La p-construction plus

Ou comment faire compliqué quand on ne peut pas faire simple.

Emmanuel Chemla
sous la direction de Bob Oliver

1 Introduction

La ligne d'horizon de cet exposé est la caractérisation des morphismes de groupes discrets finis induisant des isomorphismes en homologie (entière ou modulo p). Le résultat s'exprime de façon très naturelle et peut donc sembler d'un abord très simple. Cependant il résiste aux méthodes usuelles d'algèbre "pure".

Je vais essayer de donner une idée de démonstration en mettant en lumière différents outils nécessaires et désormais classiques.

Par convention, dans tout l'exposé, "espace" (X, Y...) désigne par défaut un espace muni d'une topologie (et même d'une structure de CW-complexe). De même, les applications sont implicitement supposées continues. Les groupes (G, H...) sont eux aussi implicitement supposés finis et munis de la topologie discrète. Enfin, p désigne un nombre premier.

2 Préliminaires de topologie algébrique

L'objectif est de transposer un problème topologique en un problème algébrique. C'est le rôle de la théorie de l'homotopie :

2.1 Homotopie

Définition 1. *Soient deux espaces topologiques X et Y.*

1. *Deux applications continues f_0 et f_1 de X vers Y sont dites* homotopes *s'il existe une application continue H (appelée homotopie) de $X \times [0,1]$ vers Y telle que : $\forall x \in X$, $H(x,i) = f_i$, pour $i = 0$ ou 1.*
2. *On dit que X et Y ont* même type d'homotopie *s'il existe une application f de X vers Y et une application g de Y vers X telles que les composées dans les deux sens soient homotopes aux identités de X et de Y. On dira que f et g réalisent des* équivalences d'homotopies *entre X et Y.*

Intuitivement, sont homotopes deux applications (et par extension deux espaces) que l'on peut déformer continûment l'un(e) sur l'autre.

2.2 Groupes d'homotopie

Le passage de la topologie à l'algèbre se fait alors en définissant les groupes d'homotopie d'un espace :

Définition 2. *Etant donné un espace X, pour tout $n \in \mathbb{N}$ on définit "naturellement" $\pi_n(X)$ le* n-ième groupe d'homotopie *de X comme l'ensemble des* *applications de $\mathbb{S}^n$ la sphère de dimension n dans X à homotopie près. Ces ensembles sont munis d'une structure de groupe "naturel" pour n non nul, abélien pour $n > 1$. Le groupe $\pi_1(X)$ est aussi appelé* groupe fondamental *de X.*

Le mot *naturel* qui apparaît dans cette définition n'est pas anodin, il précise que toute application entre deux espaces X et Y induit un morphisme de groupes entre les groupes d'homotopie de ces espaces. De plus, les homotopies induisent des isomorphismes. Ainsi, les groupes d'homotopies permettent une première comparaison entre deux espaces : ils ne pourront avoir même type d'homotopie que si leurs groupes d'homotopie sont isomorphes. Le problème réciproque est plus ardu, mais souvent vrai.

3 Algèbre homologique

Dans leur livre de 1956, Henry Cartan et Samuel Eilenberg développent les outils d'algèbre homologique désormais très courants. Exprimés dans un cadre très général, ils permettent des calculs pertinents pour des applications variées.

3.1 Préliminaires d'homologie

Un complexe est une suite de morphismes entre des modules ou des groupes telle que les composées deux par deux soient nulles (noté A_* en oubliant les morphismes) :

$$\ldots \longrightarrow A_{n+1} \xrightarrow{u_{n+1}} A_n \xrightarrow{u_n} A_{n-1} \longrightarrow \ldots$$

avec $u_n \circ u_{n+1} = 0$. Le complexe sera dit exact lorsque l'inclusion réciproque sera aussi vérifiée (i.e. $\mathrm{Im}(u_{n+1}) = \ker(u_n)$) et l'homologie du complexe peut donc être comprise comme une mesure d'inexactitude :

$$H_*(A_*) = \ker(u_*)/\mathrm{Im}(u_{*+1}).$$

A partir de ce cadre très général, on définit les *groupes d'homologie* $H_*(G;\mathcal{L})$ d'un groupe G à cœfficients dans un $\mathbb{Z}[G]$-module $\mathcal{L}$ comme l'homologie de tout complexe (on vérifie qu'il n'y a pas ambiguïté) de la forme :

$$\ldots \longrightarrow C_{n+1} \otimes_{\mathbb{Z}[G]} \mathcal{L} \xrightarrow{u_{n+1}\otimes id} C_n \otimes_{\mathbb{Z}[G]} \mathcal{L} \longrightarrow \ldots$$

où C_* est un complexe tel que :

$$\begin{cases} C_0 = \mathbb{Z}[G] & \\ C_n = 0 & \text{si } n < 0 \\ C_n \text{ est un } \mathbb{Z}[G]\text{-module projectif} & \text{si } n > 0 \end{cases}$$

Le procédé est très général et en associant à un espace X et à un *système de cœfficients* sur X (tout $\mathbb{Z}[\pi_1(X)]$-module) un certain type de complexe, on définit aussi l'homologie $H_*(X;\mathcal{L})$.

3.2 Position du problème

L'objectif ici est de comprendre mieux les morphismes de groupes induisant des isomorphismes en homologie à cœfficients dans $\mathbb{Z}$ ou dans $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$.

3.3 La catégorie de fusion et le foncteur F_p

Il est intéressant maintenant d'introduire l'espace de travail suivant :

Définition 3. *Soit G un groupe et p un nombre premier. On note $Q_p(G)$ la* catégorie de fusion *de G : ses objets sont les p-sous-groupes finis de G et ses morphismes sont les morphismes de groupes de la forme :*

$$\begin{aligned} c_{[P_1 \xrightarrow{g} P_2]} : P_1 &\longrightarrow P_2 \\ x &\longmapsto gxg^{-1} \end{aligned}$$

pour $g \in G$. Nommément, il s'agit de la conjugaison *par g qui est une injection d'image gP_1g^{-1}.*

Soit alors H un sous-groupe d'un groupe G et $g \in G$. Nous allons voir comment c_g passe à l'homologie. On remarque tout d'abord que pour tout $\mathbb{Z}G$-module A, l'application qui provient de c_g est :

$$\begin{aligned} \mu_g : \quad A &\longrightarrow A \\ a &\longmapsto g.a, \end{aligned}$$

elle permet de passer de la structure de H-module sur A à celle de gHg^{-1}-module :

$$\begin{aligned} \forall h \in H, \forall a \in A, \, \mu_g(h.a) &= g.(h.a) \\ &= (gh).a \\ &= (ghg^{-1}g).a \\ &= c_g(h).\mu_g(a) \end{aligned}$$

Soit alors C_* une résolution $\mathbb{Z}[G]$-projective de $\mathbb{Z}$. Par abus de notation, C_* est aussi une résolution $\mathbb{Z}[K]$-projective pour tout sous-groupe K de G. Soit encore $\mathcal{L}$ un système de cœfficients sur gHg^{-1}. Pour tout i entier, c_g induit :

$$\begin{aligned} c_{g,i} : C_i \times \mathcal{L} &\longrightarrow C_i \otimes_{\mathbb{Z}[gHg^{-1}]} \mathcal{L} \\ (a, b) &\longmapsto g.a \otimes g.b. \end{aligned}$$

Soit encore, puisque l'action de G sur C_* est à gauche : $c_{g,i}(a, b) = ag^{-1} \otimes gb$. On vérifie alors que cette application est $\mathbb{Z}[H]$-bilinéaire :

$$\begin{aligned} c_{g,i}(a, hb) &= ag^{-1} \otimes ghb \\ &= ag^{-1} \otimes (ghg^{-1})gb \\ &= ag^{-1}(ghg^{-1}) \otimes gb \\ &= ahg^{-1} \otimes gb \\ &= c_{g,i}(ah, b). \end{aligned}$$

Pour passer au quotient il reste à vérifier que le carré suivant est commutatif :

$$\begin{tikzcd} C_{i+1} \otimes_{\mathbb{Z}[H]} \mathcal{L} \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & C_{i+1} \otimes_{\mathbb{Z}[gHg^{-1}]} \mathcal{L} \arrow[d] \\ C_i \otimes_{\mathbb{Z}[H]} \mathcal{L} \arrow[r] & C_i \otimes_{\mathbb{Z}[gHg^{-1}]} \mathcal{L}. \end{tikzcd}$$

On peut alors poser :

Définition 4. *Soit G un groupe, H un sous-groupe et g un élément de G. Alors, pour tout système de cœfficients $\mathcal{L}$, g et la conjugaison associée $c_{[H\to gHg^{-1}]}$ induisent une application en homologie :*

$$\mathcal{C}_g : H_*(H;\mathcal{L}) \longrightarrow H_*(gHg^{-1};\mathcal{L}).$$

Le passage à l'homologie est achevé et on peut maintenant définir pour tout nombre premier p, pour tout groupe G et tout système de cœfficients $\mathcal{L}$ un *foncteur* qui relie cette catégorie à l'homologie des p-sous-groupes :

$$\begin{aligned} F_p : Q_p(G) &\longrightarrow \mathcal{A}b \\ P &\longmapsto H_*(P;\mathcal{L}). \end{aligned}$$

A un p-sous-groupe de G correspond son homologie et à la conjugaison c_g correspond $\mathcal{C}_g$.

3.4 Les applications restriction et transfert, les éléments stables

Nous allons définir deux autres applications en homologie. L'application qui sert de point de départ ici est l'inclusion d'un sous-groupe H dans un groupe G. Je rappelle que G est supposé fini, on peut donc parler de sous-groupes de Sylow et l'indice de H dans G est fini.

Soit alors comme précédemment C_* une résolution $\mathbb{Z}[G]$-projective de $\mathbb{Z}$. Soit aussi $\mathcal{L}$ un système de cœfficients sur G (et donc sur H par abus de notation). Soit encore $\mathcal{G}$ un système de représentants de G/H : $G = \coprod_{g\in\mathcal{G}} gH$. Pour tout i entier, on considère les applications :

$$\begin{aligned} res_i : C_i \times \mathcal{L} &\longrightarrow C_i \otimes_{\mathbb{Z}[G]} \mathcal{L} \\ (a,b) &\longmapsto a \otimes b \end{aligned} \quad \text{et} \quad \begin{aligned} \mathrm{tr}_i : C_i \times \mathcal{L} &\longrightarrow C_i \otimes_{\mathbb{Z}[H]} \mathcal{L} \\ (a,b) &\longmapsto \sum_{g\in\mathcal{G}} ag \otimes g^{-1}b \end{aligned}$$

Après des vérifications similaires à celles qui mènent à la définition de $\mathcal{C}_g$, on obtient des applications en homologie :

Définition 5. *Soient G un groupe, H un sous-groupe, $\mathcal{L}$ un système de cœfficients sur G. On définit les applications* restriction *et* transfert *par passage en homologie des applications précédentes :*

$$\mathrm{res}_{[H\to G]} : H_*(H;\mathcal{L}) \longrightarrow H_*(G;\mathcal{L})$$

$$\mathrm{tr}_{[G\to H]} : H_*(G;\mathcal{L}) \longrightarrow H_*(H;\mathcal{L})$$

Enfin, j'ai besoin de définir un certain type d'éléments de l'homologie défini par ces applications :

Définition 6. *Soit H un sous-groupe de G. Un élément $a \in H_*(H;\mathcal{L})$ est dit* stable *si*

$$\forall g \in G,\ \mathrm{tr}_{[H\to H\cap gHg^{-1}]}(a) = \mathrm{tr}_{[gHg^{-1}\to H\cap gHg^{-1}]} \circ \mathcal{C}_g(a)$$

i.e. a fait commuter le diagramme suivant :

$$\begin{tikzcd} H_*(H;\mathcal{L}) \arrow[r, "\mathcal{C}_g"] \arrow[dr, "\mathrm{tr}"] & H_*(gHg^{-1};\mathcal{L}) \arrow[d, "\mathrm{tr}"] \\ & H_*(H\cap gHg^{-1};\mathcal{L}). \end{tikzcd}$$

On note $H_*(H;\mathcal{L})_s$ l'ensemble des éléments stables de $H_*(H;\mathcal{L})$. Evidemment, pour $H = G$, $H_*(G;\mathcal{L})_s = H_*(G;\mathcal{L})$.

Je regroupe dans la proposition suivante les calculs utiles pour la suite :

Proposition 7. *Soit la chaîne de sous-groupes : $K \subseteq H \subseteq G$. Alors*

1. $\mathrm{res}_{[H\to G]} \circ \mathrm{res}_{[K\to H]} = \mathrm{res}_{[K\to G]}$
2. $\mathrm{tr}_{[H\to K]} \circ \mathrm{tr}_{[G\to H]} = \mathrm{tr}_{[G\to K]}$
3. $\mathrm{res}_{[H\to G]} \circ \mathrm{tr}_{[G\to H]}$ *est la multiplication par $[G : H]$, l'indice de H dans G.*
4. $\forall a \in H_*(H;\mathcal{L})_s$, $\mathrm{tr}_{[G\to H]} \circ \mathrm{res}_{[H\to G]}(a) = [G : H]a$
5. $\forall g \in G$, $\mathcal{C}_g \circ \mathrm{tr}_{[H\to K]} = \mathrm{tr}_{[gHg^{-1}\to gKg^{-1}]} \circ \mathcal{C}_g$

Pour obtenir ces résultats, il faut reprendre les définitions de la restriction et du transfert à partir des applications $C_i \times \mathcal{L} \to C_i \times \mathcal{L}$.

3.5 Applications

Les groupes considérés sont supposés finis. Cela permet de parler de restriction, de transfert mais aussi d'indices et de sous-groupes de Sylow. On peut alors démontrer le résultat suivant :

Proposition 8. *Soit H un sous-groupe d'un groupe (fini) G. Alors l'image de $\mathrm{tr}_{[G\to H]}$ est incluse dans $H_*(H;\mathcal{L})_s$.*

Preuve. Soit $b \in H_*(G;\mathcal{L})$, et $a = \mathrm{tr}_{[G\to H]}(b)$. Pour $g \in G$:

$$\mathcal{C}_g(a) = \mathcal{C}_g \circ \mathrm{tr}_{[G\to H]}(b) = \mathrm{tr}_{[G\to gHg^{-1}]} \circ \mathcal{C}_g(b) = \mathrm{tr}_{[G\to gHg^{-1}]}(b)$$

D'où :

$$\begin{aligned} \mathrm{tr}_{[gHg^{-1}\to H\cap gHg^{-1}]} \circ \mathcal{C}_g(a) &= \mathrm{tr}_{[G\to H\cap gHg^{-1}]}(b) \\ &= \mathrm{tr}_{[H\to H\cap gHg^{-1}]} \circ \mathrm{tr}_{[G\to H]}(b) \\ &= \mathrm{tr}_{[H\to H\cap gHg^{-1}]}(a) \end{aligned}$$

Et a est effectivement stable. □

Théorème 9. *Soient p un nombre premier et S un p-sous-groupe de Sylow d'un groupe G. Alors le transfert induit une bijection :*

$$\mathrm{tr}_{[G\to S]} : H_*(G;\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}) \xrightarrow{\cong} H_*(S;\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})_s$$

Preuve. On note p^α l'ordre de S et q son indice dans G. Par hypothèse, les deux sont premiers entre eux et on a donc l tel que $ql \equiv 1 \mod p^\alpha$. Autrement dit, q est inversible dans $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$. On en déduit que le $\mathrm{tr}_{[G\to S]}$ est injectif car $\mathrm{res}_{[S\to G]} \circ \mathrm{tr}_{[G\to S]}$ est la multiplication par q qui est bijective.

La proposition 8 assure que le transfert est bien à valeurs dans $H_*(S;\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})_s$. Il reste à voir la surjectivité or si $a \in H_*(S;\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})_s$:

$$\mathrm{tr}_{[G\to S]}(l\mathrm{res}_{[S\to G]}(a)) = l(qa) = a$$

□

En reprenant le foncteur F_p défini à la fin du paragraphe 3.3 sur la catégorie de fusion, on obtient comme corollaire important le fait que $H_*(G;\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})$ peut-être obtenue à partir de celles de ses p-sous-groupes :

Théorème 10. *Si G est un groupe fini, le transfert induit un isomorphisme :*

$$\tilde{\mathrm{tr}} : H_*(G;\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}) \xrightarrow{\cong} \lim_{\leftarrow} F_p$$

En effet, par définition, la limite indirecte permet de compléter le diagramme suivant de façon commutative pour tout X :

$$\begin{tikzcd}
\lim\limits_{\leftarrow} F_p \arrow[dr] \arrow[ddr] & & X \arrow[ll] \arrow[dl] \arrow[ddl] \\
& H_*(H;\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}) \arrow[d, "c_g"'] & \\
& H_*(gHg^{-1};\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}) &
\end{tikzcd}$$

4 "Algèbre topologique"

La transposition des problèmes algébriques en topologie peut sembler moins pertinente. Elle est pourtant incontournable ici.

4.1 Espaces classifiants et espaces d'applications

Pour un groupe G (discret fini), on définit de façon non ambigüe son *espace classifiant* noté BG à partir de ses groupes d'homotopie : tous triviaux sauf celui d'indice 1 égal à G. Le revêtement universel (noté EG) d'un tel espace est contractile.

Etant donné le problème présent, il est important d'étudier les espaces d'applications pointées $Map_*(BG,BH)$ ou non $Map(BG,BH)$ entre espaces classifiants :

Théorème 11. *Soient G et H deux groupes (finis et discrets). Alors :*

$$\pi_n(\mathrm{Map}_*(BG,BH)) \cong \begin{cases} \mathrm{Hom}(G,H) & si\ n=0 \\ 0 & sinon \end{cases}$$

$$\pi_n(\mathrm{Map}(BG,BH)) \cong \begin{cases} \mathrm{Rep}(G,H) & si\ n=0 \\ finis & si\ n=1 \\ 0 & si\ n>1 \end{cases}$$

où $\mathrm{Rep}(G,H)$ *désigne l'ensemble des morphismes de groupes à conjugaison près.*

Cette proposition affirme notamment que $\mathrm{Map}(BG,BH)$ a le type d'homotopie d'une *union disjointe finie d'espaces classifiants de groupes finis* et on peut donc lui appliquer des résultats obtenus pour ces derniers.

4.2 Un exemple simple de modification d'espace

Etant donné un espace, on peut vouloir en modifier certaines caractéristiques pour n'en garder que les informations pertinentes pour le problème posé et le manipuler plus simplement. Je donne ici un exemple où une telle construction peut être faite explicitement :

Proposition 12. *Soit (X, x) un espace pointé connexe par arcs. Soit A un sous-groupe de $\pi_1(X, x)$ et $\tilde{A}$ sa fermeture normale. Pour tout $\alpha \in A$, on choisit un représentant e_α et on note X_1 l'espace X auquel on a ajouté des 2-cellules e^2_α rattachées le long de chaque α : $X_1 = X \cup \bigcup_{\alpha \in A} e^2_\alpha$.*

Avec i l'inclusion de X dans X_1, on a une suite exacte :

$$0 \longrightarrow \tilde{A} \longrightarrow \pi_1(X, x) \xrightarrow{i_*} \pi_1(X_1, x) \longrightarrow 0.$$

4.3 La p-construction plus

Par des manipulations similaires (d'ajout de cellules), on obtient le résultat suivant, pivot pour le problème posé :

Définition 13. *Soit (X, x) un espace pointé connexe dont le groupe fondamental est fini et l'homologie rationnelle du revêtement universel triviale. Soit encore p un nombre premier, N le sous-groupe distingué p-parfait (i.e. $H_1(N; \mathbb{Z}/p\mathbb{Z})$ est trivial) maximal de $\pi_1(X, x)$.*

Alors il existe un espace pointé (X^+_p, x^+_p) appelé p-construction plus *de (X, x) et une fonction continue $f : (X, x) \to (X^+_p, x^+_p)$ tels que :*

1. *On a une suite exacte :*

$$0 \to N \to \pi_1(X, x) \to \pi_1(X^+_p, x^+_p) \to 0$$

2. *Pour tout système de p-cœfficients $\mathcal{L}$ sur X^+_p, f induit un isomorphisme en homologie :*

$$f_* : H_*(X, f^*\mathcal{L}) \xrightarrow{\cong} H_*(X^+_p, \mathcal{L})$$

3. *On a encore $H_*(\tilde{X^+_p}; \mathbb{Q})$ triviale.*
4. *Pour tout q premier à p, $H_*(\tilde{X}^+_p; \mathbb{Z}_q)$ est triviale aussi.*

Pourquoi ce nom ? Cette construction est en réalité une version simplifiée de la p-complétion. Le cheminement est ici directement inspiré de la *construction plus* qui est son analogue (plus classique et plus simple) dans le cas de $\mathbb{Z}$ (au lieu de $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ ici).

Quel est le rôle de cette construction ? Elle s'applique aux espaces classifiants de tout groupe fini discret : à partir de G et H, on obtient des espaces BG^+_p et BH^+_p tels que de plus les morphismes d'un groupe à l'autre induisent des applications entre ces espaces associés tout en conservant certaines propriétés d'homologie (l'équivalence entre les deux premiers points du théorème 16).

Enfin, on est amené à étudier le rapport entre la p-construction plus introduite ici et les espaces d'applications entre espaces classifiants (c'est ce qui permettra l'implication entre le deuxième et le troisième points de ce même théorème 16) :

Théorème 14. *Soit π un p-groupe fini et G un groupe fini. La p-construction plus de* $\mathrm{Map}(B\pi, BG)$ *est alors donnée par la fonction naturelle :*

$$\mathrm{Map}(B\pi, BG) \longrightarrow \mathrm{Map}(B\pi, BG_p^+)$$

Pour démontrer ce théorème, je signale qu'il faut faire appel à d'autres outils qu'il serait trop longs de détailler ici : les *espaces homotopiques* qui se combinent judicieusement avec la p-construction plus.

Je procède alors par récurrence (comme dans l'article de Broto et Levi en 2002 où la première démonstration est écrite) mais je suis obligé d"admettre le cas où $\pi = \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ (la partie la plus compliquée, due à Lannes). En réalité, seule une version faible est utilisée ici et j'avais bon espoir de démontrer celle-ci complètement mais pour l'instant je n'y suis pas parvenu :

Corollaire 15. *Soit π un p-groupe fini et G un groupe fini. Alors la fonction naturelle*

$$\mathrm{Map}(B\pi, BG) \longrightarrow \mathrm{Map}(B\pi, BG_p^+)$$

induit une bijection entre les composantes connexes des deux espaces.

5 Résultats

La caractérisation voulue des morphismes induisant des isomorphismes est alors contenue dans le théorème suivant dû à Mislin :

Théorème 16. *Soient p un nombre premier et $\rho : G \to H$ un morphisme de groupes finis. Il y a équivalence entre :*

1. $H_*(\rho;\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}) : H_*(G;\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}) \to H_*(H;\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})$ *est un isomorphisme.*
2. $B\rho_p^+ : BG_p^+ \to BH_p^+$ *est une équivalence d'homotopie.*
3. *Pour tout p-groupe π,* $\mathrm{Rep}(\pi,\rho) : \mathrm{Rep}(\pi, G) \to \mathrm{Rep}(\pi, H)$ *est une bijection.*
4. $Q_p(\rho) : Q_p(G) \to Q_p(H)$ *est une équivalence de catégories.*

Preuve. La démonstration se fait en enchaînant circulairement les implications.

$1 \Rightarrow 2$: C'est une des raisons d'être de cette construction. Pour aboutir à ce résultat, j'utilise de nombreux lemmes sur les *fibrations* obtenus à partir d'un outil dont la puissance n'est plus à démontrer : *les suites spectrales.* Malheureusement, il aurait été démesuré d'en faire une introduction ici mais il était toutefois nécessaire de les citer.

$2 \Rightarrow 3$: On suppose donc 2. et on choisit π un p-groupe. On a des bijections naturelles en chaînes qui mènent à $\mathrm{Rep}(\pi, \rho)$:

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Rep}(\pi, G) \arrow[r] \arrow[dr] & \pi_0(\mathrm{Map}(B\pi, BG)) \arrow[d] & \text{d'après le théorème 11} \\
& \pi_0(\mathrm{Map}(B\pi, BG_p^+)) \arrow[d] & \text{d'après le théorème 14} \\
& \pi_0(\mathrm{Map}(B\pi, BH_p^+)) & \text{car on suppose 2.} \\
& \mathrm{Rep}(\pi, H) \arrow[u] & \text{même parcours pour } H
\end{tikzcd}$$

$3 \Rightarrow 4$: Il y a une liste de vérifications simples à faire.
$4 \Rightarrow 1$: C'est le théorème 10.

□

On peut citer un résultat antérieur partiel qui se redémontre désormais sans difficulté :

Théorème 17 (de Jackowski). *Soient p un nombre premier et $\rho : G \to H$ un morphisme de groupes finis qui induit un isomorphisme en homologie à cœfficients dans $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$. Alors :*

1. $\ker(\rho)$ *est d'ordre premier à p.*
2. $\mathrm{Im}(\rho)$ *est d'indice premier à p dans H.*

Comme corollaire, on obtient le cas de l'homologie entière. Le résultat qui suit semble très simple, c'est un analogue algébrique du théorème de Whitehead en topologie.

Théorème 18. *Soit $\rho : G \to H$ un morphisme de groupes finis. Alors ρ induit un isomorphisme en homologie à cœfficients entiers si et seulement si ρ est un isomorphisme de groupes.*

Preuve. Le théorème 17 de Jackowski suffit ici : si ρ induit un isomorphisme en homologie à cœfficients entiers, ρ induit des isomophismes en homologie modulo p pour tout p ; l'ordre du noyau et l'indice de l'image sont donc premiers à tout nombre premier. La réciproque est évidente. □

6 Conclusions

Tout d'abord, il me semble important de souligner à nouveau les détours qui ont été nécessaires. Partant d'une question proprement algébrique, il a fallu transporter le problème en topologie et utiliser de nombreux outils modernes : l'homologie et les applications de restriction et transfert, les espaces classifiants et la p-construction plus mais aussi, implicitement, les espaces homotopiques, les fibrations et les suites spectrales. C'est cette démarche qui me semble particulièrement intéressante car elle démontre l'importance d'un décloisonement des différentes disciplines mathématiques usuelles par la nécessité et la puissance de leur collaboration.

Plus anecdotiquement, il est amusant de remarquer que le résultat dans le cas de $\mathbb{Z}$, très simple, n'a pu être obtenu que grâce au cas de $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ qui semble bien plus compliqué. Une démarche directe (à partir de la construction plus par exemple) ne fournit aucun résultat.

Les objectifs fixés ont été atteints :

- Les morphismes de groupes induisant des isomorphismes en homologie entière sont les isomorphismes de groupes. Si l'homologie a pour raison d'être de contenir des informations sur le groupe, l'objectif est entièrement atteint du moins vis-à-vis des isomorphismes possibles. Il ne faut évidemment pas croire que cette information est complète. Notamment, je n'ai nullement dit ici que deux groupes ayant des homologies entières isomorphes sont isomorphes : c'est le cas si l'isomorphisme entre les homologies est induit par un morphisme de groupes.

– Les morphismes de groupes induisant des isomorphismes en homologie à cœfficients dans $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ sont les morphismes induisant une équivalence de catégorie entre les catégories constituées par les p-sous-groupes à conjugaison près. Notamment, si un morphisme de groupes induit un isomorphisme en homologie modulo p, les deux groupes ont nécessairement les mêmes sous-groupes de Sylow.

Cependant, ces résultats sont valables dans un cadre plus général que celui des groupes finis discrets : pour tout groupe de Lie compact. La p-construction plus introduite ici, si elle est simple, ne permet pas d'atteindre cette généralité. Pour démontrer ces résultats, il faut se résoudre à utiliser la p-complétion de Bousfield et Kan.

Références

[1] A. K. BOUSFIELD et D. M. KAN, *Homotopy limits, completions and localizations.* Lecture Notes in Mathematics 304 (1972)

[2] Guido MISLIN, *On group homomorphisms inducing mod-p cohomology isomorphisms.* Commentarii Mathematici Helvetici 65 (1990) p.454–461

[3] Stefan JACKOWSKI, *Group homomorphisms inducing isomorphisms of cohomology.* Topology 17 (1978) p. 303–307

[4] Henri CARTAN et Samuel EILENBERG, *Homological Algebra.* Princeton University Press (1956)

[5] Charles A. WEIBEL, *An Introduction To Homological Algebra.* Cambridge University Press (1995)

[6] Carles BROTO et Ran LEVI, *On spaces of self-homotopy equivalences of p-completed classifying spaces of finite groups and homotopy group extensions.* Topology 41 (2002) p. 229–255

[7] Jean-Louis LODAY, *K-théorie algébrique et représentations de groupes.* Strasbourg Université Louis Pasteur, Institut de Recherche Mathématique Avancée (1975)

[8] Vasudevan SRINIVAS, *Algebraic K-theory.* Boston MA Basel Berlin Birkhäuser (1991)

[9] Dale HUSEMOLLER, *Fibre bundles.* Springer-Verlag Graduate texts in mathematics 20 (1966)

[10] W. DWYER et Alexander ZABRODSKY, *Maps Between Classifying Spaces.* Lecture Notes in Mathematics 1298, Springer-Verlag (1988) p.106–119

[11] Ran LEVI, *On Finite Groups and Homotopy Theory.* Memoirs of the American Mathematical Society 567 (Nov 1995)