$$

On remarque que

$$A \cap H = \emptyset \tag{A.8}$$

puisque pour tout $x \in A$ et $w \in W$ on a

$$\alpha \geq \ell(x + w) = \ell(x) + \ell(w)\,.$$

Montrons qu'il existe α' et $\varepsilon' > 0$ tel que $H' := [\ell = \alpha' - \varepsilon']$ sépare strictement A et B. Il suffit de montrer qu'il existe $\varepsilon > 0$ tel que

$$\forall x \in A\,, \quad \ell(x) \leq \alpha - \varepsilon \tag{A.9}$$

et de choisir ensuite $\alpha' = \alpha - \varepsilon/2$ et $\varepsilon' = \varepsilon/2$. Supposons que (A.9) n'est pas vérifiée, alors il existe une suite (x_n) de A telle que

$$\alpha - \frac{1}{n+1} \leq \ell(x_n) \leq \alpha\,.$$

Comme A est compact il existe une valeur d'adhérence $x \in A$ à cette suite et par continuité de ℓ on a $\ell(x) = \alpha$, ce qui contredit (A.8). On a donc bien (A.9), et le théorème est démontré.

(Autre preuve : (A.7) s'écrit aussi

$$\forall (x, y, w, w') \in A \times B \times W \times W\,, \quad \ell(x + w) \leq \alpha \leq \ell(y + w)\,.$$

Il suffit alors de choisir w et w' tels que $\ell(w) < 0$ et $\ell(w') > 0$.) $\square$

Corollaire A.2.14. *Soit E un espace de Banach et F un sous-espace vectoriel de E tel que $\overline{F} \neq E$. Alors il existe $f \in E^*$ non identiquement nulle telle que*

$$\langle f, x\rangle = 0 \quad \forall x \in F \,.$$

Démonstration. Soit $x_0 \in E \setminus \overline{F}$. D'après le théorème de Hahn-Banach (forme géométrique) il existe $f \in E^*$ non identiquement nulle et un réel α tels que l'hyperplan $[f = \alpha]$ sépare strictement $\overline{F}$ et $\{x_0\}$. On a ainsi

$$\forall x \in F \,, \quad \langle f, x\rangle < \alpha < \langle f, x_0\rangle$$

mais alors

$$\forall \lambda \in \mathbb{R} \,, \quad \forall x \in F \,, \quad \lambda\langle f, x\rangle < \alpha$$

et donc $\langle f, x\rangle = 0$ pour tout $x \in F$.

Le corollaire est démontré. □

A.2.4. Application : théorème de Krein-Milman.

Définition A.2.15 (Enveloppe convexe, Enveloppe convexe fermée)**.** *L'enveloppe convexe d'un ensemble A est le plus petit convexe contenant A. C'est donc l'ensemble de toutes les combinaisons linéaires positives finies d'éléments de A, en d'autres termes*

$$co(A) := \Big\{ \sum_{j \in J} \theta_j x_j \,, \ J \text{ fini} \,, \, x_j \in A \,, \, \theta_j \geq 0 \,, \, \sum_{j \in J} \theta_j = 1 \Big\} \,.$$

L'enveloppe convexe fermée $\overline{co(A)}$ d'un ensemble A est le plus petit convexe fermé contenant A. De manière équivalente, c'est l'adhérence de l'enveloppe convexe de A.

Si l'espace ambiant est un Banach, l'enveloppe convexe fermée d'un compact est un compact.

Si A est convexe alors $A = \mathrm{co}(A)$. Par contre si A est fermé on n'a pas nécessairement $\mathrm{co}(A) = \overline{\mathrm{co}(A)}$. Par exemple

$$A = \{(0,0)\} \cup \big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,/\, x > 0 \,, \, xy = 1\big\}$$

est fermé mais

$$\mathrm{co}(A) = \{(0,0)\} \cup \big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,/\, x > 0 \,, \, y > 0\big\}$$

est ouvert.

Si A est compact on n'a pas non plus nécessairement $\mathrm{co}(A) = \overline{\mathrm{co}(A)}$ (prendre par exemple ℓ^2 et le compact formé de 0 et de $(e_n/n)_{n\geq 1}$).

Définition A.2.16 (Partie extrémale, point extrémal)**.** *Soit K une partie d'un espace vectoriel E. On dit qu'un ensemble A est une partie extrémale de K si A est compacte, non vide et*

$$\forall (x,y) \in K^2 \,, \quad \Big(\exists \theta \in (0,1) \,, \ \theta x + (1-\theta) y \in A\Big) \quad \Longrightarrow \quad (x,y) \in A^2 \,.$$

On dit que x_0 est un point extrémal de K si $\{x_0\}$ est une partie extrémale.

En d'autres termes, un point extrémal n'est pas un point intérieur d'un segment entièrement inclus dans K. Par exemple les points extrêmaux de la boule unité euclidienne de $\mathbb{R}^d$ forment la sphère euclidienne unité. Les points extrêmaux d'un pavé de $\mathbb{R}^d$ sont ses sommets.

Théorème A.2.17 (Krein-Milman, 1940)**.** *Soit E un espace vectoriel topologique localement convexe séparé, et K un convexe compact de E. Alors K coïncide avec l'enveloppe convexe fermée de ses points extrémaux.*

Démonstration. Soit $\mathcal{E} := \{\text{points extrémaux de} K\}$. On va commencer par montrer que $\mathcal{E}$ est non vide, puis que $K = \overline{\mathrm{co}(\mathcal{E})}$ où $\mathrm{co}(\mathcal{E})$ est l'enveloppe convexe de $\mathcal{E}$.

- Soit $\mathcal{P}$ l'ensemble des parties extrémales de K. Alors $\mathcal{P}$ est non vide car il contient K. On munit $\mathcal{P}$ de la relation d'ordre partielle $A \prec B$ si $B \subset A$. Montrons que $\mathcal{P}$ est inductif. Soit $\hat{\mathcal{P}} \subset \mathcal{P}$ totalement ordonné, alors $\displaystyle\bigcap_{A \in \hat{\mathcal{P}}} A$ est une partie extrémale non vide, comme intersection de fermés emboîtés dans un compact, qui majore $\hat{\mathcal{P}}$, donc $\mathcal{P}$ est inductif. D'après le lemme de Zorn, $\mathcal{P}$ admet un élément maximal M. Montrons que M est réduit à un point : s'il existe $x_0 \neq x_1$ dans M, alors d'après le théorème de Hahn-Banach (forme géométrique), il existe une forme linéaire continue $f \in E^*$ telle que $f(x_0) < f(x_1)$. Soit

$$\widetilde{M} := \{x \in M \,/\, f(x) = \inf_M f\}\,.$$

Alors $\widetilde{M}$ est non vide car M est compact (comme partie extrémale) et f est continue, et $\widetilde{M}$ est compact car fermé dans un compact. Par ailleurs $\widetilde{M} \subset M$ et cette inclusion est stricte car $f(x_0) < f(x_1)$. Montrons que $\widetilde{M}$ est extrémal, ce qui aboutira à une contradicton : supposons qu'il existe $x, y \in K$ et $\theta \in (0,1)$ tels que

$$\theta x + (1-\theta) y \in \widetilde{M}\,.$$

Alors $\theta x + (1-\theta)y \in M$ donc $x, y \in M$. Par ailleurs

$$\theta f(x) + (1-\theta) f(y) = \inf_M f$$

ce qui implique que $x, y \in \widetilde{M}$. Mais M est extrémal et $M \neq \widetilde{M}$, d'où la contradiction. Donc M est reduit à un point, qui est un point extrémal. Donc $\mathcal{E}$ est non vide.

- On sait que $\overline{\mathrm{co}(\mathcal{E})} \subset K$, supposons qu'il existe $x_0 \in K \setminus \overline{\mathrm{co}(\mathcal{E})}$. On applique à nouveau le théorème de Hahn-Banach géométrique, qui implique qu'il existe une forme linéaire continue $f \in E^*$ telle que

$$\sup\Big\{f(x) \,/\, x \in \overline{\mathrm{co}(\mathcal{E})}\Big\} < f(x_0)\,.$$

Soit alors

$$A := \Big\{x \in K \,/\, f(x) = \sup_K f\Big\}\,.$$

On peut reproduire l'argument précédent concernant $\widetilde{M}$ pour montrer que A est extrémal. De même en considérant l'ensemble $\mathcal{P}_A$ des parties extrémales de K incluses dans A on montre comme ci-dessus qu'il admet un élément maximal réduit à un point, noté x_1, qui appartient donc à $\mathcal{E}$. On a $f(x_1) = \sup_K f$ et donc $f(x_0) \leq f(x_1)$. Mais par ailleurs comme $x_1 \in \mathcal{E}$ on a

$$f(x_1) \leq \sup\Big\{f(x) \,/\, x \in \overline{\mathrm{co}(\mathcal{E})}\Big\}\,,$$

d'où une contradiction. Le théorème est démontré. $\square$

A.3. Dualité et topologies faibles

A.3.1. Premières définitions. Soient E et F deux espaces vectoriels réels et soit $\langle\cdot,\cdot\rangle$ une forme bilinéaire de $F \times E$ dans $\mathbb{R}$ telle que

$$(\forall f \in F\,, \quad \langle f, x\rangle = 0) \quad \Longrightarrow \quad x = 0\,. \tag{A.10}$$

On peut définir une topologie d'espace vectoriel localement convexe séparé sur E en considérant pour toute partie finie B de F

$$p_B : \quad \begin{aligned} E &\longrightarrow \mathbb{R}^+ \\ x &\longmapsto \sup_{f\in B} |\langle f, x\rangle|\,. \end{aligned} \tag{A.11}$$

De même si

$$(\forall x \in E\,, \quad \langle f, x\rangle = 0) \quad \Longrightarrow \quad f = 0\,, \tag{A.12}$$

alors on peut définir une topologie d'espace vectoriel localement convexe séparé sur F en considérant pour toute partie finie A de E,

$$q_A : \quad \begin{aligned} F &\longrightarrow \mathbb{R}^+ \\ f &\longmapsto \sup_{x\in A} |\langle f, x\rangle|\,. \end{aligned} \tag{A.13}$$

Soit E un espace vectoriel topologique localement convexe séparé. On considère l'ensemble E^* des formes linéaires continues sur E, et la forme bilinéaire

$$\begin{aligned} E \times E^* &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (x, f) &\longmapsto \langle f, x\rangle := f(x)\,. \end{aligned}$$

Grâce au théorème de Hahn-Banach (géométrique), la relation (A.10) est vérifiée. En effet pour tout $x \neq 0$ dans E, il existe $f \in E^*$ et $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que

$$\langle f, x\rangle < \alpha < 0\,.$$

On peut donc comme ci-dessus définir une nouvelle topologie sur E, que l'on note $\sigma(E, E^*)$.

De même si $f \neq 0$ appartient à E^* alors il existe $x \in E$ tel que $\langle f, x\rangle \neq 0$ donc (A.12) est vérifiée. On peut donc définir une nouvelle topologie sur E^*, que l'on note $\sigma(E^*, E)$ – cette dernière ne nécessitant pas Hahn-Banach pour être construite.

Théorème A.3.1. *Soit E un espace vectoriel topologique localement convexe, que l'on suppose séparé, défini par ses ouverts $\mathcal{T}(E)$. La topologie $\sigma(E, E^*)$ est moins fine que $\mathcal{T}(E)$.*

Démonstration. D'après le théorème A.2.10 la topologie $\mathcal{T}(E)$ est définie par une famille de semi-normes que l'on note $\mathcal{P} = (p_\alpha)_{\alpha\in\mathcal{A}}$.

Soit A ouvert pour $\sigma(E, E^*)$, montrons qu'il est ouvert pour $\mathcal{T}(E)$. Soit $x_0 \in A$, il existe B partie finie de E^* et $r > 0$ tels que avec la notation (A.11),

$$p_B(x - x_0) < r \Longrightarrow x \in A\,.$$

Chaque élément f de B est continu de $(E, \mathcal{P})$ dans $(\mathbb{R}, |\cdot|)$ et comme B est finie, ses éléments forment une famille uniformément continue. Il existe donc une constante $C > 0$ et un sous-ensemble fini $\mathcal{A}' \subset \mathcal{A}$ tel que

$$\forall x \in E\,, \forall f \in B\,, \quad |\langle f, x - x_0\rangle| \leq C \sum_{\alpha\in\mathcal{A}'} p_\alpha(x - x_0)\,.$$

Alors la boule ouverte $B_{\mathcal{A}'}(x_0, r/2C|\mathcal{A}'|)$ est incluse dans A, donc A est ouvert pour la topologie initiale. Le théorème est démontré. $\square$

A.3.2. Topologies faibles et espaces de Banach. Soit E un espace vectoriel normé, on rappelle que E^* est un espace vectoriel normé muni de la norme duale

$$\|f\|_{E^*} := \sup_{x\neq 0} \frac{|f(x)|}{\|x\|_E} \, .$$

Définition A.3.2. *Soit E un espace de Banach.*

- *La topologie associée à $\|\cdot\|_E$ est dite topologie forte sur E*
- *La topologie $\sigma(E, E^*)$ est dite topologie faible sur E.*
- *La topologie $\sigma(E^*, E)$ est dite topologie faible $*$ sur E.*

Remarque. On rappelle que $E \subset E^{**}$ (et on verra plus bas des exemples où l'inclusion est stricte) donc $\sigma(E^*, E)$ est moins fine que $\sigma(E^*, E^{**})$ (et donc la topologie faible $*$ sur E est moins fine que la topologie faible sur E^*).

Proposition A.3.3. *Soit E un espace de Banach.*

a) Si (x_n) converge fortement vers x dans E (on écrit $x_n \to x$) alors (x_n) converge faiblement vers x dans E (on écrit $x_n \rightharpoonup x$).

b) Si (x_n) converge faiblement vers x dans E alors (x_n) est bornée dans E et

$$\|x\|_E \leq \liminf_{n\to\infty} \|x_n\|_E \, . \tag{A.14}$$

c) Si (x_n) converge faiblement vers x dans E et (f_n) converge fortement vers f dans E^* alors

$$\langle f_n, x_n\rangle \to \langle f, x\rangle \, .$$

Démonstration. a) résulte de la comparaison entre topologie forte et faible précédente, ou encore de la continuité de $f \in E^*$: on a en effet

$$|\langle f, x_n - x\rangle| \leq \|f\|_{E^*}\|x_n - x\|_E \, .$$

b) provient du Corollaire A.1.14 du Théorème de Banach-Steinhaus A.1.12. Plus précisément on associe à x_n l'application linéaire

$$T_n : \begin{array}{rcl} E^* & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ f & \longmapsto & \langle f, x_n\rangle \, , \end{array}$$

et on sait que la suite réelle $(T_n f)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée pour toute $f \in E^*$. Le théorème de Banach-Steinhaus assure donc qu'il existe une constante $C > 0$ telle que pour toute $f \in E^*$.

$$|T_n f| \leq C\|f\|_{E^*} \, .$$

En rappelant le Corollaire A.2.5, on a donc

$$\|x_n\|_E = \sup_{\|f\|_{E^*}\leq 1} |T_n f| \leq C \, .$$

Pour démontrer l'inégalité (A.14) on écrit

$$|\langle f, x_n\rangle| \leq \|f\|_{E^*}\|x_n\|_E$$

donc

$$|\langle f, x\rangle| \leq \|f\|_{E^*} \liminf_{n\to\infty} \|x_n\|_E$$

et finalement

$$\|x\|_E = \sup_{\|f\|_{E^*}\leq 1} |\langle f, x\rangle| \leq \liminf_{n\to\infty} \|x_n\|_E \, .$$

c) découle de l'inégalité triangulaire et des résultats précédents, puisque

$$|\langle f_n, x_n\rangle - \langle f, x\rangle| \leq \ |\langle f_n - f, x_n\rangle + \langle f, x_n - x\rangle| \leq \|f_n - f\|_{E^*}\|x_n\|_E + \ |\langle f, x_n - x\rangle| \, .$$

La proposition est démontrée. □

Proposition A.3.4. *Soit E est un espace de Banach de dimension finie. Alors la topologie $\sigma(E, E^*)$ coïncide avec $\mathcal{T}(E)$. En particulier $x_n \rightharpoonup x$ si et seulement si $x_n \to x$.*

Démonstration. Il suffit de vérifier que tout ouvert pour la topologie forte est ouvert pour la topologie faible. Soit $x_0 \in E$ et U un voisinage de x_0 pour la topologie forte. Alors U contient la boule $B_E(x_0, r)$ pour un certain $r > 0$. Soit $(e_1, \ldots, e_n)$ une base de E et $(f_1, \ldots, f_n)$ sa base duale (c'est-à-dire vérifiant que $\langle f_i, e_j\rangle = \delta_{i,j} := 1$ si $i = j$, et 0 sinon). Puisqu'en dimension finie toutes les normes sont équivalentes, il existe une constante $C > 0$ telle que

$$\forall x \in E \, , \quad \|x\|_E \leq C \max_{1\leq i\leq n} |\langle f_i, x\rangle| \, .$$

Alors l'ouvert

$$V := \Big\{ x \in E \, / \, |\langle f_i, x - x_0\rangle| < \frac{r}{C} \, , \ \forall i \in [1, n] \Big\}$$

est inclus dans $B_E(x_0, r)$ et le résultat suit. □

Exercice. Soit E un espace de Banach de dimension infinie et soit

$$S := \Big\{ x \in E \, / \, \|x\|_E = 1 \Big\} \, .$$

Alors la fermeture de S pour la topologie faible est

$$B := \Big\{ x \in E \, / \, \|x\|_E \leq 1 \Big\} \, .$$

Il existe donc toujours des fermés pour la topologie forte qui ne sont pas fermés pour la topologie faible, et ces deux topologies sont donc bien distinctes.

Théorème A.3.5. *Soit E un espace vectoriel topologique localement convexe, que l'on suppose séparé. Si C est un convexe fermé de E pour $\mathcal{T}(E)$, alors il est aussi fermé pour $\sigma(E, E^*)$, et réciproquement.*

Démonstration. Montrons le seul sens non évident (d'après le théorème A.3.1) : soit C un convexe fermé de E pour $\mathcal{T}(E)$, montrons que le complémentaire de C dans E est ouvert pour $\sigma(E, E^*)$. Soit $x_0 \notin C$. Par le théorème de Hahn-Banach il existe un hyperplan qui sépare strictement $\{x_0\}$ et C. Donc il existe $f \in E^*$ et $\alpha \in \mathbb{R}$ tels que

$$\langle f, x_0\rangle < \alpha < \langle f, y\rangle$$

pour tout $y \in C$. Soit

$$V := \Big\{ x \in E \, / \, \langle f, x\rangle < \alpha \Big\} \, .$$

Alors $x_0 \in V$, V est inclus dans le complémentaire de C et V est ouvert pour $\sigma(E, E^*)$, ce qui démontre le théorème. □

Corollaire A.3.6 (Lemme de Mazur, 1905-1981)**.** *Soit E un espace de Banach. Si (x_n) converge faiblement vers x dans E, alors pour tout n il existe y_n, combinaison convexe des x_n, tel que la suite (y_n) converge fortement vers x.*

Démonstration. Soit $C := \mathrm{co}(\bigcup_{n\geq 1} \{x_n\})$ l'enveloppe convexe des (x_n). Comme x appartient à la fermeture faible des (x_n), il appartient a fortiori à la fermeture faible de C. Mais alors par le théorème A.3.5, x appartient à sa fermeture forte. □

Proposition A.3.7. *Soient E et F deux espaces de Banach et T une application linéaire de E dans F. L'application T est continue de $(E, \|\cdot\|_E)$ dans $(F, \|\cdot\|_F)$ si et seulement si elle est continue de $(E, \sigma(E, E^*))$ dans $(F, \sigma(F, F^*))$.*

Démonstration. $\Longrightarrow$ Soit $T : E \to F$ linéaire continue pour la topologie forte. Soit V un ouvert de la topologie $\sigma(F, F^*)$, montrons que $T^{-1}(V)$ est ouvert dans E pour la topologie $\sigma(E, E^*)$. Soit donc $x_0 \in T^{-1}(V)$, comme $Tx_0 \in V$, il existe I fini, des formes linéaires $(f_i)_{i\in I}$ sur F et des réels $(r_i)_{i\in I}$ tels que V contient les ensembles

$$\Big\{y \in F \,/\, |\langle f_i, y - Tx_0\rangle| < r_i \,,\ \forall i \in I\Big\}\,.$$

On remarque alors que l'ensemble

$$U := \Big\{x \in E \,/\, |\langle f_i, T(x - x_0)\rangle| < r_i \,,\ \forall i \in I\Big\}$$

vérifie $U \subset T^{-1}(V)$. Comme T est continue pour la topologie forte, on a que $f_i \circ T$ est une forme linéaire continue sur E est donc U est un voisinage ouvert de x_0 pour $\sigma(E, E^*)$.

$\Longleftarrow$ Par le théorème du graphe fermé il suffit de montrer que le graphe de T est fermé pour la topologie forte. Soit donc une suite (x_n) telle que $(x_n, T(x_n)) \to (x, y) \in E \times F$ et montrons que $y = Tx$. On a $x_n \to x$ donc $x_n \rightharpoonup x$, et $Tx_n \to y$ donc $Tx_n \rightharpoonup y$. On a donc en particulier $Tx_n \rightharpoonup Tx$, et la topologie faible étant séparée il y a unicité de la limite donc $y = Tx$. □

On admet le théorème suivant de Tychonov (qui repose sur le lemme de Zorn) : le produit cartésien d'une famille quelconque d'ensembles compacts est compact pour la topologie produit (i.e. la topologie qui rend continues toutes les projections sur l'une des composantes du produit). Plus précisément on a le théorème suivant.

Théorème A.3.8 (Tychonov, 1930)**.** *Soit $(X_\alpha)_{\alpha\in\mathcal{A}}$ une famille d'espaces topologiques et soit*

$$X := \prod_{\alpha\in\mathcal{A}} X_\alpha := \Big\{(x_\alpha)_{\alpha\in\mathcal{A}} \,/\, \forall\alpha \in \mathcal{A}\,,\ x_\alpha \in X_\alpha\Big\}\,.$$

On munit X de la topologie la moins fine rendant continues toutes les projections canoniques

$$P_\beta : \begin{array}{rcl} X & \longrightarrow & X_\beta \\ (x_\alpha) & \longmapsto & x_\beta\,. \end{array}$$

Si pour tout $\alpha \in \mathcal{A}$, X_α est compact, alors X l'est aussi.

Théorème A.3.9 (Banach-Alaoglu, 1938)**.** *Soit E un espace de Banach. La boule unité fermée de E^**

$$B_{E^*} := \Big\{f \in E^* \,/\, |f(x)| \le \|x\|_E \quad \forall x \in E\Big\}$$

est compacte pour la topologie faible $*$.

Démonstration. Avec les notations du théorème de Tychonov, on pose $\mathcal{A} = E$ et $X_\alpha = \mathbb{R}$ pour tout $\alpha \in \mathcal{A}$. On a alors $X = \prod_{x\in E} \mathbb{R} = \mathbb{R}^E$, que l'on identifie à l'ensemble des fonctions de E dans $\mathbb{R}$ via l'application (bijective)

$$\Phi : \begin{array}{rcl} \mathcal{F}(E, \mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathbb{R}^E \\ f & \longmapsto & \{f(x)\}_{x\in E}\,. \end{array}$$

Les éléments de $\mathbb{R}^E$ sont notés $\omega = (\omega_x)_{x\in E}$. Les projections canoniques sont donc, pour tout $y \in E$,

$$P_y : \begin{array}{l} \mathbb{R}^E \longrightarrow \mathbb{R} \\ \quad \omega \longmapsto \omega_y \,. \end{array}$$

Soit Ψ la bijection réciproque de Φ, restreinte à $\Phi(E^*)$:

$$\Psi : \begin{array}{rl} \Phi(E^*) \subset \mathbb{R}^E & \longrightarrow \mathcal{F}(E,\mathbb{R}) \\ \omega & \longmapsto f \quad t.q. \quad f(y) = \omega_y \ \ \forall y \in E \,. \end{array}$$

Montrons tout d'abord que Ψ est continue de $\Phi(E^*)$ (muni de la topologie produit de $\mathbb{R}^E$) dans E^* (muni de la topologie faible $*$) : il suffit de vérifier que pour tout $y \in E$, l'application

$$\Lambda_y : \begin{array}{rl} \Phi(E^*) & \longrightarrow \mathbb{R} \\ \omega & \longmapsto \Psi(\omega)(y) \end{array}$$

est continue. On a $\Lambda_y(\Phi(f)) = f(y) = P_y(\Phi(f))$ pour tout $f \in E^*$ donc

$$\Lambda_y = P_{y|\Phi(E^*)}$$

et le résultat suit du fait que P_y est continue.

Pour démontrer le théorème, il suffit alors de montrer que la boule unité fermée de E^* est l'image par Ψ d'un compact de $\mathbb{R}^E$. Soit

$$K := \Big\{\omega \in \mathbb{R}^E \,/\, \forall x \in E \,, |\omega_x| \le \|x\|_E\Big\} \,.$$

Alors

$$K = \prod_{x\in E} \Big[- \|x\|_E, \|x\|_E\Big]$$

donc K est compact par le théorème de Tychonov. Soit enfin

$$F := \Big\{\omega \in \mathbb{R}^E \,/\, \forall (x,y) \in E\times E \,, \forall (\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2 \,, \omega_{\lambda x+\mu y} = \lambda\omega_x + \mu\omega_y\Big\} \,.$$

Pour $(x,y) \in E\times E$ et $(\lambda,\mu) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R}$ donnés, l'application

$$\Lambda_{x,y}^{\lambda,\mu} : \begin{array}{rl} \mathbb{R}^E & \longrightarrow \mathbb{R} \\ \omega & \longmapsto \omega_{\lambda x+\mu y} - \lambda\omega_x - \mu\omega_y \end{array}$$

est continue. L'ensemble F est l'intersection de l'image réciproque de $\{0\}$ par des fonctions continues, donc $K \cap F$ est compact. Comme

$$B_{E^*} = \Psi(K\cap F)$$

on a le résultat cherché. Le théorème est démontré. $\square$

A.3.3. Espaces réflexifs. Pour tout espace de Banach E on note son bidual par E^{**}, muni de la norme

$$\|\xi\|_{E^{**}} := \sup_{\|f\|_{E^*}\le 1} |\langle \xi, f\rangle| \,.$$

Proposition A.3.10. *Soit E un espace de Banach et E^{**} son bidual. L'injection canonique de E dans E^{**} définie par*

$$j : \begin{array}{rl} E & \longrightarrow E^{**} \\ x & \longmapsto j(x) : \begin{array}{rl} E^* & \longrightarrow \mathbb{R} \\ f & \longmapsto \langle j(x), f\rangle := \langle f, x\rangle \end{array} \end{array}$$

est une isométrie. En particulier $j(B_E)$ est fermée dans $B_{E^{**}}$ pour la topologie forte de E^{**}.

Démonstration. Pour montrer que j est une isométrie, il suffit de remarquer que

$$\|j(x)\|_{E^{**}} = \sup_{\|f\|_{E^*} \leq 1} |\langle f, x\rangle| = \|x\|_E$$

grâce au corollaire A.2.5. Le fait que $j(B_E)$ soit fermée dans $B_{E^{**}}$ pour la topologie forte de E^{**} provient alors du fait que B_E est complet et que j est une isométrie. □

Définition A.3.11. *Soit E un espace de Banach. On dit que E est réflexif s'il est le dual de son dual, i.e. si j est surjective (donc bijective).*

Théorème A.3.12 (Kakutani, 1941)**.** *Soit E un espace de Banach. Alors E est réflexif si et seulement si sa boule unité fermée B_E est compacte pour $\sigma(E, E^*)$.*

Démonstration. $\Longrightarrow$ On sait que $B_{E^{**}}$ est compacte pour la topologie de $\sigma(E^{**}, E^*)$ grâce au théorème de Banach-Alaoglu A.3.9. Comme $j(B_E) = B_{E^{**}}$, il suffit de montrer que j^{-1} est continue de $(E^{**}, \sigma(E^{**}, E^*))$ dans $(E, \sigma(E, E^*))$. Si U est un ouvert pour $\sigma(E, E^*)$, montrons que $j(U)$ est un ouvert de E^{**} pour $\sigma(E^{**}, E^*)$. Soit $x_0 \in U$. Alors il existe $\varepsilon > 0$ et $f_1, \ldots, f_n \in E^*$ telles que

$$V := \Big\{x \in E \,/ \sup_{1\leq i\leq n} |\langle f_i, x - x_0\rangle| < \varepsilon\Big\} \subset U\,.$$

Alors

$$j(V) = \Big\{\xi \in E^{**} \,/\, \xi = j(x) \text{ et } \sup_{1\leq i\leq n} |\langle f_i, x - x_0\rangle| < \varepsilon\Big\}$$

et comme

$$\langle \xi, f_i\rangle = \langle f_i, x\rangle \quad \text{si} \quad \xi = j(x)$$

alors

$$j(V) = \Big\{\xi \in E^{**} \,/ \sup_{1\leq i\leq n} |\langle \xi - j(x_0), f_i\rangle| < \varepsilon\Big\}\,,$$

ce qui démontre le résultat.

$\Longleftarrow$ On utilise le lemme suivant, que l'on démontrera plus bas.

Lemme A.3.13 (Goldstine $\sim$ 1930)**.** *Soit E un espace de Banach, alors $j(B_E)$ est dense dans $B_{E^{**}}$ pour la topologie $\sigma(E^{**}, E^*)$ (et donc $j(E)$ est dense dans E^{**} pour cette même topologie).*

Retournons à la démonstration du théorème. Supposons donc que B_E est faiblement compacte, et montrons que $j(E) = E^{**}$. Comme j est une isométrie de E sur E^{**}, elle est continue de l'espace $(E, \sigma(E, E^*))$ dans l'espace $(E^{**}, \sigma(E^{**}, E^{***}))$ d'après la Proposition A.3.7, mais alors aussi dans $(E^{**}, \sigma(E^{**}, E^*))$ puisque cette dernière topologie est moins fine que $\sigma(E^{**}, E^{***})$. Comme B_E est faiblement compacte, alors $j(B_E)$ est compacte pour $\sigma(E^{**}, E^*)$. Par le lemme de Goldstine A.3.13 on a donc $j(B_E) = B_{E^{**}}$ puisqu'il est dense, et fermé dans E^{**}. On en déduit que $j(E) = E^{**}$ et le résultat est démontré. □

Démonstration du lemme de Goldstine A.3.13. Cette démonstration nécessite le lemme suivant, admis pour l'instant.

Lemme A.3.14 (Helly $\sim$ 1920)**.** *Soit E un espace de Banach, soient $f_1, \ldots, f_n$ dans E^* et $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ des réels. Les deux propriétés suivantes sont équivalentes :*

a) Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $x_\varepsilon \in B_E$ tel que pour tout $i \in [1, n]$,

$$|f_i(x_\varepsilon) - \alpha_i| < \varepsilon\,;$$

b) Pour tous $\beta_1, \ldots, \beta_n$ réels,

$$\Big|\sum_{i=1}^{n} \beta_i \alpha_i\Big| \leq \Big\|\sum_{i=1}^{n} \beta_i f_i\Big\|_{E^*}.$$

Retournons à la démonstration du lemme de Goldstine A.3.13. Soit $\xi \in B_{E^{**}}$ et V un voisinage de ξ pour la topologie $\sigma(E^{**}, E^*)$. Il s'agit de montrer que $V \cap j(B_E) \neq \emptyset$. On peut toujours supposer qu'il existe $\varepsilon > 0$ et $f_1, \ldots, f_n$ dans E^* tels que V contient

$$V' := \Big\{\eta \in E^{**} \,/\, |\langle \eta - \xi, f_i\rangle| < \varepsilon\,, \quad \forall i \in [1, n]\Big\}.$$

Donc on cherche $x \in B_E$ tel que $j(x) \in V'$ donc (en rappelant que $\langle j(x), f_i\rangle = \langle f_i, x\rangle$) tel que

$$|\langle f_i, x\rangle - \langle \xi, f_i\rangle| < \varepsilon\,, \quad \forall i \in [1, n]\,.$$

On pose $\alpha_i := \langle \xi, f_i\rangle$, alors par le lemme de Helly A.3.14 il suffit de montrer que

$$\forall \beta_1\,, \ldots, \beta_n\,, \quad \Big|\sum_i \beta_i \alpha_i\Big| \leq \Big\|\sum_i \beta_i f_i\Big\|_{E^*}$$

ce qui est évident puisque

$$\sum_i \beta_i \alpha_i = \langle \xi, \sum_i \beta_i f_i\rangle$$

et $\|\xi\|_{E^{**}} \leq 1$. Le lemme A.3.13 est donc démontré. $\square$

Démonstration du lemme de Helly A.3.14. $\Longrightarrow$ Soit $\varepsilon > 0$ fixé. Alors

$$\Big|\sum_i^n \beta_i \alpha_i\Big| \leq \Big|\sum_i^n \beta_i(\alpha_i - f_i(x_\varepsilon))\Big| + \Big|\sum_i^n \beta_i f_i(x_\varepsilon)\Big|$$

donc

$$\begin{aligned}\Big|\sum_i^n \beta_i \alpha_i\Big| &\leq \varepsilon \sum_i^n |\beta_i| + \Big|\sum_i^n \beta_i f_i(x_\varepsilon)\Big| \\ &\leq \varepsilon \sum_i^n |\beta_i| + \Big\|\sum_i^n \beta_i f_i\Big\|_{E^*} \|x_\varepsilon\|_E\end{aligned}$$

et on conclut en faisant tendre ε vers zéro (en utilisant $\|x_\varepsilon\|_E \leq 1$).

$\Longleftarrow$ On pose $\alpha := (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ et l'on considère

$$\varphi : \begin{array}{l} E \longrightarrow \mathbb{R}^n \\ x \longmapsto \Big(\langle f_1, x\rangle, \ldots, \langle f_n, x\rangle\Big)\,. \end{array}$$

L'assertion *a)* signifie que $\alpha \in \overline{\varphi(B_E)}$, donc par contraposition supposons que $\alpha \notin \overline{\varphi(B_E)}$. Comme $\overline{\varphi(B_E)}$ est un convexe fermé de $\mathbb{R}^n$, on déduit du théorème de Hahn-Banach (forme géométrique) qu'il existe $\beta = (\beta_1, \ldots, \beta_n) \in \mathbb{R}^n$ et $\gamma \in \mathbb{R}$ tels que

$$\beta \cdot \varphi(x) < \gamma < \beta \cdot \alpha\,, \quad \forall x \in B_E\,.$$

Mais

$$\|\sum_i^n \beta_i f_i\|_{E^*} = \sup_{\|x\|_E \leq 1} \sum_i^n \beta_i \langle f_i, x\rangle = \sup_{\|x\|_E \leq 1} \beta \cdot \varphi(x)$$

donc

$$\|\sum_i^n \beta_i f_i\|_{E^*} \leq \gamma < \sum_i^n \beta_i \alpha_i\,,$$

contradiction. Le lemme est donc démontré. $\square$

Exercice. Les espaces c_0 des suites nulles à l'infini, ℓ^1 des suites sommables et ℓ^∞ des suites bornées ne sont pas réflexifs.

Proposition A.3.15. *Soit E un espace de Banach réflexif, et M un sous-espace fermé de E. Alors M (muni de la norme induite de E) est réflexif.*

Démonstration. D'après le théorème de Kakutani A.3.12 il s'agit de vérifier que la boule unité fermée B_M est compacte pour la topologie $\sigma(M, M^*)$, dont on vérifie sans peine qu'elle est la trace sur M de la topologie $\sigma(E, E^*)$. Mais B_E est compacte pour la topologie $\sigma(E, E^*)$ et M est fermée pour la topologie $\sigma(E, E^*)$ par le théorème A.3.5, donc B_M est compacte pour la topologie $\sigma(E, E^*)$ et donc pour la topologie $\sigma(M, M^*)$. La proposition est démontrée. □

Proposition A.3.16. *Soit E un espace de Banach, on a*

$$E \quad \textit{réflexif} \quad \Longleftrightarrow \quad E^* \quad \textit{réflexif}.$$

Démonstration. $\Longrightarrow$ On sait par le théorème de Banach-Alaoglu A.3.9 que B_{E^*} est compacte pour la topologie $\sigma(E^*, E)$. Comme E est réflexif on a $\sigma(E^*, E) = \sigma(E^*, E^{**})$ donc B_{E^*} est compacte pour la topologie $\sigma(E^*, E^{**})$ et donc E^* est réflexif par le théorème de Kakutani A.3.12.

$\Longleftarrow$ Supposons que E^* est réflexif, alors par l'étape précédente on sait que E^{**} est réflexif, et donc $j(E)$ est réflexif comme sous-espace fermé de E^{**} d'après la Proposition A.3.15 et donc E est réflexif puisque j^{-1} est un isomorphisme isométrique entre $j(E)$ et E. □

A.3.4. Uniforme convexité.

Définition A.3.17. *Un espace vectoriel normé E est uniformément convexe si pour tout réel $\varepsilon > 0$ il existe un réel $\delta > 0$ tel que pour tous x, y dans B_E,*

$$\Big\| \frac{1}{2}(x+y) \Big\|_E \geq 1 - \delta \quad \Longrightarrow \quad \|x - y\|_E \leq \varepsilon\,.$$

Exemples. a) L'espace $\mathbb{R}^2$ muni de la norme $\|x\|_{\ell^2} := \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$ est uniformément convexe mais pas s'il est muni des normes $\|x\|_{\ell^1}$ et $\|x\|_{\ell^\infty}$.

b) On verra au paragraphe A.3.6 que L^p muni de sa norme naturelle est uniformément convexe si $1 < p < \infty$.

Théorème A.3.18 (Milman-Pettis 1938)**.** *Tout espace de Banach uniformément convexe est réflexif.*

Démonstration. Soit E un espace de Banach uniformément convexe, il s'agit de démontrer que $j(E) = E^{**}$, ou encore que $j(B_E) = B_{E^{**}}$. On rappelle (voir la Proposition A.3.10) que $j(B_E)$ est fermée dans $B_{E^{**}}$ pour la topologie forte, il suffit donc de montrer qu'elle est dense dans $B_{E^{**}}$ pour cette même topologie. Par homogénéité on peut se ramener à

$$S_{E^{**}} := \Big\{ \xi \in E^{**} \,/\, \|\xi\|_{E^{**}} = 1 \Big\}\,.$$

Soit donc $\xi \in S_{E^{**}}$ et soit $\varepsilon > 0$ auquel on associe le paramètre δ de la Définition A.3.17. Montrons qu'il existe $x \in B_E$ tel que

$$\|j(x) - \xi\|_{E^{**}} \leq \varepsilon\,. \tag{A.15}$$

Comme $\|\xi\|_{E^{**}} = 1$, il existe $f \in E^*$ tel que $\|f\|_{E^*} = 1$ et

$$\langle \xi, f \rangle \geq 1 - \frac{\delta}{2}\,\cdot \tag{A.16}$$

On sait par le lemme de Goldstine A.3.13 que $j(B_E)$ est dense dans $B_{E^{**}}$ pour la topologie $\sigma(E^{**}, E^*)$, donc il existe $x \in B_E$ tel que

$$\Big|\langle \xi, f\rangle - \langle f, x\rangle\Big| < \frac{\delta}{2}$$

(en écrivant $\Big|\langle j(x) - \xi, f\rangle\Big| < \delta/2$). Montrons par contradiction que $\|j(x) - \xi\|_{E^{**}} \leq \varepsilon$, ce qui démontrera le résultat (A.15) souhaité.

Supposons que $\|j(x) - \xi\|_{E^{**}} > \varepsilon$, alors $\xi \in W := {}^c\big(j(x) + \varepsilon B_{E^{**}}\big)$ et W est un voisinage de ξ pour la topologie $\sigma(E^{**}, E^*)$ (puisque $B_{E^{**}}$ est fermé pour cette topologie). Par le lemme de Goldstine A.3.13 à nouveau, il existe $y \in B_E$ tel que $j(y) \in W$ et

$$\Big|\langle \xi, f\rangle - \langle f, y\rangle\Big| < \frac{\delta}{2}\,.$$

Notons que par construction puisque $j(y) \in W$ on a

$$\|j(x-y)\|_{E^{**}} > \varepsilon\,. \tag{A.17}$$

Par l'inégalité triangulaire on conclut que

$$2\langle \xi, f\rangle < \langle f, x+y\rangle + \delta \leq \|x+y\|_E + \delta\,.$$

Mais alors par (A.16) il vient

$$\frac{1}{2}\|x+y\|_E > 1 - \delta$$

et donc $\|x-y\|_E \leq \varepsilon$ par uniforme convexité, ce qui contredit (A.17). D'où le résultat. □

Remarque. Les espaces vectoriels de dimension finie sont réflexifs.

Proposition A.3.19. *Soit E un espace de Banach uniformément convexe et soit (x_n) une suite de E convergeant faiblement pour $\sigma(E, E^*)$ vers x. Si*

$$\limsup_{n\to\infty} \|x_n\|_E \leq \|x\|_E\,,$$

alors (x_n) converge fortement vers x.

Démonstration. On peut toujours supposer que $x \neq 0$, sinon le résultat est évident. Soit $\lambda_n := \max(\|x\|_E, \|x_n\|_E)$, soit $y_n := \lambda_n^{-1} x_n$ et $y = \|x\|_E^{-1} x$. Alors $\lambda_n \to \|x\|_E$ et $y_n \rightharpoonup y$ faiblement $\sigma(E, E^*)$. Par la Proposition A.3.3 on a puisque $\frac{1}{2}(y_n + y) \rightharpoonup y$,

$$\|y\|_E \leq \liminf_{n\to\infty} \frac{1}{2}\|y_n + y\|_E\,.$$

Mais $\|y\|_E = 1$ et $\|y_n\|_E \leq 1$ donc on déduit que nécessairement

$$\frac{1}{2}\|y_n + y\|_E \to 1\,.$$

Par uniforme convexité on a donc

$$\|y_n - y\|_E \to 0\,,$$

d'où la proposition. □

A.3.5. Espaces séparables.

Définition A.3.20. *On dit qu'un espace métrique X est séparable s'il existe un sous-ensemble dénombrable dense dans X.*

Proposition A.3.21. *Soit E un espace de Banach. Si E^* est séparable alors E est séparable.*

Démonstration. Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite dense dans E^* et soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de E telle que

$$\|x_n\|_E = 1 \quad \text{et} \quad \langle f_n, x_n\rangle \geq \frac{1}{2}\|f_n\|_{E^*} .$$

Soit F l'ensemble des combinaisons linéaires finies à coefficients rationnels des x_n. Alors F est dénombrable, montrons qu'il est dense dans E. Par le corollaire A.2.14 du théorème de Hahn-Banach il suffit de montrer que toute forme linéaire $f \in E^*$ qui s'annule sur F est identiquement nulle. Soit donc f une telle forme linéaire, et soit $\varepsilon > 0$. Il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que

$$\|f - f_n\|_{E^*} \leq \varepsilon .$$

On écrit alors, puisque f s'annule sur F,

$$\frac{1}{2}\|f_n\|_{E^*} \leq \langle f_n, x_n\rangle = \langle f_n - f, x_n\rangle \leq \varepsilon ,$$

et donc

$$\|f\|_{E^*} \leq \|f - f_n\|_{E^*} + \|f_n\|_{E^*} \leq 3\varepsilon$$

et donc f est identiquement nulle. La proposition est démontrée. □

Corollaire A.3.22. *Soit E un espace de Banach. On a*

$$E \quad \textit{réflexif et séparable} \quad \Longleftrightarrow \quad E^* \quad \textit{réflexif et séparable} .$$

Démonstration. $\Longleftarrow$ provient des Propositions A.3.16 et A.3.21.

$\Longrightarrow$ est dû au fait que si E est réflexif et séparable alors $E^{**} = j(E)$ l'est aussi, et donc E^* aussi. □

Exercice. Soit E un espace de Banach de dimension infinie, alors E n'est jamais métrisable pour la topologie $\sigma(E, E^*)$, et E^* n'est jamais métrisable pour la topologie $\sigma(E^*, E)$.

Théorème A.3.23. *Soit E un espace de Banach. Alors E est séparable si et seulement si B_{E^*} est métrisable pour la topologie $\sigma(E^*, E)$.*

Démonstration. $\Longrightarrow$ Soit $(x_n)_{n\geq 1}$ un sous-ensemble dénombrable dense dans B_E, on définit la métrique suivante sur B_{E^*} :

$$\forall (f, g) \in B_{E^*} \times B_{E^*} , \quad d(f, g) := \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} |\langle f - g, x_n\rangle| .$$

Montrons que la topologie associée à d coïncide avec $\sigma(E^*, E)$ sur B_{E^*}.

- soit $f \in B_{E^*}$, soit $r > 0$ et soit

$$V := \Big\{ g \in B_{E^*} \,/\, |\langle f - g, y_i\rangle| < r \,,\ \forall i \in \{1, \dots, p\} \Big\}$$

un voisinage de f pour $\sigma(E^*, E)$, avec (sans perte de généralité) $y_i \in B_E$ pour tout i dans $\{1, \dots, p\}$. Montrons qu'il existe $r' > 0$ tel que

$$U := \Big\{ g \in B_{E^*} \,/\, d(f, g) < r' \Big\} \subset V .$$

Pour tout $i \in \{1, \ldots, p\}$ on peut trouver n_i tel que
$$\|x_{n_i} - y_i\|_E \leq \frac{r}{4} \cdot$$
Alors en choisissant r' tel que pour tout $i \in \{1, \ldots, p\}$ on ait $2^{n_i} r' < \dfrac{r}{2}$ on a pour tout $g \in U$
$$|\langle f - g, y_i \rangle| \leq |\langle f - g, y_i - x_{n_i} \rangle| + |\langle f - g, x_{n_i} \rangle| < 2 \cdot \frac{r}{4} + 2^{n_i} r' < r$$
donc $g \in V$.

- soit $f \in B_{E^*}$, soit $r > 0$ et soit
$$U' := \Big\{ g \in B_{E^*} \, / \, d(f, g) < r \Big\} .$$
Montrons qu'il existe $r' > 0$ et p tels que
$$V' := \Big\{ g \in B_{E^*} \, / \, |\langle f - g, x_n \rangle| < r' \, , \ \forall n \in \{1, \ldots, p\} \Big\} \subset U' .$$
On choisit $r' < \dfrac{r}{2}$ et p assez grand pour que $2^{1-p} < \dfrac{r}{2}$, et on a alors pour tout $g \in V'$
$$\begin{aligned} d(f, g) &= \sum_{n=1}^{p} 2^{-n} |\langle f - g, x_n \rangle| + \sum_{n \geq p+1} 2^{-n} |\langle f - g, x_n \rangle| \\ &\leq r' + 2 \sum_{n \geq p+1} 2^{-n} < r \, , \end{aligned}$$
donc $f \in U'$.

$\Longleftarrow$ Supposons que B_{E^*} est métrisable pour $\sigma(E^*, E)$ (avec une distance d) et montrons que E est séparable. On définit pour tout entier $n \geq 1$
$$U_n := \Big\{ f \in B_{E^*} \, / \, d(f, 0) < \frac{1}{n} \Big\}$$
et l'on considère un voisinage V_n de 0 pour $\sigma(E^*, E)$, inclus dans U_n, que l'on écrit sous la forme
$$V_n := \Big\{ f \in B_{E^*} \, / \, |\langle f, x \rangle| < r_n \, , \ x \in A_n \Big\}$$
où $r_n \to 0$ et A_n est un sous-ensemble fini de E. L'ensemble $A := \bigcup_{n \geq 1} A_n$ est dénombrable. Montrons que l'espace vectoriel $\mathcal{A}$ engendré par A est dense dans E. Il suffit de remarquer que $\displaystyle\bigcap_{n \geq 1} V_n = \{0\}$ donc
$$(\langle f, x \rangle = 0 \quad \forall x \in \mathcal{A}) \Longrightarrow f = 0$$
et donc par le corollaire A.2.14, $\mathcal{A}$ est dense dans E. D'où le résultat. □

Remarque. Un argument analogue permet de démontrer que si E^* est séparable alors B_E est métrisable. La réciproque est vraie mais est plus délicate à démontrer (voir [**2**]).

Montrons enfin les deux corollaires suivants sur les suites bornées de E^* et E.

Corollaire A.3.24. *Soit E un espace de Banach séparable et soit $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite bornée de E^*. Alors il existe une sous-suite extraite de (f_n) qui converge pour la topologie $\sigma(E^*, E)$.*

Démonstration. Sans perte de généralité on peut supposer que $f_n \in B_{E^*}$, et le résultat est un corollaire immédiat des théorèmes A.3.9 (Banach-Alaoglu) et A.3.23 (métrisabilité de B_{E^*}). □

Corollaire A.3.25. *Soit E un espace de Banach réflexif et soit $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite bornée de E. Alors il existe une sous-suite extraite de (x_n) qui converge pour la topologie $\sigma(E, E^*)$.*

Démonstration. Soit X l'espace vectoriel engendré par les x_n. Alors $F := \overline{X}$ est séparable, et réflexif comme sous-espace fermé d'un espace réflexif (Proposition A.3.15). Par le Corollaire A.3.22, F^* est séparable, donc la boule unité fermée $B_{F^{**}}$ de F^{**} est métrisable pour $\sigma(F^{**}, F^*)$ grâce au théorème A.3.23. Par ailleurs grâce au Théorème A.3.9 de Banach-Alaoglu on sait que $B_{F^{**}}$ est compacte pour $\sigma(F^{**}, F^*)$. Donc $B_{F^{**}}$ est compacte métrisable pour $\sigma(F^{**}, F^*)$, et donc B_F, qui coïncide avec $B_{F^{**}}$ puisque F est réflexif, est compacte métrisable pour $\sigma(F, F^*)$. Le résultat est démontré. □

A.3.6. Application aux espaces de Lebesgue.

Rappels. Pour tout ouvert Ω de $\mathbb{R}^d$, l'espace $L^p(\Omega)$, pour $1 \leq p < \infty$, est l'ensemble des fonctions f telles que $|f|^p$ est intégrable sur Ω, quotienté par la relation d'équivalence d'égalité presque partout, et muni de la norme

$$\|f\|_{L^p(\Omega)} := \Big(\int_\Omega |f|^p(x)\, dx\Big)^{\frac{1}{p}} . \tag{A.18}$$

On définit de même

$$\|f\|_{L^\infty(\Omega)} := \mathrm{supess}_\Omega\, |f| .$$

Si $1 \leq p \leq \infty$, l'espace $L^p(\Omega)$ est complet.
Si $1 \leq p < \infty$, l'espace $\mathcal{D}(\Omega)$ des fonctions C^∞ à support compact sur Ω (a fortiori $C_c(\Omega)$) est dense dans $L^p(\Omega)$.

Théorème A.3.26. *Si $1 \leq p < \infty$, l'espace $L^p(\Omega)$ est séparable.*

Démonstration. Le résultat se démontre en pavant Ω par des ensembles $\prod_1^n]a_k, b_k[$ de côtés rationnels et en considérant les fonctions caractéristiques de ces domaines. Les détails sont laissés en exercice. □

Théorème A.3.27. *Si $1 < p < \infty$, l'espace $L^p(\Omega)$ est uniformément convexe, donc réflexif.*

Démonstration. Soit la fonction h définie sur $\mathbb{R}^+$ par

$$h(r) := (1 + r^{\frac{1}{p}})^p + |1 - r^{\frac{1}{p}}|^p .$$

Alors

$$h'(r) = (1 + r^{-\frac{1}{p}})^{p-1} + |1 - r^{-\frac{1}{p}}|^{p-2}(1 - r^{-\frac{1}{p}})$$

et

$$h''(r) = \frac{p-1}{p} r^{-1-\frac{1}{p}} \Big(|1 - r^{-\frac{1}{p}}|^{p-2} - (1 + r^{-\frac{1}{p}})^{p-2} \Big)$$

donc h est convexe sur $\mathbb{R}^+$ si $p \leq 2$, concave si $p \geq 2$. Rappellons l'inégalité de Jensen : si H est concave alors

$$\frac{\displaystyle\int u^p H\Big((\frac{v}{u})^p\Big)\, dx}{\displaystyle\int u^p\, dx} \leq H\left(\frac{\displaystyle\int v^p\, dx}{\displaystyle\int u^p\, dx}\right) ,$$

et l'inégalité est inversée si H est convexe.

- Dans le cas $p \geq 2$ on a donc

$$\|u+v\|^p_{L^p(\Omega)} + \|u-v\|^p_{L^p(\Omega)} \leq \Big(\|u\|_{L^p(\Omega)} + \|v\|_{L^p(\Omega)}\Big)^p + \Big|\|u\|_{L^p(\Omega)} - \|v\|_{L^p(\Omega)}\Big|^p \tag{A.19}$$

donc si $\|u\|_{L^p(\Omega)} = \|v\|_{L^p(\Omega)} = 1$ et $\|u - v\|_{L^p(\Omega)} > 2\varepsilon$ il vient

$$\Big\|\frac{1}{2}(u+v)\Big\|_{L^p(\Omega)} \leq (1-\varepsilon^p)^{\frac{1}{p}}$$

et le résultat est démontré.

- Dans le cas $p \leq 2$ on a la même inégalité (A.19) inversée et on l'applique à $\tilde{u} = u + v$, $\tilde{v} = u - v$ et $\|\tilde{u}\|_{L^p(\Omega)} = \|\tilde{v}\|_{L^p(\Omega)} = 1$. Alors

$$\Big(\Big\|\frac{1}{2}(\tilde{u}+\tilde{v})\Big\|_{L^p(\Omega)} + \Big\|\frac{1}{2}(\tilde{u}-\tilde{v})\Big\|_{L^p(\Omega)}\Big)^p + \Big|\Big\|\frac{1}{2}(\tilde{u}+\tilde{v})\Big\|_{L^p(\Omega)} - \Big\|\frac{1}{2}(\tilde{u}-\tilde{v})\Big\|_{L^p(\Omega)}\Big|^p \leq 2$$

et le théorème est démontré. □

Théorème A.3.28 (Représentation de Riesz)**.** *Soit $1 < p < \infty$ et soit $\varphi \in (L^p(\Omega))^*$. Soit p' défini par*

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1\,.$$

Alors il existe $u \in L^{p'}(\Omega)$ unique tel que

$$\forall f \in L^p(\Omega)\,, \quad \langle \varphi, f\rangle = \int_\Omega uf(x)\,dx\,.$$

De plus on a

$$\|u\|_{L^{p'}(\Omega)} = \|\varphi\|_{(L^p(\Omega))^*}$$

Démonstration. Soit T l'opérateur défini par

$$T : \begin{array}{ccc} L^{p'}(\Omega) \longrightarrow (L^p(\Omega))^* & & \\ u \longmapsto & Tu : & \begin{array}{l} L^p(\Omega) \longrightarrow \mathbb{R} \\ f \longmapsto \langle Tu, f\rangle := \displaystyle\int_\Omega uf(x)\,dx\,. \end{array} \end{array}$$

Montrons que

$$\|Tu\|_{(L^p(\Omega))^*} = \|u\|_{L^{p'}(\Omega)}\,. \tag{A.20}$$

L'inégalité de Hölder implique que

$$\|Tu\|_{(L^p(\Omega))^*} \leq \|u\|_{L^{p'}(\Omega)}\,.$$

Pour montrer l'inégalité inverse posons

$$v(x) := |u(x)|^{p'-2}u(x)\,, \quad v(x) := 0 \text{ si } u(x) = 0\,.$$

Alors $v \in L^p(\Omega)$ et

$$\|v\|_{L^p(\Omega)} = \|u\|^{p'-1}_{L^{p'}(\Omega)}\,.$$

Par ailleurs

$$\langle Tu, v\rangle = \|u\|^{p'}_{L^{p'}(\Omega)}$$

donc

$$\|Tu\|_{(L^p(\Omega))^*} \geq \frac{\langle Tu, v\rangle}{\|v\|_{L^p(\Omega)}} = \|u\|_{L^{p'}(\Omega)}\,,$$

ce qui démontre (A.20).

Montrons maintenant que T est surjectif, ce qui achèvera la démonstration. L'espace $E := T(L^{p'}(\Omega))$ est un sous-espace fermé de $(L^p(\Omega))^*$ donc il s'agit de démontrer qu'il est dense dans $(L^p(\Omega))^*$. Soit donc $h \in (L^p(\Omega))$, tel que

$$\langle Tu, h\rangle = 0 \quad \forall u \in L^{p'}(\Omega)\,.$$

Alors en posant $u(x) := |h(x)|^{p-2}h(x)$ on en déduit que $h = 0$, d'où le résultat. □

Si $1 \leq p < \infty$ on a les identifications $(L^p)^* = L^{p'}$.

Exercice. Soit $\varphi \in (L^1(\Omega))^*$. Il existe $u \in L^\infty(\Omega)$ unique tel que

$$\forall f \in L^1(\Omega)\,, \quad \langle \varphi, f\rangle = \int_\Omega uf\,.$$

De plus on a

$$\|u\|_{L^\infty(\Omega)} = \|\varphi\|_{(L^1(\Omega))^*}$$

L'espace L^1 n'est pas réflexif (et L^∞ non plus). L'espace L^∞ n'est pas séparable.