Représentations de la série discrète holomorphe de $SL_2(\mathbb{R})$ et leurs restrictions

Guillaume Chapuy
Joseph Lehec

sous la direction de Micha Pevzner

Juin 2003

Table des matières

Introduction

On peut classifier les représentations irréductibles unitaires de $SL_2(\mathbb{R})$. Il n'en existe pas en dimension finie [1], et parmi celles de dimension infinie, une famille de telles représentations est donnée par la série discrète holomorphe $\mathcal{D}_n^+$.

L'objet de notre étude sera de définir cette série de représentations, puis d'en étudier la restriction à un sous-groupe de $SL_2(\mathbb{R})$. Un problème qui se pose en théorie des représentations est en particulier d'étudier le spectre (la décomposition en sous-espaces irréductibles) de la restriction d'une représentation irréductible.

Nous commencerons par développer les outils généraux nécessaires pour aborder le problème dans les parties 1 et 2. Puis en partie 3, nous décrirons explicitement la série discrète holomorphe comme une action de $SL_2(\mathbb{R})$ sur des espaces de Hilbert $\mathcal{H}_n^2(\mathbb{H}_+)$, dont nous développerons quelques propriétés dans le cadre de la théorie des noyaux reproduisants. Enfin, en partie 4, la présentation de la théorie des noyaux de Laurent Schwartz nous permettra de définir précisément la restriction des représentations considérées au sous-groupe voulu.

[1] Pour la classification des représentations de $SL_2(\mathbb{R})$, qui n'est pas l'objet de ce rapport, on pourra se référer à [4]

1 Groupes et algèbres de Lie

1.1 Variétés

Définition 1.1 *Une variété X de dimension n et de classe C^r est un espace topologique séparé tel que :*

(i) Pour tout ouvert U de X suffisamment petit, il existe un homéomorphisme ϕ de U sur un ouvert de $\mathbb{R}^n$; (U, ϕ) est appelé carte locale.

(ii) Le passage d'une carte à l'autre est de classe C^r, i.e. si (U, ξ) et (V, η) sont des cartes locales, on a :

$$\begin{array}{ccc} U \cap V & \xrightarrow{id} & U \cap V \\ \xi \downarrow & & \downarrow \eta \\ \xi(U \cap V) & \xrightarrow{\Phi} & \eta(U \cap V) \end{array}$$

où Φ rendant ce diagramme commutatif est de classe C^r.

Définition 1.2 *Soit (U, ξ) une carte locale telle que U soit un voisinage de a. Les fonctions de classe C^r à valeurs dans $\mathbb{R}$ au voisinage de a sont les $\phi \circ \xi$, où $\phi : \xi(U) \longrightarrow \mathbb{R}$ est de classe C^r. La condition (ii) nous assure que cette définition ne dépend pas du choix de l'homomorphisme ξ.*
On notera $\mathcal{F}_a$ l'ensemble des fonctions de classe C^r au voisinage de a.
On dira qu'une fonction est de classe C^r sur X si elle l'est au voisinage de chaque point de X et on notera $C^r(X)$ l'ensemble de ces fonctions.

Définition 1.3 *Soient X,Y deux variétés de classe C^r. L'application $f : X \longrightarrow Y$ est un morphisme de variétés de classe C^r si et seulement si elle transforme les fonctions de classe C^r sur X en les fonctions de classe C^r sur Y, i.e : si $\phi \in C^\infty(X)$ alors $\phi \circ f \in C^\infty(Y)$.*

Définition 1.4 *Soit X une variété C^∞ (pour simplifier), et a un point de X. Une dérivation en a est une application linéaire $\mathcal{D} : \mathcal{F}_a \longrightarrow \mathbb{R}$ vérifiant $\mathcal{D}(fg) = \mathcal{D}(f)g(a) + f(a)\mathcal{D}(g)$ pour toutes f et g dans $\mathcal{F}_a$.*

Proposition 1.5 *L'ensemble des dérivations en a sur une variété est un espace vectoriel de dimension égale à la dimension de la variété. On l'appellera espace tangent en a et on le notera $\mathcal{T}_a(X)$.*

Démonstration : Le fait que $\mathcal{T}_a$ soit un espace vectoriel est clair. Soit $\mathcal{D}$ une dérivation en a. On a : $\mathcal{D}(1 \times 1) = 2\mathcal{D}(1)$ ce qui montre que $\mathcal{D}(1) = 0$ puis, par linéarité, que $\mathcal{D}$ s'annule sur les constantes. Ensuite on choisit $(U, \xi = (\xi_1, \ldots, \xi_m))$ une carte locale, on pose $b = (b_1, \ldots, b_m) = \xi(a)$. On prend $f = \phi(\xi)$ un élément de $\mathcal{T}_a$, un rapide calcul montre que :

$$\mathcal{D}(f) = \frac{\partial \phi}{\partial x_1}(b)\mathcal{D}(\xi_1) + \ldots + \frac{\partial \phi}{\partial x_m}(b)\mathcal{D}(\xi_m)$$

et que donc $\mathcal{D}$ ne dépend que des valeurs des $\mathcal{D}(\xi_i)$.
Enfin on peut définir en posant $\mathcal{D}_i(\xi_j) = \delta_{ij}$ m dérivations linéairement indépendantes ce qui achève la preuve. □

Exemple : $\mathbb{R}^n$ est trivialement une variété C^∞ de dimension n. On montre que les dérivations en x sont toutes de la forme $f \longmapsto Df(x)(u)$ où u est un vecteur de $\mathbb{R}^n$. L'espace des dérivations s'identifie donc à $\mathbb{R}^n$.

Définition 1.6 *Un morphisme de variété $f : X \longrightarrow Y$ induit naturellement pour chaque $x \in X$ une application linéaire $f'(x) : \mathcal{T}_x(X) \longrightarrow \mathcal{T}_{f(x)}(Y)$ via $\mathcal{D} \in \mathcal{T}_x(X) \longmapsto \left(g \in \mathcal{F}_{f(x)}(Y) \longmapsto \mathcal{D}(\overbrace{g \circ f}^{\in \mathcal{F}_x(X)}) \right)$. Cette application est appelée application linéaire tangente à f en x.*

Exemple : (i) Si $f : \mathbb{R} \longmapsto X$, $f'(t)$ s'identifie à un élément de $\mathcal{T}_{f(t)}(X)$ car $f'(t)(u) = u \times f'(t)(1)$.
(ii) Si $f : X \longmapsto \mathbb{R}$, un calcul montre que pour $\phi \in C^\infty(\mathbb{R})$ et $\mathcal{D}$ une dérivation en x : $\mathcal{D}(\phi \circ f) = \phi'(f(x))\mathcal{D}(f)$, ce qui montre qu'on peut identifier $f'(x)(\mathcal{D})$ et $\mathcal{D}(f)$.

Proposition 1.7 *$X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z$ des morphismes de variétés (C^∞). On a pour $x \in X$, $(g \circ f)'(x) = g'(f(x)) \circ f'(x)$.*

1.2 Variétés produit et groupes de Lie

Définition 1.8 *Si X et Y sont deux variétés de classe C^r, on munit $X \times Y$ de la topologie produit (qui est bien séparée). Pour $U \times V$ assez petit $\xi \times \eta : U \times V \longrightarrow \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p$ est un homéomorphisme : on munit ainsi $X \times Y$ d'une structure de variété de dimension $n + p$.*

Définition 1.9 *Un groupe topologique G, est un groupe de Lie si c'est une variété et que l'application $(x, y) \longmapsto xy^{-1}$ de $G \times G$ dans G est un morphisme de variétés.*

1.2.1 Algèbres de Lie

Définition 1.10 *Une algèbre de Lie est un espace vectoriel V muni d'une application : $[.,.] : V \times V \longrightarrow V$ bilinéaire vérifiant :*
(i) $[X, Y] = -[Y, X]$
(ii) $[X, [Y, Z]] + [Y, [Z, X]] + [Z, [X, Y]] = 0$

Définition 1.11 (L'algèbre de Lie d'un groupe de Lie) *Si G est un groupe de Lie on pose $\mathfrak{g} = \mathcal{T}_1(G)$ où 1 est l'élément neutre de G. L'ensemble $\mathfrak{g}$ est un espace vectoriel qu'on peut munir d'une structure d'algèbre de Lie comme suit.*

Soient $f \in \mathcal{F}_1$ et $X, Y \in \mathfrak{g}$ (il est d'usage de noter les éléments de $\mathfrak{g}$ par des lettres majuscules). Pour $x \in G$ assez proche de 1 on considère $f_x = f \circ \tau_x : y \longmapsto f(xy)$ qui est encore dans $\mathcal{F}_1$ puis $x \longmapsto Y(f_x)$ qui est toujours dans $\mathcal{F}_1$ d'après la régularité de τ_x et on peut appliquer la dérivation X à cette dernière fonction ; appelons $XY(f)$ le résultat obtenu. En gros on considère $f(xy)$, on applique la dérivation Y à la deuxième variable puis la dérivation X à la première.

L'application : $f \longmapsto XY(f) - YX(f)$ est une dérivation qu'on notera $[X,Y]$ et qu'on appellera crochet de Lie de X et de Y. En effet la linéarité de cette application est claire. De plus :

$$\begin{aligned} XY(fg) &= X(Y(f_x)g(x) + f(x)Y(g_x)) \\ &= (XYf)g(1) + f(1)XY(g) + Y(f)X(g) + X(f)Y(g) \end{aligned}$$

Par suite $XY(fg) - YX(fg) = (XY(f) - YX(f))g(1) + f(1)(XY(g) - YX(g))$

ce qui montre que $[X,Y]$ est une dérivation.
Il est ensuite assez aisé de vérifier que $[.,.]$ vérifie (i) et (ii).
On peut aussi remarquer que si le groupe est commutatif $[.,.] = 0$ ce qui nous fait dire que de manière informelle le crochet de Lie mesure le degré de non-commutativité du groupe.

Proposition 1.12 *Soit $\phi : G \longrightarrow H$ un morphisme de groupes de Lie. $\phi'(1_G) : \mathfrak{g} \longrightarrow \mathcal{T}_{1_H}(H) = \mathfrak{H}$ est une application linéaire $\mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{H}$ qui conserve la structure d'algèbre de Lie.*

Démonstration : On prend X et Y dans $\mathfrak{g}$ et f dans $\mathcal{F}_{1_H}(H)$.

$$\begin{aligned} \phi'(1)([X,Y])(f) &= [X,Y](f \circ \phi) \\ \text{Et } XY(f(\phi(xy))) &= XY(f(\phi(x)\phi(y)) \quad (\phi \text{ morphisme de groupes}) \\ &= X(x \to Y(f_{\phi(x)} \circ \phi)) \\ &= X(x \to \phi'(1)(Y)(f_{\phi(x)})) \\ &= \phi'(1)(X)(x \to \phi'(1)Y(f_{(x)})) \\ \text{d'où} \quad \phi'(1)([X,Y])(f) &= [\phi'(1)(X), \phi'(1)(Y)](f) \end{aligned}$$

ce qu'il fallait démontrer □

1.2.2 Sous variétés et sous groupes de Lie

Définition 1.13 *Soit X une variété de dimension n, on dit que $Y \subset X$ est une sous variété localement fermée s'il existe $p \leq n$ tel que pour tout $b \in Y$ il existe (U, ξ) voisinage de b tel que $U \cap Y$ soit défini par les équations :*
$$\begin{cases} \xi_{p+1}(x) = \xi_{p+1}(b) \\ \vdots \\ \xi_n(x) = \xi_n(b) \end{cases}$$
Y est alors de dimension p.

On admettra le résultat suivant (théorème de Cartan Von Neumann) :

Proposition 1.14 *Si G est un groupe de Lie, tout sous groupe fermé H de G vérifie la condition précédente et en particulier est un groupe de Lie.*
De plus si H est distingué ${}^{G}/_{H}$ est alors muni d'une structure de groupe de Lie de dimension $n-p$.

Remarque : *Sans rentrer dans les détails, on voit que les fonctions de H sont celles qui ne dépendent que de $\xi_1, \ldots, \xi_p$ (en adoptant les notations de la précédente définition) et les fonctions de G/H celles qui ne dépendent que de $\xi_{p+1}, \ldots, \xi_n$ et en regardant la base des dérivations donnée dans la proposition I.5 on comprend qu'on ait :*

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{h}'$$

où $\mathfrak{g}$ est l'algèbre de Lie de G, $\mathfrak{h}$ celle de H et $\mathfrak{h}'$ celle de G/H.

1.2.3 Sous groupes à un paramètre

Définition 1.15 *On appelle sous groupe à un paramètre de G toute application $\gamma : \mathbb{R} \longrightarrow G$ de classe C^∞ vérifiant $\gamma(s+t) = \gamma(s)\gamma(t)$ pour tous s et t dans $\mathbb{R}$.*
En fait cela revient à dire γ est un morphisme de groupes de Lie (de $\mathbb{R}$ dans G).

Proposition 1.16 *$\gamma \longrightarrow \gamma'(0)$ définit une bijection entre les sous groupes à un paramètre de G et $\mathfrak{g}$.*
De plus si pour $X \in \mathfrak{g}$, on note γ_X le sous groupe associé, on a pour $f \in \mathcal{F}_1(G)$:

$$X(f) = \frac{d}{dt}(f(\gamma_X(t))_{t=0}$$

Démonstration : En dérivant par rapport à s en $s=0$ la relation $\gamma(s+t) = \gamma(s)\gamma(t)$ on trouve $\gamma'(t) = \gamma'(0)\gamma(t)$
On considère donc le système

$$\begin{cases} \gamma'(t) = X.\gamma(t) \quad \text{où } (X.g)(f(x)) = X(f(xg)), \\ \gamma(0) = 1_G \end{cases}$$

On admettra l'existence et l'unicité d'une solution au système précédent définie sur $\mathbb{R}$ (c'est un théorème de Cauchy-Lipschitz sur les variétés).
Ceci nous donne déjà l'unicité du sous groupe à un paramètre vérifiant $\gamma'(0) = X$. Pour l'existence on appelle γ la solution du système et on remarque que pour tout s, $t \longrightarrow \gamma(s)\gamma(t-s)$ est encore solution, l'unicité nous assure alors que $\gamma(t) = \gamma(s)\gamma(t-s)$ et que donc γ est bien un sous groupe

à un paramètre.
Pour la dernière assertion on a que

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}(f(\gamma_X(t))_{t=0} &= f'(1_G)\circ\gamma'_X(0)\\ &= f'(1_G)(X)\\ &= X(f)\end{aligned}$$

□

1.3 Cas de $GL_n(\mathbb{R})$

Voyons ce que donnent les résultats précédents dans le cas où G est un sous groupe fermé de $GL_n(\mathbb{R})$.
On pose $\mathfrak{h} = \{X \in M_n(\mathbb{R}), \quad exp(tX) \in G \quad \forall t \in \mathbb{R}\}$.
L'ensemble $\mathfrak{h}$ est clairement stable par multiplication par un scalaire, de plus,en admettant les formules :

$$exp(X+Y) = lim_n\left(exp(\frac{1}{n}X)exp(\frac{1}{n}Y)\right)^n$$

$$exp(XY-YX) = lim_n\left(exp(\frac{1}{n^2}X)exp(\frac{1}{n^2}X)exp(\frac{1}{n^2}X)exp(\frac{1}{n^2}X)\right)^{n^2}$$

et sachant que G est fermé, on voit que $\mathfrak{h}$ est stable par $+$ et par $[.,.]$.

Proposition 1.17 *L'application* $\left\{\begin{array}{lcl}\mathfrak{h} & \longrightarrow & \mathfrak{g}\\ X & \longrightarrow & (f \to \frac{d}{dt}(f(exp(tX))_{t=0})\end{array}\right.$ *est une bijection qui de plus conserve le crochet de Lie.*

Démonstration : Il suffit en fait d'appliquer la dernière propriété après avoir remarqué que les seuls sous groupes à un paramètre de $GL_n(\mathbb{R})$ sont les $t \longrightarrow exp(tX)$ où $X \in M_n(\mathbb{R})$.
Ensuite on prend X et Y dans $\mathfrak{h}$ on appelle $\mathcal{D}_X$ et $\mathcal{D}_Y$ les éléments de $\mathfrak{g}$ associés. On sait qu'il existe Z dans $\mathfrak{h}$ tel que

$$\begin{aligned}[\mathcal{D}_X,\mathcal{D}_Y] &= \mathcal{D}_Z\\ \text{soit}\quad [\mathcal{D}_X,\mathcal{D}_Y](f) &= \frac{d}{dt}f(exp(tZ))\\ \text{Or}\quad [\mathcal{D}_X,\mathcal{D}_Y](f) &= \frac{d}{dt_1}\frac{d}{dt_2}f(exp(t_1X)exp(t_2Y)) - \frac{d}{dt_1}\frac{d}{dt_2}f(exp(t_1Y)exp(t_2X))\end{aligned}$$

Et en prenant $f = id$ (composante par composante parce qu'on doit prendre f à valeurs dans $\mathbb{R}$) on voit que $Z = XY - YX$ ce qu'il fallait démontrer. □

2 $SL_2(\mathbb{R})$ et $SU(1;1)$

2.1 $SL_2(\mathbb{C})$ et ses formes réelles

Considérons les deux groupes suivants :

$SL_2(\mathbb{R}) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R}), ad - bc = 1 \right\}$ le groupe spécial linéaire réel.

$SU(1;1) = \left\{ \begin{pmatrix} \alpha & \overline{\beta} \\ \beta & \overline{\alpha} \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{C}), |\alpha|^2 - |\beta|^2 = 1 \right\}$ le groupe des isométries linéaires de la forme hermitienne $|z_1|^2 - |z_2|^2$.

Remarque : *Les groupes $SU(1;1)$ et $SL_2(\mathbb{R})$ sont conjugués dans $GL_2(\mathbb{C})$. On a :*

$$\begin{pmatrix} 1 & i \\ i & 1 \end{pmatrix} SU(1;1) \begin{pmatrix} 1 & i \\ i & 1 \end{pmatrix}^{-1} = SL_2(\mathbb{R})$$

Proposition 2.1 *Les algèbres de Lie correspondantes sont :*

$$\mathfrak{sl}_2(\mathbb{R}) = \{X \in M_2(\mathbb{R}), TrX = 0\}$$

$$\mathfrak{su}(1;1) = \left(\begin{smallmatrix} 1 & i \\ i & 1 \end{smallmatrix}\right)^{-1} \mathfrak{sl}_2(\mathbb{R}) \left(\begin{smallmatrix} 1 & i \\ i & 1 \end{smallmatrix}\right) = \left\{ \left(\begin{smallmatrix} z_1 & z_2 \\ \overline{z_2} & z_3 \end{smallmatrix}\right) z_1 + z_3 = 0,\ z_2 \in \mathbb{C},\ z_1 \in i\mathbb{R} \right\}$$

Démonstration : Il suffit de regarder les sous-espaces stables de l'exponentielle. On a :

$$\mathfrak{sl}_2(\mathbb{R}) = \left\{ X \in M_2(\mathbb{R})\ tq\ \forall t \in \mathbb{R} \quad e^{tX} \in SL_2(\mathbb{R}) \right\}$$

Or $det(expM) = exp(TrM)$, on a donc le résultat annoncé. Pour $SU(1;1)$, il suffit de conjuguer. □

2.2 Actions de $SL_2(\mathbb{R})$ et $SU(1;1)$ sur des domaines du plan complexe.

Définition 2.2 *Soient*

$$\begin{aligned} \mathbb{H}_+ &= \{z \in \mathbb{C}, Imz > 0\} \text{ le demi plan supérieur de Poincaré.} \\ \mathbb{D} &= \{\zeta \in \mathbb{C}, |\zeta| < 1\} \text{ le disque unité ouvert.} \end{aligned}$$

Théorème 2.3 *La fonction de Cayley $\phi(\zeta) = \frac{\zeta + i}{i\zeta + 1}$, d'inverse $\psi(z) = \frac{z - i}{-iz + 1}$ réalise un automorphisme conforme de $\mathbb{D}$ sur $\mathbb{H}_+$.*

Démonstration : on a bien $Imz > 0$ ssi $|\psi(z)| < 1$, puis comme $\psi \circ \phi = Id$, on a la bijectivité. □

Remarque : *On notera parfois $z(\zeta)$ (resp. $\zeta(z)$) pour $\phi(\zeta)$ (resp. $\psi(z)$).*

2.2.1 Actions de $SL_2(\mathbb{R})$ sur $\mathbb{H}_+$ et de $SU(1;1)$ sur $\mathbb{D}$

Théorème 2.4

(i) $SL_2(\mathbb{R})$ *agit sur* $\mathbb{H}_+$ *par* $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} z = \dfrac{az+b}{cz+d}$. *Cette action est transitive et* $\mathbb{H}_+ = {}^{SL_2(\mathbb{R})}/_{SO(2)}$

(ii) $SU(1;1)$ *agit sur* $\mathbb{D}$ *par* $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} z = \dfrac{az+b}{cz+d}$. *Cette action est transitive et* $\mathbb{D} = {}^{SU(1;1)}/_{SU(1)}$

(iii) Ces deux actions sont "identiques", reliées par la fonction de Cayley.

Démonstration : (i) On a $Im\dfrac{az+b}{cz+d} = \dfrac{Imz}{|cz+d|^2} > 0$, puis il est immédiat que l'on a une action de groupe.

Soit $x+iy \in \mathbb{H}_+$. Alors $\begin{pmatrix} y^{1/2} & xy^{-1/2} \\ 0 & y^{-1/2} \end{pmatrix} i = x+iy$. Donc l'action est transitive.

Donc $\mathbb{H}_+ = {}^{SL_2(\mathbb{R})}/_{Stab(i)}$. Or

$$\begin{aligned} Stab(i) &= \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL_2(\mathbb{R}), \frac{ai+b}{ci+d} = i \right\} \\ &= \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL_2(\mathbb{R}), a=d, b=-c \right\} \\ &= SO_2(\mathbb{R}) \end{aligned}$$

(iii) Montrons que $\psi(\sigma.z) = \left[\begin{pmatrix} 1 & i \\ i & 1 \end{pmatrix}^{-1} \sigma \begin{pmatrix} 1 & i \\ i & 1 \end{pmatrix} \right] .\psi(z)$ On a $\psi(\sigma.z) = \left[\begin{pmatrix} 1 & i \\ i & 1 \end{pmatrix}^{-1} \sigma \right] .z$, et $\begin{pmatrix} 1 & i \\ i & 1 \end{pmatrix} \psi(z) = z$, d'où le résultat.

(ii) Pour $|z| = 1$,on a $\left| \dfrac{\alpha z + \overline{\beta}}{\overline{\beta} z + \alpha} \right| = \left| \dfrac{\alpha z + \overline{\beta}}{\overline{\beta} + \alpha \overline{z}} \right| = 1$ donc, par le principe du maximum, $\mathbb{D}$ est bien stable par l'action de $SU(1;1)$. Puis, par (i) et (iii), on a : $\mathbb{D} = {}^{SU(1;1)}/_{Stab(0)} = {}^{SU(1;1)}/_{SU(1)}$.

□

2.3 Des mesures invariantes sur $\mathbb{H}_+$ et $\mathbb{D}$

Lemme 2.5 *Pour* $\sigma = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ *l'application* $z \longmapsto \sigma.z$ *(*$z \in \mathbb{C}$*) a pour jacobien* $\dfrac{|\det \sigma|^2}{|cz+d|^4} = \left| \dfrac{Im(\sigma z)}{Imz} \right|^2$

Démonstration : Il suffit de dériver : $\left(\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) z\right)' = \frac{a(cz+d)-c(az+b)}{(cz+d)^2} = \frac{ad-bc}{(cz+d)^2}$. Puis $Im(\sigma z) = Im\frac{ac|z|^2+bd+bc\overline{z}+adz}{|cz+d|^2} = Im\frac{ac|z|^2+bd+bc(\overline{z}+z)+\det\sigma z}{|cz+d|^2} = \frac{(\det\sigma)Imz}{|cz+d|^2}$. □

Théorème 2.6

(i) La mesure $\mu(dx,dy) = \dfrac{dxdy}{y^2}$ *est une mesure sur* $\mathbb{H}_+$ *invariante par l'action de* $SL_2(\mathbb{R})$.

(ii) La mesure $\nu(dx,dy) = \dfrac{dxdy}{\left(1-|z|^2\right)^2}$ *est une mesure sur* $\mathbb{D}$ *invariante par l'action de* $SU(1;1)$.

(iii) $\nu = 4\psi(\mu)$

Démonstration : (i) Par le lemme 2.5 on a :

$$\int_{\mathbb{H}_+} f(\sigma.z)\frac{dxdy}{(Imz)^2} = \int_{\mathbb{H}_+} f(\tau)\frac{\left|Im\sigma^{-1}\tau\right|^2}{|Im\tau|^2}\frac{d\tau}{|Im\sigma^{-1}\tau|^2}$$

(iii) On a $Imz = Im\left(\begin{smallmatrix} 1 & i \\ i & 1\end{smallmatrix}\right)\zeta = \frac{1-|\zeta|^2}{|i\zeta+1|^2}$. De plus, par le lemme 2.5, le jacobien de ψ est $\frac{4}{|i\zeta+1|^4}$. D'où

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{H}_+} f(\psi(z))\frac{dz}{(Imz)^2} &= \int_{\mathbb{D}} f(\zeta)\left(\frac{|i\zeta+1|^2}{1-|\zeta|^2}\right)^2\frac{4d\zeta}{|i\zeta+1|^4} \\ &= \int_{\mathbb{D}} f(\zeta)\frac{4d\zeta}{\left(1-|\zeta|^2\right)^2}\end{aligned}$$

□

Essentiellement, on retiendra que $\nu = \psi(\mu)$ "à un facteur près".

3 La série discrète holomorphe de $SL_2(\mathbb{R})$

3.1 Les espaces de Bergman $\mathcal{H}^2_\nu(\mathbb{H}_+)$ et $\mathcal{H}^2_\nu(\mathbb{D})$

3.1.1 L'espace $\mathcal{H}^2_\nu(\mathbb{H}_+)$

Pour Ω ouvert de $\mathbb{C}$, notons $\mathcal{H}(\Omega)$ l'ensemble des fonctions holomorphes sur Ω.

Fixons $\nu \in \mathbb{R}$ tel que $\nu > 1$.

On définit alors, pour $f \in \mathcal{H}(\mathbb{H}_+)$,

$$\| f \|_\nu{}^2 = \int_{\mathbb{H}_+} |f(z)|^2 y^\nu \frac{dxdy}{y^2}$$

$$\mathcal{H}^2_\nu(\mathbb{H}_+) = \left\{ f \in \mathcal{H}(\mathbb{H}_+) : \| f \|^2_\nu < \infty \right\}$$

$\mathcal{H}^2_\nu(\mathbb{H}_+)$ est naturellement muni d'un produit scalaire, noté $< .,. >_{\mathcal{H}^2_\nu(\mathbb{H}_+)}$, qui en fait un espace préhilbertien.

Théorème 3.1 *Pour $\nu > 1$, $\mathcal{H}^2_\nu(\mathbb{H}_+)$ est un espace de Hilbert, non réduit à $\{0\}$.*

Démonstration : Le fait que $\mathcal{H}^2_\nu(\mathbb{H}_+)$ soit non nul est clair car la fonction $(z+i)^{-\nu}$ appartient à $\mathcal{H}^2_\nu(\mathbb{H}_+)$.

Montrons que $\mathcal{H}^2_\nu(\mathbb{H}_+)$ est fermé dans $L^2(\mathbb{H}_+, y^{\nu-2}\frac{dxdy}{y^2})$. Pour cela, il suffit de montrer que la limite d'une suite d'éléments de $\mathcal{H}^2_\nu(\mathbb{H}_+)$ est holomorphe (le reste est clair). Pour cela, on va montrer qu'on a une convergence uniforme sur tout compact de $\mathbb{H}_+$.

1. L'inégalité de Cauchy-Schwarz montre que la norme $\| \, \|_\nu$ domine localement la norme L^1. En effet, si Q est un compact de $\mathbb{H}_+$, on a $y > \epsilon$ sur Q, et :

$$\int_Q |f(z)|dz \leq \left(\int_Q \frac{1}{y^{\nu-2}}dz\right)^{1/2}\left(\int_Q |f(z)|^2 y^{\nu-2}dz\right)^{1/2} \leq M_Q \| \, f \, \|_\nu$$

2. Puis le théorème de la moyenne donne, pour $z \in \mathbb{H}_+$ et r tel que $\overline{B(z,r)} \subset \mathbb{H}_+$:

$$\begin{aligned} |f(z)| &= \left| \frac{1}{\pi r^2}\int_{B(z,r)} f(u)du \right| \\ &\leq \frac{1}{\pi r^2}\int_{B(z,r)} |f(u)|du \\ &\leq \frac{M_z}{\pi r^2}\| \, f \, \|_\nu \end{aligned}$$

   Donc, si (g_n), suite d'éléments de $\mathcal{H}^2_\nu(\mathbb{H}_+)$, est de Cauchy, elle est uniformément de Cauchy sur tout compact. Donc, si g est la limite de (g_n), g est holomorphe.

□

Théorème 3.2 *Pour tout $z \in \mathbb{H}_+$, l'application de projection :* $\left\{ \begin{array}{ccc} \mathcal{H}^2_\nu(\mathbb{H}_+) & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ f & \longmapsto & f(z) \end{array} \right.$ *est continue.*

Démonstration : La dernière inégalité de la démonstration précédente montre le résultat. □

3.1.2 L'espace $\mathcal{H}^2_\nu(\mathbb{D})$

D'après les correspondances entre $\mathbb{H}_+$ et $\mathbb{D}$ vues en partie II, il est naturel de faire correspondre les espaces $\mathcal{H}^2_\nu(\mathbb{H}_+)$ avec des espaces de fonctions sur $\mathbb{D}$.

Définissons l'application

$$T : \left\{ \begin{array}{rcl} \mathcal{H}^2_\nu(\mathbb{H}_+) & \longrightarrow & \mathcal{H}(\mathbb{D}) \\ f & \longmapsto & Tf(\zeta) = m\left(\frac{1}{\sqrt{2}}(i\zeta+1)\right) f(z(\zeta)) \end{array} \right.$$

où m est le morphisme $\mathbb{C}^* \longmapsto \mathbb{C}^*$ donné par $z \longmapsto z^{-\nu}$.

T est évidemment injective.

Alors, par définition, l'espace $\mathcal{H}^2_\nu(\mathbb{D})$ est l'image de $\mathcal{H}^2_\nu(\mathbb{H}_+)$ par T, munie de la norme : $\| F \|_{\nu,\mathbb{D}} = \| T^{-1}F \|_\nu$

Remarque : *Autrement dit, $\mathcal{H}^2_\nu(\mathbb{H}_+)$ et $\mathcal{H}^2_\nu(\mathbb{D})$ sont "le même espace", vu de deux manières différentes. En fonction des aspects abordés - et des calculs à effectuer - on se placera plutôt dans l'un ou l'autre des deux cadres.*

Calculons explicitement l'expression de la norme dans $\mathcal{H}^2_\nu(\mathbb{D})$. On a :

$$\begin{aligned} {\| F \|_{\nu,\mathbb{D}}}^2 &= {\| T^{-1}F \|_\nu}^2 \\ &= \int_{\mathbb{H}_+} \left| \left(\frac{1}{\sqrt{2}}(-iz+1)\right)^{-\nu} F\left(\frac{z-i}{-iz+1}\right) \right|^2 y^n \frac{dxdy}{y^2} \\ &= \int_{\mathbb{H}_+} 2^\nu |-iz+1|^{-2\nu} \left| F\left(\frac{z-i}{-iz+1}\right)\right|^2 y^\nu \frac{dxdy}{y^2} \end{aligned}$$

Or $y^\nu = \left(\frac{1-|\zeta|^2}{|i\zeta+1|^2}\right)^\nu$ d'après un calcul vu en partie II. De plus, les calculs sur les mesures effectués en partie II permettent de faire le changement de variables :

$$\begin{aligned} {\| F \|_{\nu,\mathbb{D}}}^2 &= 2^n \int_{\mathbb{D}} \left| -i\frac{\zeta+i}{i\zeta+1} + 1 \right|^{-2\nu} |F(\zeta)|^2 \left(\frac{1-|\zeta|^2}{|i\zeta+1|^2}\right)^\nu \frac{4dxdy}{(1-|\zeta|^2)^2} \\ &= 2^\nu \int_{\mathbb{D}} \left| \frac{1+i}{i\zeta+1} \right|^{-2\nu} |F(\zeta)|^2 \left(\frac{1-|\zeta|^2}{|i\zeta+1|^2}\right)^\nu \frac{4dxdy}{(1-|\zeta|^2)^2} \\ &= \frac{2^\nu}{|1+i|^{2\nu}} \int_{\mathbb{D}} |F(\zeta)|^2 (1-|\zeta|^2)^\nu \frac{4dxdy}{(1-|\zeta|^2)^2} \end{aligned}$$

calcul dont on retiendra : ${\| F \|_{\nu,\mathbb{D}}}^2 = \int_{\mathbb{D}} |F(\zeta)|^2 (1-|\zeta|^2)^{\nu-2} dxdy$ (à un facteur près).

3.2 Noyaux reproduisants

Définition 3.3 *Soit H un espace de Hilbert de fonctions à valeurs dans $\mathbb{C}$ définies sur un ensemble E. On dit que H admet un noyau reproduisant K,* *où $K : E \times E \longrightarrow \mathbb{C}$, si $K(.,w) \in H$ pour tout w, et si pour toute $f \in H$, pour tout $x \in E$, on a :*

$$f(w) = < f(.), K(.,w) >$$

Théorème 3.4 Riesz *H admet un noyau reproduisant si et seulement si pour tout $x \in E$ l'application $\left\{ \begin{array}{ccc} H & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ f & \longmapsto & f(x) \end{array} \right.$ est continue.*

Démonstration : C'est un corollaire théorème de représentation de Riesz des formes linéaires continues pour les espaces considérés. □

Corollaire 3.5 *Les espaces $\mathcal{H}^2_\nu(\mathbb{H}_+)$ ont des noyaux reproduisants ($\nu > 1$).*

Nous nous proposons maintenant de donner un calcul explicite de ces noyaux. Pour cela, observons d'abord quelques propriétés des noyaux reproduisants.

Proposition 3.6 (Quelques propriétés des noyaux reproduisants) *Un noyau reproduisant K sur un espace de Hilbert H de fonctions complexes définies sur E vérifie les propriétés suivantes :*

(i)$K(w,z) = \overline{K(z,w)}$

$K(z,z) \geq 0$

$K(z,z) = 0$ *si et seulement si* $f(z) = 0 \ \ \forall f \in H$

(ii) $\forall z_1, \ldots, z_n \in E, \alpha_1, \ldots \alpha_n \in \mathbb{C}$

$$\sum_{j,k}^{N} K(z_k, z_j)\alpha_j \overline{\alpha}_k \geq 0$$

(iii) Pour toute base hilbertienne orthonormée $\{\psi_m\}$ de H, on a :

$$K(z,w) = \sum_m \psi_m(z)\overline{\psi_m(w)}$$

Remarque : *Le point (iii) permet dans certains cas de calculer explicitement le noyau d'un espace de Hilbert dont on connaît un b.o.n. (si l'on sait déjà que l'espace admet un noyau). On utilisera cela dans le cas des espaces $\mathcal{H}^2_\nu(\mathbb{H}_+)$.*

Démonstration : (i) et (ii) sont laissées au lecteur. Pour (iii), considérons $\sum_m \psi_m(z)\overline{\psi_m(w)}$. On a, par la théorie des espaces de Hilbert, que $\sum_m < f|\psi_m > \psi_m$ converge absolument vers f. Or, $f \longmapsto f(z)$ est continue, donc $\sum_m < f|\psi_m > \psi_m(z)$ converge vers $f(z)$. Donc, en appliquant ceci à $K_w = K(.,w)$, on a (puisque $< K_w|\psi_m > = \overline{< \psi_m|K_w >} = \overline{\psi_m(w)}$) que $\sum_m \overline{\psi_m(w)}\psi_m(z)$ converge vers $K_w(z)$. □

3.3 Calcul du noyau de $\mathcal{H}^2_\nu(\mathbb{H}_+)$, pour $\nu \in \mathbb{N} \setminus \{0,1\}$

Soit $n \in \mathbb{N} \setminus \{0,1\}$. On sait que $\mathcal{H}^2_n(\mathbb{H}_+)$ admet un noyau reproduisant car les applications $f \longmapsto f(z)$ sont continues. Pour le calculer, nous allons utiliser la remarque ci-dessus. Néanmoins, pour faciliter les calculs, nous nous placerons dans le cadre de l'espace $\mathcal{H}^2_n(\mathbb{D})$.

3.3.1 Calcul du noyau de $\mathcal{H}^2_n(\mathbb{D})$

Proposition 3.7 *L'espace des fonctions polynômiales sur $\mathbb{D}$ est dense dans $\mathcal{H}^2_n(\mathbb{D})$ $(n \geq 2)$.*

Démonstration : Soient $f \in \mathcal{H}^2_n(\mathbb{D})$ et $k \in \mathbb{Z}$. Définissons, pour $\zeta \in \mathbb{D}$,

$$f_k(\zeta) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(e^{i\theta}\zeta)e^{-ik\theta}d\theta$$

Alors f_k est holomorphe sur $\mathbb{D}$, et vérifie $f_k(e^{i\theta}\zeta) = e^{ik\theta}f_k(\zeta)$. Donc $f_k = 0$ si $k < 0$, et f_k est de la forme $\lambda_k X^k$ sinon. Or :

$$\begin{aligned}
|f_k(\zeta)|^2 &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(e^{i\theta}\zeta)\overline{f_k(\zeta)e^{ik\theta}}d\theta \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(e^{i\theta}\zeta)\overline{f_k(e^{i\theta}\zeta)}d\theta
\end{aligned}$$

Donc $\| f_k \|_{n,\mathbb{D}}{}^2 = (f|f_k)_{n,\mathbb{D}}$ et donc si $f \in \{f_k\}^\perp$, alors $f_k = 0$ pour tout k, donc $f = 0$. $\square$

Proposition 3.8 *Les fonctions $\{\psi_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ définies par $\psi_k(\zeta) = \zeta^k$ forment un base hilbertienne orthogonale de $\mathcal{H}^2_n(\mathbb{D})$. De plus, on a : $\| \psi_k \|_{n,\mathbb{D}}{}^2 = \frac{(-1)^k\pi}{n-1}\binom{-n}{k}^{-1}$ (où $\binom{-n}{k}$ désigne un coefficient du binôme généralisé).*

Démonstration : Il y a plusieurs choses à montrer :

1. Le fait que les fonctions ψ_k soient dans $\mathcal{H}^2_n(\mathbb{D})$ sera démontré en faisant le calcul de leur norme.
2. Le fait que l'espace engendré par les $\{\psi_k\}$ soit dense est exactement la proposistion précédente.
3. Le fait que les fonctions ψ_k soient orthogonales deux à deux vient du calcul :

$$\begin{aligned}
(\psi_k|\psi_l) &= \int_{\mathbb{D}} \zeta^k\overline{\zeta^l}(1-|\zeta|^2)^{n-2}d\zeta \\
&= \int_{[0,1]} \underbrace{\left(\int_{[0,2\pi]} e^{i(k-l)\theta}\right)}_{=0 \text{ pour } k\neq l} r^{k+l}(1-r^2)^{n-2}dr
\end{aligned}$$

4. Calculons la norme de ψ_k. Posons $I_k = \| \psi_k \|_{n,\mathbb{D}}{}^2$

$$
\begin{aligned}
I_k &= \int_{\mathbb{D}} |\zeta|^{2k} (1-|\zeta|^2)^{n-2} d\zeta \\
&= 2\pi \int_0^1 r^{2k} (1-r^2)^{n-2} r dr
\end{aligned}
$$

Posons $u = r^{2k}$ et $v' = r(1-r^2)^{n-2}$ et effectuons une intégration par parties :

$$
\begin{aligned}
I_k &= 2\pi \left(\left[r^{2k} \frac{-1}{2(n-1)} (1-r^2)^{n-1} \right]_0^1 + \frac{2k}{2(n-1)} \int_0^1 r^{2k-1} (1-r^2)^{n-1} dr \right) \\
&= \frac{k}{n-1} \left(I_{k-1} - I_k \right)
\end{aligned}
$$

On a donc : $I_k = \dfrac{k}{n+k-1} I_{k-1}$ d'où

$$
I_k = \frac{k(k-1)\dots 1}{(n+k-1)(n+k-2)\dots n} \, I_0 = \frac{(-1)^k}{\binom{-n}{k}} I_0
$$

Enfin, $I_0 = 2\pi \int_0^1 r(1-r^2)^{n-2} dr = \frac{2\pi}{2(n-1)}$, ce qui achève la démonstration.

□

Corollaire 3.9 *L'espace $\mathcal{H}_n^2(\mathbb{D})$ a pour noyau reproduisant :*

$$
K'_n(\zeta, \zeta') = \frac{n-1}{\pi} (1-\zeta\overline{\zeta'})^{-n}
$$

Démonstration : On utilise le point (iii) de la proposition. On sait que $\mathcal{H}_n^2(\mathbb{D})$ a un noyau, et que les fonctions $\left(\frac{(n-1)\binom{-n}{k}}{(-1)^k \pi} \right)^{1/2} \psi_k$ forment une base hilbertienne orthonormée. On a donc :

$$
\begin{aligned}
K'_n(\zeta, \zeta') &= \sum_n \frac{n-1}{\pi} (-1)^k \binom{-n}{k} \psi_k(\zeta) \overline{\psi_k}(\zeta') \\
&= \frac{n-1}{\pi} \sum_n \binom{-n}{k} (-\zeta\overline{\zeta})^k \\
&= \frac{n-1}{\pi} (1-\zeta\overline{\zeta'})^{-n}
\end{aligned}
$$

□

3.3.2 Le noyau reproduisant de l'espace $\mathcal{H}_n^2(\mathbb{H}_+)$

Théorème 3.10 *$K_n(z,w) = \dfrac{n-1}{4\pi}\left(\dfrac{z-\overline{w}}{2i}\right)^{-n}$ est le noyau reproduisant de $\mathcal{H}_n^2(\mathbb{H}_+)$.*

Démonstration : On utilise le noyau de $\mathcal{H}_n^2(\mathbb{D})$. Soit $f \in \mathcal{H}_n^2(\mathbb{H}_+)$, $F(\zeta) = Tf(\zeta) = (i\zeta+1)^{-n} f(z(\zeta))$. Soit $z_0 = z(\zeta_0) \in \mathbb{H}_+$. On a :

$$\begin{aligned}
&\frac{n-1}{4\pi}\int_{\mathbb{H}_+} f(z)\left(\frac{z_0-\overline{z}}{2i}\right)^{-n} y^n \frac{dxdy}{y^2} \\
= \;& \frac{n-1}{\pi}\int_{\mathbb{D}} f(z(w))\left(\frac{z(\zeta_0)-\overline{z(\zeta)}}{2i}\right)^{-n}\left(\frac{1-|\zeta|^2}{|i\zeta+1|^2}\right)^{-n}\frac{d\zeta}{1-|\zeta|^2} \\
= \;& \frac{n-1}{\pi}\int_{\mathbb{D}} (i\zeta+1)^n F(\zeta)\left(\frac{z(\zeta_0)-\overline{z(\zeta)}}{2i}\right)^{-n}(|iw+1|^2)^{-n}(1-|\zeta|^2)^{n-2} d\zeta \\
= \;& \frac{n-1}{\pi}\int_{\mathbb{D}} F(\zeta)(-i\overline{\zeta}+1)^{-n}\left(\frac{z(\zeta_0)-\overline{z(\zeta)}}{2i}\right)^{-n}(1-|\zeta|^2)^{n-2} d\zeta
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{Or} \quad \frac{z(\zeta_0)-\overline{z(\zeta)}}{2i}^{-n} &= \left(\frac{1}{2i}\left(\frac{\zeta_0+i}{i\zeta_0+1}-\frac{\overline{\zeta}-i}{-i\overline{\zeta}+1}\right)\right)^{-n} \\
&= \left(\frac{1-\zeta_0\overline{\zeta}}{(i\zeta_0+1)(-i\overline{\zeta}+1)}\right)^{-n}
\end{aligned}$$

Donc :

$$\begin{aligned}
&\frac{n-1}{4\pi}\int_{\mathbb{H}_+} f(z)\left(\frac{z_0-\overline{z}}{2i}\right)^{-n} y^n \frac{dxdy}{y^2} \\
= \;& \frac{n-1}{\pi}\int_{\mathbb{D}} F(\zeta)(-i\overline{\zeta}+1)^{-n}\left(\frac{1-\zeta_0\overline{\zeta}}{(i\zeta_0+1)(-i\overline{\zeta}+1)}\right)^{-n}(1-|\zeta|^2)^{n-2} d\zeta \\
= \;& \frac{n-1}{\pi}\int_{\mathbb{D}} F(\zeta)(i\zeta_0+1)^n\left(1-\zeta_0\overline{\zeta}\right)^{-n}(1-|\zeta|^2)^{n-2} d\zeta \\
= \;& (i\zeta_0+1)^n F(\zeta_0)
\end{aligned}$$

car on reconnaît le noyau reproduisant de $\mathcal{H}_n^2(\mathbb{D})$. Or $(i\zeta_0+1)^n F(\zeta_0) = f(z_0)$, on a donc le résultat. □

3.4 La série discrète holomorphe $(\mathcal{D}_n^+)_{n\geq 2}$de $SL_2(\mathbb{R})$

Effectuons quelques rappels généraux sur les représentations.

Définition 3.11 *Une représentation d'un groupe topologique G sur un espace de Hilbert $V \neq 0$ est un morphisme Ψ de G dans le groupe des opérateurs bornés de V et d'inverse borné, et tel que l'application induite $G \times V \to V$ est continue.*

Remarque : *Pour que l'application $G \times V \to V$ soit continue, il suffit de la forte continuité, c'est à dire que $g \mapsto \Psi(g)f$ soit continue en 1 pour toute f, et que $\| \Psi(g) \|$ soit bornée au voisinage de 1.*

Définition 3.12 *Une représentation Ψ est dite*
(i) unitaire si pour tout $g \in G$, pour toute $f \in V$, $\| \Psi(g)f \| = \| f \|$
(ii) irréductible si V n'a pas de sous-espace stable non trivial (un sous-espace F de V est dit stable si pour tout $g \in G$, $\Psi(g)F \subset F$).

Définition 3.13 *Pour $n \geq 2$, on définit l'action de $SL_2(\mathbb{R})$ sur $\mathcal{H}_n^2(\mathbb{H}_+)$ par :*

$$\mathcal{D}_n^+(\sigma)f(z) = (cz+d)^{-n} f\left(\frac{az+b}{cz+d}\right) \quad où\ \sigma^{-1} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

On définit ainsi une représentation de $SL_2(\mathbb{R})$ au sens des groupes topologiques.

En effet, on a la propriété de forte continuité : pour $f \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{C})$, l'application $g \longmapsto \mathcal{D}_n^+(g)f$ est continue en 1 par convergence dominée. Puis, par densité de $\mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{C})$, on a que pour toute $f \in \mathcal{H}_\nu^2(\mathbb{H}_+)$: $g \mapsto \mathcal{D}_n^+(g)f$ est continue en 1. Quant à la propriété de bornitude au voisinage de 1, elle peut se voir comme une conséquence de la proposition suivante.

Proposition 3.14 *Les représentations $\mathcal{D}_n^+$ sont unitaires.*

Démonstration : On a $(cz+d)^2 = \dfrac{y}{Im\sigma^{-1}z}$, donc

$$\begin{aligned} \| \mathcal{D}_n^+\sigma f \|_n^{\,2} &= \int_{\mathbb{H}_+} |\mathcal{D}_n^+\sigma f(z)|^2 y^n \frac{dxdy}{y^2} \\ &= \int_{\mathbb{H}_+} (Im\sigma^{-1}z)^n \left|f\left(\sigma^{-1}z\right)\right|^2 \frac{dxdy}{y^2} \\ &= \| f \|_n^{\,2} \end{aligned}$$

car $\frac{dxdy}{y^2}$ est invariante sous l'action de $SL_2(\mathbb{R})$. □

Théorème 3.15 *Les représentations $\mathcal{D}_n^+$ sont irréductibles.*

Démonstration : Soit U un sous-espace invariant non nul (on peut le supposer fermé). Alors il existe $f \in U$ avec $f(i) \neq 0$ (puique $SL_2(\mathbb{R})$ agit transitivement sur $\mathbb{H}_+$). De plus la quantité

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{-in\theta}\mathcal{D}_n^+\begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} f d\theta$$

est dans U car U est fermé. Évaluons-la en un point z.

$$
\begin{aligned}
& \left(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{-in\theta}\mathcal{D}_n^+\begin{pmatrix}\cos\theta & \sin\theta\\ -\sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix} f\, d\theta\right)(z)\\
= & \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{-in\theta}(-z\sin\theta+\cos\theta)^{-n} f\left(\frac{z\cos\theta-\sin\theta}{-z\sin\theta+\cos\theta}\right) d\theta\\
= & \frac{1}{2\pi i}\int_{|\zeta|=1} \zeta^{-n}\left(-\frac{z}{2i}\left(\zeta-\zeta^{-1}\right)+\frac{1}{2}\left(\zeta+\zeta^{-1}\right)\right)^{-n} f\left(\frac{\frac{z}{2}\left(\zeta+\zeta^{-1}\right)+\frac{1}{2i}\left(\zeta-\zeta^{-1}\right)}{\frac{-z}{2i}\left(\zeta-\zeta^{-1}\right)+\frac{1}{2}\left(\zeta+\zeta^{-1}\right)}\right)\frac{d\zeta}{\zeta}\\
= & \frac{1}{2\pi i}\int_{|\zeta|=1} (2i)^n\left(z+i+\zeta^2\left(-z+i\right)\right)^{-n} f\left(\frac{i(z+i)+\zeta^2(iz+1)}{z+i+\zeta^2(-z+1)}\right)\frac{d\zeta}{\zeta}\\
= & (2i)^n f(i)(z+i)^{-n}
\end{aligned}
$$

par le théorème des résidus appliqué à la fonction de ζ présente sous l'intégrale, qui est analytique pour $|\zeta| \leq 1$, sauf en 0 où le pôle est simple.

Donc la fonction $z \longmapsto (z+i)^{-n}$ est dans U, de même que dans tout sous-espace stable fermé et non nul. Or $U^\perp$ est stable et fermé, donc il est nul. Donc $U = \mathcal{H}_\nu^2(\mathbb{H}_+)$, et les représentations sont irréductibles. □

3.5 Description de la série discrète de $SU(1;1)$

D'après les correspondances entre $SU(1;1)$ et $SL_2(\mathbb{R})$ vues précédemment, la série discrète holomorphe de $SL_2(\mathbb{R})$ définit une représentation de $SU(1;1)$.

De manière générale, si R est une représentation de $SL_2(\mathbb{R})$ dans un espace de fonctions sur $\mathbb{H}_+$, on obtient une représentation $\widetilde{R}$ de $SU(1;1)$ dans un espace de fonctions sur $\mathbb{D}$ en procédant comme suit.

On choisit un homomorphisme de groupes $m : \mathbb{C}^* \longrightarrow \mathbb{C}^*$, à partir duquel on associe à une fonction f définie sur $\mathbb{H}_+$ une fonction F définie sur $\mathbb{D}$ par :

$F(\zeta) = Tf(\zeta) = m\left(\frac{i\zeta+1}{\sqrt{2}}\right) f(z(\zeta))$

$f(z) = T^{-1}F(z) = m\left(\frac{-iz+1}{\sqrt{2}}\right) F(\zeta(z))$

On obtient alors une représentation de $SU(1;1)$ en posant, pour $\Theta \in SU(1;1)$:

$$\widetilde{R}\Theta F(\zeta) = T\left(R\left[\begin{pmatrix}1 & i\\ i & 1\end{pmatrix}\Theta\begin{pmatrix}1 & i\\ i & 1\end{pmatrix}^{-1}\right](T^{-1}F)\right)(\zeta)$$

Dans le cas de $\mathcal{D}_n^+$, on prendra $m(z) = z^{-n}$. On obtient alors pour T l'application déjà définie en III. Cela définit une représentation $\widetilde{\mathcal{D}_n^+}$ de $SU(1;1)$ dans l'espace $\mathcal{H}_n^2(\mathbb{D})$, donnée par :

$$\widetilde{\mathcal{D}_n^+} gF(\zeta) = (\overline{\beta}\zeta+\overline{\alpha})^{-n} F\left(\frac{\alpha\zeta+\beta}{\overline{\beta}\zeta+\overline{\alpha}}\right) \text{ où } g^{-1} = \begin{pmatrix}\alpha & \beta\\ \overline{\beta} & \overline{\alpha}\end{pmatrix}$$

4 Etude d'une restriction de la représentation

4.1 Théorème des noyaux de Laurent Schwartz

Dans tout ce qui suit E sera un espace vectoriel topologique séparé localement convexe.
La notation $(\cdot, \cdot)$ désignera le crochet de dualité sur E (et dans ce cas on mettra l'élément de E à gauche et celui de E' à droite) tandis que les produits scalaires hermitiens qu'on sera amené à considérer (et qui seront linéaires à gauche et antilinéaires à droite) seront notés $< \cdot, \cdot >$. Dans chaque cas, on utilisera parfois des indices pour préciser les espaces dans lesquels on se place.

Définition 4.1 *On dira que $\mathcal{H}$ est un sous espace hilbertien de E si $\mathcal{H}$ est un sous espace vectoriel de E muni d'une structure d'espace de Hilbert telle l'injection $\mathcal{H} \longrightarrow E$ soit continue.*
On notera $Hilb(E)$ l'ensemble des sous-espaces hilbertiens de E. Il faut faire bien attention qu'ici deux espaces de Hilbert seront dits égaux si et seulement s'ils sont égaux en tant qu'ensembles et qu'ils ont le même produit scalaire.

Définition 4.2 *Un noyau de E est une application linéaire $A : E \longrightarrow E'$ (où E' est le dual topologique de E) continue pour les topologies faible et faible $*$ de E et E'.*
On dit que A est hermitien s'il vérifie pour toutes f et g dans E' $(Ag, f) = \overline{(Af, g)}$.
Enfin on dit qu'il est positif si pour toute f dans E' $(Af, f) \geq 0$.
On notera $\mathcal{L}^+(E)$ l'ensemble des noyaux hermitiens positifs de E.

Définition 4.3 *Soit $\mathcal{H}$ un sous espace hilbertien de E on appelle j l'injection de $\mathcal{H}$ dans E et on définit $j^* : E' \longrightarrow \mathcal{H}'$ par : pour $f \in E'$ et $h \in \mathcal{H}$ $< j^*f, h >= (f, jh)$.*
Si on appelle $\theta : \mathcal{H}' \longrightarrow \mathcal{H}$ l'isomorphisme de Riesz on dispose alors de :

$$E' \xrightarrow{j^*} \mathcal{H}' \xrightarrow{\theta} \mathcal{H} \xrightarrow{j} E$$

On pose $A = j\theta j^*$ et on l'appelle noyau de $\mathcal{H}$; il vérifie :
(i) $\forall f \in E'$, $h \in \mathcal{H}$, $< h, Af >_{\mathcal{H}}= (jh, f)_{E,E'}$
(ii) en particulier $\|Af\|^2 = (Af, f)$
On voit en particulier que A est un un noyau hermitien positif de E. Très souvent dans la suite on oubliera j et θ et on confondra le noyau de $\mathcal{H}$ avec j^*.

Le théorème principal de la théorie des noyaux de Schwartz et que nous allons montrer brièvement ici dit que l'application qui à $\mathcal{H}$ associe son noyau est en fait une bijection entre $Hilb(E)$ et $\mathcal{L}^+(E)$.
Voici d'abord une propriété qui servira souvent par la suite :

Proposition 4.4 *Soit $\mathcal{H}$ un sous espace hilbertien de E et A son noyau, alors $A(E')$ est dense dans $\mathcal{H}$.*

Démonstration : Il suffit de montrer que $A(E')^{\perp} = 0$. Soit $x \in \mathcal{H}$ tel que pour toute $f \in E'$ $< x, Af >_{\mathcal{H}} = 0$. Or $< x, Af > = (jx, f)$, on a donc $(jx, f) = 0$ pour toute f dans E' ce qui implique $jx = 0$ puis $x = 0$. □

Proposition 4.5 *Avec les mêmes notations que dans la propriété précédente on a : un élément x de E est dans $\mathcal{H}$ si et seulement si $\exists M > 0$ tel que $\forall f \in E'$ $|(h, f)| \leq M\|Af\|_{\mathcal{H}}$.*
Et dans ce cas on a que la norme de x dans $\mathcal{H}$ est égale au plus petit M vérifiant cette propriété.

Démonstration : Si $x \in \mathcal{H}$ on a $|(x, f)| = | < x, Af > | \leq \|x\|_{\mathcal{H}}\|Af\|_{\mathcal{H}}$.
Réciproquement on définit

$$\begin{array}{ccc} A(E') & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ y = A(f) & \longrightarrow & (x, f)_{E,E'} \end{array}$$

Il faut montrer que cette application est bien définie, c'est à dire que l'image de $y = Af$ ne dépend pas du choix de f. Si $Af = 0$ alors $(x, f) = 0$ (d'après l'inégalité $(x, f) \leq M\|Af\|$), donc si $Af = Ag$ alors $(x, f) = (x, g)$.
De plus, (toujours grâce à l'inégalité) on a la continuité de cette application qui est donc une forme linéaire sur $A(E')$ qui comme on l'a vu est dense dans $\mathcal{H}$. Cette application se prolonge alors de manière unique à $\mathcal{H}$. Soit $h \in \mathcal{H}$ correspondant à cette application par l'isomorphisme de Riesz. On a pour toute $f \in E'$ $(x - h, f)_{E,E'} = (x, f)_{E,E'} - < h, Af >_{\mathcal{H}} = 0$ par définition de h et donc $x - h = 0$ et $x \in \mathcal{H}$.
Pour la dernière égalité on sait déjà que $|(x, f)| \leq \|x\|\|Af\|$ pour toute f donc $M_{min} \leq \|x\|$ puis en prenant $Af_n \overset{\mathcal{H}}{\to} x$ on obtient l'égalité. □

Corollaire 4.6 *L'application qui à $\mathcal{H}$ associe son noyau est injective.*

Démonstration : En effet la première partie de la proposition nous dit que connaissant le noyau on retrouve l'ensemble, la deuxième partie nous donne ensuite le produit scalaire. □

On en arrive au théorème des noyaux :

Théorème 4.7 *L'application $Hilb(E) \longrightarrow \mathcal{L}^{+}(E)$ qui à un sous espace hilbertien de E associe son noyau est une bijection.*

Démonstration : On a déjà vu qu'elle était injective montrons qu'elle est surjective. Soit A un noyau hermitien positif de E. On pose $\mathcal{H}_0 = A(E')$. On va munir $\mathcal{H}_0$ d'une stucture préhilbertienne. Soient x et y dans $\mathcal{H}_0$. Soit f telle que $Af = y$ on pose $< x, y >_{\mathcal{H}_0} = (x, f)_{E,E'}$. Il faut montrer que ceci ne dépend pas du choix de f. Pour cela il suffit de montrer que si $Af = 0$ alors $(x, f) = 0$ pour tout x dans $\mathcal{H}_0$. Ce qui va tout faire marcher c'est qu'un noyau hermitien positif vérifie l'inégalité de Cauchy Schwarz :

$$\forall f, g \in E' \qquad |(Ag, f)| \leq \sqrt{(Af, f)(Ag, g)}$$

En particulier si $Af = 0$, $(Ag, f) = 0$ pour tout $g \in E'$, et donc $(x, f) = 0$ pour tout $x \in \mathcal{H}_0$ ce qu'on voulait démontrer.
Il est facile de voir ensuite de voir que la forme $< \cdot, \cdot >_{\mathcal{H}_0}$ ainsi définie est linéaire à gauche, antisymétrique (grâce à l'hermicicité de A) et positive (positivité de A). De plus si $< x, x >= 0$ alors $(Af, f) = 0$ où f est telle que $Af = x$ alors $\forall g \in E'$ $(Af, g) = 0$ (d'après l'inégalité de Cauchy Schwarz) et donc $Af = 0$ dans E et donc $x = 0$. Ce qui achève de prouver qu'on a bien un produit scalaire hermitien.
Prouvons que $\mathcal{H}_0 \hookrightarrow E$ est continue. Par un théorème d'analyse bien connu il suffit de prouver que cette application est continue pour les topologies faibles. Or si on prend f dans E' on a par définition : $\forall x \in \mathcal{H}_0$, $(x, f) =< x, Af >_{\mathcal{H}_0}$ et donc $\forall x \in \mathcal{H}_0$, $|(x, f)| \leq |< x, Af >_{\mathcal{H}_0}|$ ce qui prouve la continuité pour les topologies faibles respectives de $\mathcal{H}_0$ et E.
Montrons ensuite qu'il existe un complété de $\mathcal{H}_0$ dans E. On prend d'abord un complété $\overline{\mathcal{H}_0}$ de $\mathcal{H}_0$ ($\overline{\mathcal{H}_0}$ n'est pas nécessairement un sous espace de E). On dispose de l'injection naturelle $\mathcal{H}_0 \overset{j}{\hookrightarrow} E$ dont on a vu qu'elle était continue. Par le théorème de Hahn-Banach on peut la prolonger de manière continue à $\overline{\mathcal{H}_0}$, on appelle $\overline{j}$ cette nouvelle application. Montrons qu'elle est injective.
Soit $x \in \overline{\mathcal{H}_0}$, $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite d'éléments de $\mathcal{H}_0$ tendant vers x et $y = Af \in \mathcal{H}_0$.

$$\begin{aligned} < x, y >_{\overline{\mathcal{H}_0}} &= lim_n < x_n, y >_{\mathcal{H}_0} && \text{par définition du complété} \\ &= lim_n (x_n, g)_{E,E'} \\ &= (\overline{j} x, g)_{E,E'} && \text{par continuité de } \overline{j} \end{aligned}$$

Donc si $\overline{j} x = 0$ on a $< x, y >= 0$, pour tout y dans $\mathcal{H}_0$ donc $x \in \mathcal{H}_0^{\perp}$ et donc x est nul.
Le calcul précédent montre aussi que $\overline{j}\overline{j}^* = A$. Par conséquent on considère $\mathcal{H} = \overline{j}(\overline{\mathcal{H}_0})$ qu'on munit du produit scalaire de $\overline{\mathcal{H}_0}$ transporté par $\overline{j}$ (faisant de $\overline{j}$ une isométrie), on obtient un sous espace hilbertien de E dont le noyau est bien A, d'où le résultat. □

4.2 Restriction de la série discrète holomorphe de $SL_2(\mathbb{R})$ à un sous-groupe

4.2.1 Définition du sous-groupe H

Soit η l'involution de $\mathbb{H}_+$ donnée par $x+iy \longmapsto -x+iy$, i.e. l'opposée de la conjugaison complexe. On considère le sous-groupe H de $SL_2(\mathbb{R})$ défini par :

$$H = \left(\left\{g \in SL_2(\mathbb{R}),\ \eta g = g\eta\right\}\right)_0$$

où $(P)_0$ désigne la composante connexe de l'identité dans P.

Un calcul simple montre que $H = \left\{\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & 1/\lambda \end{pmatrix}\ ,\ \lambda \in \mathbb{R}_+^*\right\}$

Remarque : *Ce groupe, isomorphe à* $(\mathbb{R}_+^*, *)$*, est aussi isomorphe à* $SO(1;1)$*, stabilisateur dans* $GL_2(\mathbb{R})$ *de la forme quadratique* $X^2 - Y^2$.

Proposition 4.8 (Orbites sous l'action de H) *Les orbites sous l'action de H sont les demi-droites ouvertes* $]0, z), z \in \mathbb{H}_+$. *En particulier, l'orbite de i sous cette action est* $i\mathbb{R}_+^*$. *On a donc* $\mathbb{R}_+^* \simeq H/Stab(i) = H/H\cap K$.

Démonstration : On a $\left(\begin{smallmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & 1/\lambda \end{smallmatrix}\right).\ z = \lambda^2 z$ □

4.2.2 Restriction à H des représentations $\mathcal{D}_n^+$

La restriction à H de l'action de $SL_2(\mathbb{R})$ sur $\mathbb{H}_+$ est donnée par son action sur une orbite, par exemple celle de i, qui est $(i\mathbb{R}_+^*)$. Donc l'action de $SL_2(\mathbb{R})$ sur $\mathcal{H}_n^2(\mathbb{H}_+)$, restreinte à H, devient une action sur un espace de fonctions définies sur $i\mathbb{R}+^*$.

Le théorème 4.7 va nous permettre de déterminer les propriétés de l'espace en question, en étudiant son noyau. Commençons donc par déterminer le noyau.

On dispose de :

$$\begin{array}{rcl} j : \mathcal{H}_n^2(\mathbb{H}_+) & \longrightarrow & C^\infty(\mathbb{R}_+^*) \\ f & \longrightarrow & (y \to f(iy)K_{-n/2}(iy, iy)) \end{array}$$

Proposition 4.9 *j est injective, et continue pour la topologie de* $C^\infty(\mathbb{R}_+^*)$ *donnée par la famille de semi normes :* $\rho_{K,n}(f) = max\{|f^{(k)}(x)|, k \leq n, x \in K\}$ *pour K compact de* $\mathbb{R}_+^*$, *n décrivant* $\mathbb{N}$.

Démonstration : 1. j est injective car si deux fonctions holomorphes sur $\mathbb{H}_+$ sont égales sur $i\mathbb{R}_+^*$ elles sont égales partout.

2. Continuité de j. Soit $f \in \mathcal{H}_n^2(\mathbb{H}_+)$. Soit K un compact de $i\mathbb{R}_+^*$, et n un entier positif. Il existe K' compact de $\mathbb{H}_+$ et $r > 0$ tels que $K \subset K'$ et $d(K, K'^C) > r$. On a alors par la majoration de Cauchy que pour tous $k \in \mathbb{N}$ et $z \in K$: $|f^{(k)}(z)| \leq \frac{k!}{r^k} \sup_{K'}(|f(z)|)$. De plus, $\big(z \mapsto K_{-n/2}(z,z)\big)$ est bornée sur K. Donc, il existe une constante $M_{K,n}$ telle que $\rho_{K,n}(j(f)) \leq M_{K,n} \sup_{K'}(|f(z)|)$. Or on a vu en partie III que $\sup_{K'}(|f(z)|) \leq M_K^{'} \| f \|_n$, donc :

$$\rho_{K,n}(j(f)) \leq M_{K,n}^{''} \| f \|_n$$

ce qu'il fallait démontrer.

□

Le dual de $C^\infty(\mathbb{R}_+^*)$ pour cette topologie est l'espace $\mathcal{E}^{'}(\mathbb{R}_+^*)$ des distributions à support compact. On définit de la même manière que dans le paragraphe 4.1 $j^* : \mathcal{E}'(\mathbb{R}_+^*) \to \mathcal{H}_n^2(\mathbb{H}_+)$ par :

$$(f, j^*\phi)_{\mathcal{H}_n} = (jf, \phi)_{C^\infty, \mathcal{E}'}$$

On a alors les propriétés suivantes :

$$\begin{array}{rcl} (jj^*\phi, \psi) & = & < j^*\phi, j^*\psi >_{\mathcal{H}_n} \\ & = & \overline{< j^*\psi, j^*\phi >_{\mathcal{H}_n}} \\ & = & \overline{(jj^*\psi, \phi)} \end{array}$$

d'une part, et d'autre part :

$$(jj^*\phi, \phi) = \|j^*\phi\|_{\mathcal{H}_n} \geq 0$$

Ce qui montre que $A = jj^* : \mathcal{E}'(\mathbb{R}_+^*) \longrightarrow C^\infty(\mathbb{R}_+^*)$ est un noyau hermitien positif de $C^\infty(\mathbb{R}_+^*)$.
Il faut faire attention que A n'est sûrement pas le noyau de $\mathcal{H}_n^2(\mathbb{H}_+)$ relativement à $C^\infty(\mathbb{R}_+^*)$ car $\mathcal{H}_n^2(\mathbb{H}_+)$ n'est pas un sous espace vectoriel de $C^\infty(\mathbb{R}_+^*)$. Par contre le théorème des noyaux de Schwartz nous permet d'affirmer qu'il existe un sous espace $\mathcal{F}_n$ de $C^\infty(\mathbb{R}_+^*)$ qui admet A pour noyau. C'est sur cet espace qu'on va faire agir H.

Pour cela, étudions maintenant quelques propriétés des sous-espaces hilbertiens de $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}_+^*)$.

Lemme 4.10 *Tout sous espace hilbertien $\mathcal{H}$ de $C^\infty(\mathbb{R}_+^*)$ admet un noyau reproduisant donné par $K(x,y) = (A\delta_y)(x)$ où $A : \mathcal{E}' \longmapsto \mathbb{C}^\infty$ est le noyau de $\mathcal{H}$ (au sens de la théorie de Laurent Schwartz) et δ_y le delta de Dirac en y (qui est bien dans $\mathcal{E}'$).*

Démonstration : Soit $f \in \mathcal{H}$, $< f, A\delta_y >_{\mathcal{H}} = (f, \delta_y)_{C^\infty, \mathcal{E}'} = f(y)$ ce qu'il fallait démontrer. □

Corollaire 4.11 (Noyau reproduisant de $\mathcal{F}_n$) *Le noyau reproduisant de $\mathcal{F}_n$ est :*

$$B_n(x,y) = \frac{K_n(ix,iy)}{K_{n/2}(ix,ix)K_{n/2}(iy,iy)} = 4\frac{(n-1)}{(n-2)^2}\left(\frac{x+y}{2}\right)^{-n}(xy)^{n/2}$$

Ce noyau est appelé noyau de Berezin.

Démonstration : Commençons par calculer le noyau de $\mathcal{F}_n$, qui est jj^*.

Soient $\phi \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}_+^*)$ et $F \in \mathcal{H}_n^2(\mathbb{H}_+)$. On notera ici $f(i\cdot)$ pour la fonction $y \mapsto f(iy)$. On a :

$$\begin{aligned}
< F, j^*\phi > &= (jF, \phi)\\
&= \left(\int_{\mathbb{H}_+} F(z)K_n(i\cdot,z)y^{n-2}dzK_{-n/2}(i\cdot,i\cdot),\phi\right)\\
&= \int_{\mathbb{H}_+} F(z)\Big(K_n(\cdot,z)K_{-n/2}(i\cdot,i\cdot),\phi\Big)y^{n-2}dz
\end{aligned}$$

car on peut intervertir crochet et intégrale pour les distributions à support compact.

Donc $j^*\phi(z) = \left(\overline{K_n(i\cdot,z)K_{n/2}(i\cdot,i\cdot)},\phi\right)$

Puis :

$$\begin{aligned}
jj^*\phi(y) &= (j^*\phi)(iy)K_{-n/2}(iy,iy)\\
&= K_{-n/2}(iy,iy)\left(\overline{K_n(i\cdot,iy)K_{-n/2}(i\cdot,i\cdot)},\phi\right)
\end{aligned}$$

Le lemme prédédent donne alors le résultat.

□

Remarque : *Réciproquement si on connaît le noyau reproduisant K de $\mathcal{H}$ on peut retrouver son noyau A. En effet on connaît alors les fonctions $A\delta_y$ pour tous les y décrivant $\mathbb{R}_+^*$; et en utilisant le fait que les combinaisons linéaires de deltas de Dirac sont denses dans $\mathcal{E}'$ on trouve tous les $A\phi$, $\phi \in \mathcal{E}'$.*

Définition 4.12 *On sait que H agit transitivement sur $\mathbb{R}_+^*$; l'action de H sur $C^\infty(\mathbb{R}_+^*)$ est alors donnée par : $g.f = y \longmapsto f(g^{-1}.y)$. De cette action on peut déduire une action de H sur $\mathcal{E}'(\mathbb{R}_+^*)$ via la formule : $(f, g.A\phi)_{C^\infty,\mathcal{E}'} = (g^{-1}.f, \phi)_{C^\infty,\mathcal{E}'}$.*
On a par exemple $g.\delta_y = \delta_{g.y}$

Définition 4.13 *Le noyau reproduisant $K(x,y)$ d'un espace de Hilbert sera dit invariant sous l'action de H si pour tout g dans H, x et y dans $\mathbb{R}_+^*$ $K(g.x, g.y) = K(x,y)$.*

Proposition 4.14 *Soit $\mathcal{H}$ un sous-espace hilbertien de E ; $\mathcal{H}$ est stable et l'action de H sur $\mathcal{H}$ est unitaire si et seulement si son noyau reproduisant est invariant.*

Démonstration : On appelle A le noyau de $\mathcal{H}$ et K son noyau reproduisant. Montrons que l'action de H commute alors à A : $g.A\delta_y(x) = A\delta_y(g^{-1}.x) = K(g^{-1}.x, y) = K(g^{-1}.x, g^{-1}g.y) = K(x, g.y) = A(g.\delta_y)(x)$. Puis en utilisant la densité des fonctions delta on obtient $g.A\phi = Ag.\phi$ pour toute $\phi \in \mathcal{E}'$. Cette dernière formule montre que $\mathcal{H}_0 = A\mathcal{E}'$ est stable par H. De plus on a

$$(g.A\phi, g.A\psi)_{\mathcal{H}} = (g.A\phi, Ag.\psi)_{\mathcal{H}} = (g.A\phi, g.\psi)_{C^\infty,\mathcal{E}'} = (A\phi, \psi)_{C^\infty,\mathcal{E}'} = (A\phi, A\psi)_{\mathcal{H}}$$

et donc l'action de H sur $\mathcal{H}_0$ est unitaire. En utilisant ensuite la densité de $\mathcal{H}_0$ dans $\mathcal{H}$ on en déduit le même résultat sur $\mathcal{H}$.
La réciproque est facile. □

On en arrive au résultat final :

Corollaire 4.15 *$\mathcal{F}_n$ est stable sous l'action de H sur $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}_+^*)$. On a donc une action de H sur $\mathcal{F}_n$ qui, de plus, est unitaire.*

Démonstration : Il suffit de voir que le noyau de $\mathcal{F}_n$ est invariant. Or H agit sur $i\mathbb{R}_+^*$ par $\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \frac{1}{\lambda} \end{pmatrix} \cdot z = \lambda^2 z$, donc $B_n(x,y) = 4\frac{n-1}{(n-2)^2}\left(\frac{x+y}{2}\right)^{-n}(xy)^{n/2}$ est invariant. □

Conclusion

Nous avons posé le cadre permettant d'aborder une étude précise des propriétés de la représentation restreinte. En particulier, une des questions qui se posent à propos de cette représentation est de déterminer son spectre (car une restriction d'une représentation irréductible n'est évidemment pas a priori irréductible).

Une théorie que nous n'avons pas abordée dans ce mémoire relie la décomposition en sous-espace propres de la représentation et la transformée de Fourier sphérique de son noyau reproduisant.

Ainsi, le calcul de la transformée de Fourier du noyau de Berezin permet de montrer que la restriction de la série discrète holomorphe $\mathcal{D}_n^+$ au groupe H n'est pas irréductible, et possède une infinité continue de sous-espaces stables (dont les noyaux sont donnés par cette transformée de Fourier). Ce thème (et notamment le calcul explicite) est traité dans l'article [8].

Bibliographie

[1] Jacques FARAUT et Adam KORÁNYI. *Analysis on symmetric cones.* Oxford science publications, 1994.

[2] Jacques FARAUT et E.G.F. THOMAS. Invariant hilbert spaces of holomorphic functions. *Journal of Lie theory*, 1999.

[3] Roger GODEMENT. *Introduction à la théorie des groupes de Lie, tomes I et II.* Publications mathématiques de l'université Paris VII, 1982.

[4] KNAPP. *Representation theory of semisimple groups : an overview based on examples.* Princeton university press, 1986.

[5] Serge LANG. $SL_2(\mathbb{R})$. Graduate texts in mathematics. Springer-Verlag, 1985.

[6] Laurent SCHWARTZ. Sous-espaces hilbertiens d'espaces vectoriels topologiques et noyaux associés (noyaux reproduisants). *J. Anal. math*, 1964.

[7] Gerrit van DIJK. On canonical representations and berezin kernels. *Banach center publications*, 2001.

[8] Gerrit van DIJK et Micha PEVZNER. Berezin kernels on tube domains. *Journal of functional analysis*, (181), 2001.