# Mémoire de 1ère année - Modèle de mutation-sélection de Kingman

O. Collin, E. Khalfallah, H.Q. Tran

Juin 2018

## Introduction

Les modèles usuels de théorie de l'évolution mettent en jeu principalement deux phénomènes : la sélection et la mutation. La sélection repose sur l'hérédité : les individus les plus aptes à la reproduction engendrent un plus grand nombre de descendants, auxquels ils transmettent leur génotype (donc, en particulier, leur aptitude à la reproduction). La proportion de ces génotypes s'accroît donc dans la population. Par ailleurs, des mutations du génome se produisent lors de la transmission des caractères génotypiques : elles entravent l'hérédité en produisant des individus aux caractères nouveaux. Dans la plupart des modèles, on suppose que les caractères d'un individu muté dépendent de ceux de son ou ses parent(s), et en sont proches.

Nous étudions dans ce mémoire le modèle proposé par J.F.C. Kingman dans [1]. Dans ce modèle, les individus ne sont décrits que par un unique caractère : leur aptitude à la reproduction, appelée la "fitness". Ici, la fitness est un réel positif proportionnel au nombre d'enfants de l'individu considéré (la population étudiée étant supposée suffisamment grande pour qu'il s'agisse exactement du nombre effectif d'enfants). De plus, tous les individus possèdent la même probabilité de muter, et cette mutation s'effectue selon une même loi de probabilité. Enfin, chaque individu possède exactement un parent, et au passage de la génération $n$ à la génération $n+1$, tous les individus de la génération $n$ disparaissent en donnant naissance à leurs enfants.

# Table des matières

# 1 Modélisation du problème

Nous décrivons l'évolution d'une population biologique par la donnée d'une suite $(p_n)_{n\geq 0}$ de distributions de probabilité correspondant aux distributions de fitness à chaque génération. La viabilité moyenne de la population à la génération $n$ est $w_n = \int_0^\infty x p_n(\mathrm{d}x)$, c'est-à-dire l'espérance de la fitness par rapport à $p_n$. À chaque génération, une fraction $\beta$ de la population est constituée d'individus mutants, dont les fitness sont distribuées selon le profil $q$, et une fraction $1-\beta$ de la population reflète la distribution de fitness de la génération précédente, après action de la sélection : les individus de fitness $x$ ont un nombre de descendants dans cette fraction de la population proportionnel à $x$. Dans notre modèle, la suite $(p_n)_{n\geq 0}$ vérifie donc la relation de récurrence :

$$p_{n+1}(\mathrm{d}x) = (1-\beta)\frac{x p_n(\mathrm{d}x)}{w_n} + \beta q(\mathrm{d}x),$$

où $q$ est une distribution de probabilité, et $\beta$ un réel dans $]0,1[$.

Remarquons que pour tout $n \geq 1$, le support de $p_n$ est inclus dans la réunion des supports de $p_0$ et de $q$. Nous faisons l'hypothèse que ces supports sont inclus dans $[0,+\infty[$, la fitness étant positive.

Le but de ce mémoire est d'étudier l'évolution et la limite de la distribution de fitness $p_n$ en fonction des choix de $q$, $\beta$ et $p_0$.

# 2 Normalisation des distributions de fitness

Remarquons que le problème étudié est invariant par renormalisation des distributions étudiées. Plus précisement, soit $\lambda$ un réel strictement positif ; pour toute mesure de probabilité $\mu$ sur $\mathbf{R}$, notons $\lambda_*\mu$ la mesure image de $\mu$ par l'application $x \mapsto \lambda x$, qui est encore une mesure de probabilité. Soient $\tilde{p}_0 = \lambda_* p_0$, $\tilde{q} = \lambda_* q$, et $(\tilde{p}_n)_{n\geq 1}$ la suite définie à partir de $\tilde{p}_0$ et $\tilde{q}$ par la relation de récurrence :

$$\tilde{p}_{n+1}(\mathrm{d}x) = (1-\beta)\frac{x\tilde{p}_n(\mathrm{d}x)}{\tilde{w}_n} + \beta\tilde{q}(\mathrm{d}x), \text{où } \tilde{w}_n = \int_0^\infty x\tilde{p}_n(\mathrm{d}x).$$

Alors, une récurrence montre que pour tout $n \geq 0$, $\tilde{p}_n = \lambda_* p_n$.

Nous supposerons que les distributions de fitness sont à support borné. Avec ce qui précède, il est alors possible d'imposer :

$$\max(\mathrm{supp}(p_0) \cup \mathrm{supp}(q)) = 1.$$

Cette égalité sera supposée vérifiée dans la suite. Les supports de $p_0$ et de $q$, ainsi que ceux des $p_n$, sont donc inclus dans $I = [0,1]$.

# 3 Convergences de mesures

Soit $X$ un espace métrique compact, et $\mathcal{B}$ la tribu de Borel sur $X$. Notons $\mathcal{C}(X,\mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions continues de $X$ dans $\mathbb{R}$, $M(X)$ l' ensemble des mesures de probabilité sur $(X,\mathcal{B})$.

## 3.1 Convergence faible

**Définition 1.** *Soit $(\mu_n)$ une suite dans $M(X)$ et $\mu \in M(X)$. La suite $(\mu_n)$* ***converge faiblement*** *vers $\mu$ si pour tout $f \in \mathcal{C}(X,\mathbb{R})$, $\int_X f \mathrm{d}\mu_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \int_X f \mathrm{d}\mu$.*
*Cette notion de convergence définit une topologie sur $M(X)$, appelée* ***topologie faible****.*

Rappelons un résultat important, démontré, par exemple, dans [2] :

**Lemme 1.** *Si $X$ est un espace métrique compact, $M(X)$ muni de la topologie faible est un espace topologique compact.*

## 3.2 Convergence en variation totale

Une autre topologie sur $M(X)$ est définie par la distance variation totale :

**Définition 2.** *Soient $\mu,\nu$ deux mesures de probabilité sur $(X,\mathcal{B})$, la distance variation totale entre $\mu$ et $\nu$ est*

$$||\mu-\nu||_{VT} = \sup_f \left\{ \int f \mathrm{d}\mu - \int f \mathrm{d}\nu \right\},$$

*où $f$ parcourt l'ensemble des fonctions mesurables de $X$ dans $[-1,1]$.*
*Si la suite $(\mu_n)$ converge vers $\mu$ pour la distance variation totale, nous disons que $(\mu_n)$* ***converge fortement*** *vers $\mu$.*

**Cas usuel.** Dans le cas où $\mu_1$ et $\mu_2$ sont des mesures de probabilité sur $(X,\mathcal{B})$, absolument continues par rapport à $\nu$, une troisième mesure de probabilité sur $(X,\mathcal{B})$, alors

$$||\mu_1-\mu_2||_{VT} = \int |f_1-f_2|\nu(\mathrm{d}x),$$

où $f_1$ (resp. $f_2$) est la dérivée de Radon-Nikodym de $\mu_1$ (resp. $\mu_2$) par rapport à $\nu$.

**Lemme 2.** *La convergence forte implique la convergence faible.*

*Démonstration.* Soit $(\mu_n)$ une suite de mesures convergeant fortement vers $\mu$, et soit $f \in \mathcal{C}(X,\mathbb{R})$.
Comme $X$ est compact, $f$ est bornée. Quitte à multiplier par une constante, nous pouvons supposer que l'image de $f$ est contenue dans $[-1,1]$. Donc :

$$\left| \int f \mathrm{d}\mu_n - \int f \mathrm{d}\mu \right| \leq ||\mu_n-\mu||_{VT} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.$$

Ainsi, $(\mu_n)$ converge faiblement vers $\mu$. □

# 4 Résultats préliminaires

## 4.1 Expression explicite de $p_n$

Exprimons dans un premier temps $p_n$ en fonction de $p_0$, $q$, $\beta$ et des $w_n$. Pour simplifier, notons $W_n = w_0 w_1 \dots w_{n-1}$. Nous pouvons alors montrer par récurrence que pour $n \geq 1$ :

$$W_n p_n(\mathrm{d}x) = \sum_{r=0}^{n-1} W_{n-r}(1-\beta)^r \beta x^r q(\mathrm{d}x) + (1-\beta)^n x^n p_0(\mathrm{d}x). \qquad (1)$$

Pour obtenir une expression explicite de $p_n$ à partir de cette formule, c'est-à-dire une expression de $p_n$ ne dépendant que de $p_0$, $q$ et $\beta$, nous allons exprimer $W_n$ en fonction de ces trois mêmes paramètres. Dans ce but, notons

$$\mu_n = \int_0^1 x^n \, q(\mathrm{d}x), \quad m_n = \int_0^1 x^n \, p_0(\mathrm{d}x)$$

les $n^{\text{ièmes}}$ moments de $q$ et $p_0$ respectivement, et intégrons la relation précédente. Nous obtenons :

$$W_n = \sum_{r=0}^{n-1} W_{n-r}(1-\beta)^r \beta \mu_r + (1-\beta)^n m_n,$$

ou, de façon équivalente,

$$W_n = \sum_{r=1}^{n-1} W_{n-r}(1-\beta)^{r-1} \beta \mu_r + (1-\beta)^{n-1} m_n. \qquad (2)$$

Nous disposons ainsi d'une relation de récurrence sur $W_n$. Or notre objectif était d'obtenir une expression explicite de $W_n$. Nous allons pour ce faire étudier la série entière de coefficients $W_n$.

## 4.2 Série génératrice des $W_n$

Le résultat suivant en donne une expression explicite. Pour tout $z \in D(0,1)$,

$$\sum_{n=1}^{+\infty} W_n z^n = \sum_{n=1}^{+\infty} (1-\beta)^{n-1} m_n z^n \left(1 - \sum_{n=1}^{+\infty} (1-\beta)^{n-1} \beta \mu_n z^n \right)^{-1}. \qquad (3)$$

*Démonstration.* Comme $w_n \leq 1$, nous avons $W_n \leq 1$ donc la série entière est bien définie et son rayon de convergence vaut au moins 1. D'après (2), pour tout $z \in D(0,1)$,

$$\sum_{n=1}^{+\infty} W_n z^n = \sum_{n=1}^{+\infty} (1-\beta)^{n-1} m_n z^n + \frac{\beta}{1-\beta} \sum_{n=1}^{+\infty} \sum_{r=1}^{n-1} W_{n-r} z^{n-r} \left[(1-\beta) z\right]^r \mu_r.$$

Donc, par produit de Cauchy,

$$\sum_{n=1}^{+\infty} W_n z^n = \sum_{n=1}^{+\infty} (1-\beta)^{n-1} m_n z^n + \frac{\beta}{1-\beta} \left( \sum_{n=1}^{+\infty} W_n z^n \right) \left( \sum_{n=1}^{+\infty} (1-\beta)^n \mu_n z^n \right),$$

d'où

$$\sum_{n=1}^{+\infty} W_n z^n \left( 1 - \sum_{n=1}^{+\infty} \beta (1-\beta)^{n-1} \mu_n z^n \right) = \sum_{n=1}^{+\infty} (1-\beta)^{n-1} m_n z^n.$$

Le résultat en découle. □

Notons $D$ le disque de centre 0 et de rayon $(1-\beta)^{-1}$. Le membre de droite de (3) est le quotient de deux fonctions holomorphes sur $D$ (les moments sont majorés par 1), avec un dénominateur non identiquement nul, donc $\sum_{n=1}^{+\infty} W_n z^n$ est prolongeable en une fonction méromorphe sur $D$, que nous noterons dorénavant $g$. L'étude des pôles de cette fonction va nous donner des informations cruciales sur l'évolution asymptotique de $W_n$.

## 4.3 Pôles de $g$, prolongement méromorphe de $\sum_{n \geq 1} W_n z^n$

Réécrivons d'abord (3) en y explicitant $m_n$ et $\mu_n$ :

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{+\infty} W_n z^n = & \int_0^1 (1-\beta)^{-1} \sum_{n=1}^{+\infty} \left[ (1-\beta) x z \right]^n \, p_0(\mathrm{d}x) \\ & \left( 1 - \int_0^1 (1-\beta)^{-1} \sum_{n=1}^{+\infty} \beta \left[ (1-\beta) x z \right]^n q(\mathrm{d}x) \right)^{-1}, \end{aligned}$$

ce qui donne :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} W_n z^n = \int_0^1 \frac{zx}{1-(1-\beta)zx} \, p_0(\mathrm{d}x) \left( 1 - \int_0^1 \frac{\beta z x}{1-(1-\beta)zx} \, q(\mathrm{d}x) \right)^{-1}. \quad (4)$$

Les pôles de $g$ sont donc les $z \in D$ qui vérifient :

$$\int_0^1 \frac{\beta z x}{1-(1-\beta)zx} \, q(\mathrm{d}x) = 1. \quad (5)$$

**Lemme 3.** *Si*

$$\int_0^1 \frac{q(\mathrm{d}x)}{1-x} > \beta^{-1}, \quad (6)$$

*alors $g$ a exactement un pôle simple dans $D$, qui de plus est dans $[1, (1-\beta)^{-1}[$. Sinon, $g$ n'a pas de pôle dans $D$.*

*Démonstration.* Soit $z \in D$ vérifiant (5). En passant à la partie imaginaire :

$$\beta \int_0^1 \mathrm{Im}\left(\frac{zx(1-(1-\beta)\overline{z}x)}{|1-(1-\beta)zx|^2}\right) q(\mathrm{d}x) = 0,$$

d'où

$$\beta \mathrm{Im}(z) \int_0^1 \frac{x}{|1-(1-\beta)zx|^2}\, q(\mathrm{d}x) = 0.$$

- Si $\int_0^1 \frac{x}{|1-(1-\beta)zx|^2}\, q(\mathrm{d}x) = 0$, alors $q$ est un dirac en 0. En particulier, (6) est faux, et (5) n'est vérifié pour aucun $z$, ce qui montre le lemme dans ce cas.
- Sinon, comme $\beta > 0$, $z$ est dans $\mathbb{R} \cap D$.

Remarquons alors que, pour tout $x \in ]0,1]$,

$$z \in \mathbb{R} \cap D \mapsto \frac{\beta z x}{1-(1-\beta)zx}$$

est strictement croissante, donc comme $q$ n'est pas un dirac en 0,

$$f : z \in \mathbb{R} \cap D \mapsto \int_0^1 \frac{\beta z x}{1-(1-\beta)zx} q(\mathrm{d}x)$$

est également strictement croissante. Ainsi, l'équation (5) a au plus une solution. De plus, comme $f(1) \leq 1$, cette potentielle solution est dans $[1, (1-\beta)^{-1}[$. Enfin, par le théorème des valeurs intermédiaires, la solution existe si et seulement si $\lim_{z \to (1-\beta)^{-1}} f(z) > 1$, c'est-à-dire :

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \frac{\beta x}{(1-\beta)(1-x)} q(\mathrm{d}x) > 1 \quad &\Leftrightarrow \quad \int_0^1 \frac{\beta x - (1-\beta)(1-x)}{(1-\beta)(1-x)} q(\mathrm{d}x) > 0 \\
&\Leftrightarrow \quad \int_0^1 \frac{\beta - (1-x)}{(1-\beta)(1-x)} q(\mathrm{d}x) > 0 \\
&\Leftrightarrow \quad \frac{\beta}{1-\beta} \int_0^1 \frac{q(\mathrm{d}x)}{1-x} > \frac{1}{1-\beta},
\end{aligned}$$

qui équivaut à (6).
Il reste à voir que, lorsque (6) est vérifiée, l'unique zéro, noté $z_0$ est simple. Or cela découle du fait que

$$f'(z_0) = \int_0^1 \frac{\beta z_0 x^2}{(1-(1-\beta)z_0 x)^2} q(\mathrm{d}x) > 0$$

(l'inégalité est stricte car q n'est pas un dirac en 0). □

Nous allons étudier séparément les deux cas distingués par le lemme 3.

## 5 Démocratie

Nous nous intéressons dans cette section au premier cas envisagé dans le lemme 3, c'est-à-dire que nous supposons (6) vérifiée. Nous appelons ce cas démocratie.

**Théorème 1.** *Si*

$$\int_0^1 \frac{q(\mathrm{d}x)}{1-x} > \beta^{-1},$$

*et si nous notons $s^{-1}$ l'unique pôle de $g$ dans $D$, alors $(p_n)$ converge vers la distribution de probabilité $p$ définie par*

$$p(\mathrm{d}x) = \frac{\beta s q(\mathrm{d}x)}{s-(1-\beta)x},$$

*au sens où la variation totale de $p_n - p$ est $o\big(\big[(1-\beta)s^{-1}\theta\big]^n\big)$ pour tout $\theta > 1$. En particulier, $p$ ne dépend pas de $p_0$ et est absolument continue par rapport à $q$.*

Pour montrer le théorème, nous aurons besoin des lemmes suivants :

**Lemme 4.** *Sous les hypothèses du théorème 1, il existe $a > 0$ tel que pour tout $\theta > 1$, $W_n = as^n + o([(1-\beta)\theta]^n)$.*

**Lemme 5.** *Sous les mêmes hypothèses, pour tout $\theta > 1$, $w_n = s + o(\delta^n\theta^n)$, où $\delta = \dfrac{1-\beta}{s}$.*

**Remarque.** *Comme $s^{-1} \in D$, nous avons $1-\beta < s$ donc $\delta < 1$, si bien que $\theta$ peut être choisi tel que $\delta\theta < 1$. Par conséquent, $w_n \xrightarrow[n\to\infty]{} s$.*

*Preuve du lemme 4.* La fonction $g$ admet un unique pôle dans $D$, $s^{-1}$, qui est simple, donc en notant $a = \lim\limits_{z\to s^{-1}} (s^{-1}-z)g(z)$ :

$$h(z) = g(z) - \frac{a}{s^{-1}-z}$$

est holomorphe sur $D$. De plus, pour tout $z \in D(0,1)$,

$$h(z) = -as + \sum_{n=1}^{+\infty} (W_n - as^{n+1})z^n.$$

Or $h$ est holomorphe sur $D$ donc l'égalité reste vraie pour $z \in D$. Nous pouvons donc appliquer la formule de Cauchy : pour tout $n > 0$, pour tout $\theta_0 > 1$,

$$|W_n - (as)s^n| \leq \frac{M(\theta_0^{-1}(1-\beta)^{-1})}{[\theta_0^{-1}(1-\beta)^{-1}]^n},$$

où pour tout $r \in ]0,(1-\beta)^{-1}[$, $M(r) = \sup\limits_{|z|=r} |h(z)|$. Ainsi,

$$|W_n - (as)s^n| = \mathcal{O}([\theta_0(1-\beta)]^n).$$

D'où le résultat pour tout $\theta > 1$, en considérant un $\theta_0$ tel que $1 < \theta_0 < \theta$. □

*Preuve du lemme 5.* Soit $\theta > 1$. D'après le lemme 4 :

$$\begin{aligned} w_n &= \frac{W_{n+1}}{W_n} \\ &= s\,\frac{1 + o\left(\left[\frac{(1-\beta)\theta}{s}\right]^n\right)}{1 + o\left(\left[\frac{(1-\beta)\theta}{s}\right]^n\right)} \\ &= s + o\left(\left[\frac{(1-\beta)\theta}{s}\right]^n\right), \end{aligned}$$

ce qui donne le résultat voulu. □

*Preuve du théorème 1.* Pour montrer le théorème, commençons par remarquer que

$$p(\mathrm{d}x) = \sum_{n\geq 0} \beta \left(\frac{1-\beta}{s} x\right)^n q(\mathrm{d}x).$$

Soit $\theta > 1$. Nous allons montrer que

$$||p_n - p||_{VT} = o(\delta^n \theta^n).$$

En reprenant la formule (1), nous avons :

$$\begin{aligned} p_n(\mathrm{d}x) - p(\mathrm{d}x) = &\sum_{r=0}^{n-1} \left[\frac{W_{n-r}}{W_n} - s^{-r}\right] (1-\beta)^r \beta x^r q(\mathrm{d}x) + \frac{1}{W_n}(1-\beta)^n x^n p_0(\mathrm{d}x) \\ &- \sum_{r\geq n} s^{-r}(1-\beta)^r \beta x^r q(\mathrm{d}x), \end{aligned}$$

et par inégalité triangulaire :

$$||p_n - p||_{VT} \leq \frac{1}{W_n}(1-\beta)^n m_n + \sum_{r\geq n} \delta^r \beta \mu_r + \sum_{r=0}^{n-1} (1-\beta)^r \beta \mu_r \left|\frac{W_{n-r}}{W_n} - s^{-r}\right|.$$

Par le lemme 4,

$$\frac{1}{W_n}(1-\beta)^n m_n \leq \frac{(1-\beta)^n}{W_n} = \frac{(1-\beta)^n}{as^n + o((1-\beta)^n\theta^n)} = o(\delta^n\theta^n).$$

De plus,

$$\sum_{r\geq n} \delta^r \beta \mu_r \leq \beta \frac{\delta^n}{1-\delta} = o(\delta^n) = o(\delta^n\theta^n).$$

Il reste à montrer que $A_n := \sum_{r=0}^{n-1} (1-\beta)^r \beta \mu_r \left|\frac{W_{n-r}}{W_n} - s^{-r}\right|$ est $o(\delta^n\theta^n)$.

Soit $\epsilon > 0$. Notons d'abord que, par le lemme 5, on dispose de $N$ tel que pour tout $n \geq N$,

$$s - \epsilon\delta^n\theta^n \leq w_n \leq s + \epsilon\delta^n\theta^n. \tag{7}$$

Ensuite,

$$\begin{aligned} A_n \leq & \sum_{r=n-N+1}^{n-1} (1-\beta)^r \beta\mu_r \frac{W_{n-r}}{W_n} + \sum_{r=n-N+1}^{n-1} (1-\beta)^r \beta\mu_r s^{-r} \\ & + \sum_{r=0}^{+\infty} (1-\beta)^r \beta\mu_r \left| \frac{W_{n-r}}{W_n} - s^{-r} \right| \mathbb{1}_{r \leq n-N}. \end{aligned}$$

Montrons que chacun des termes est $o(\delta^n\theta^n)$.
Pour le premier terme, nous avons :

$$\begin{aligned} \frac{1}{\delta^n\theta^n} \sum_{r=n-N+1}^{n-1} (1-\beta)^r \beta\mu_r \frac{W_{n-r}}{W_n} & \leq \frac{1}{\delta^n\theta^n} \sum_{r=n-N+1}^{n-1} (1-\beta)^r \frac{W_{n-r}}{W_n} \\ & = \frac{1}{\delta^n\theta^n} \sum_{r=1}^{N-1} (1-\beta)^{n-r} \frac{W_r}{W_n} \end{aligned}$$

Soit $r \in [\![1, N-1]\!]$, notons $y_n = \frac{(1-\beta)^n}{\delta^n\theta^n} \frac{W_r}{W_n}$. Nous avons :

$$\frac{y_{n+1}}{y_n} = \frac{(1-\beta)}{\delta\theta} \frac{W_n}{W_{n+1}} \xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{1-\beta}{\delta\theta} s^{-1} = \theta^{-1} < 1$$

De là, $y_n \to 0$.
Pour le deuxième terme :

$$\sum_{r=n-N+1}^{n-1} (1-\beta)^r \beta\mu_r s^{-r} \leq \sum_{r=n-N+1}^{+\infty} \delta^r \leq \frac{\delta^{n-N+1}}{1-\delta} = o(\delta^n\theta^n).$$

Pour le troisième terme, procédons par convergence dominée. Posons

$$a_{n,r} = \frac{(1-\beta)^r}{\delta^n\theta^n} \beta\mu_r \left| \frac{W_{n-r}}{W_n} - s^{-r} \right| \mathbb{1}_{r \leq n-N}.$$

Pour $r \geq 0$, nous avons déjà par le lemme 5 que :

$$\frac{W_{n-r}}{W_n} - s^{-r} = o(\delta^n\theta^n),$$

donc

$$a_{n,r} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.$$

Il reste à dominer les $a_{n,r}$. Soit donc $n, r \geq 0$ tels que $n - r \geq N$. Remarquons d'abord que par (7),

$$(s + \epsilon\delta^n\theta^n)^{-r} \leq \frac{W_{n-r}}{W_n} \leq (s - \epsilon\delta^n\theta^n)^{-r}.$$

Puis, par l'inégalité des accroissements finis appliquée à $x \mapsto x^{-r}$, nous obtenons :

$$\left|(s+\epsilon\delta^n\theta^n)^{-r} - s^{-r}\right| \leq \frac{r}{s^{r+1}}\epsilon\delta^n\theta^n$$

d'une part, et :

$$\left|(s-\epsilon\delta^n\theta^n)^{-r} - s^{-r}\right| \leq \frac{r}{(s-\epsilon\delta^n\theta^n)^{r+1}}\epsilon\delta^n\theta^n$$

d'autre part. En combinant avec ce qui précède, et en supposant $\theta$ assez petit pour que $\delta\theta < 1$,

$$\left|\frac{W_{n-r}}{W_n} - s^{-r}\right| \leq \frac{r}{(s-\epsilon)^{r+1}}\epsilon\delta^n\theta^n.$$

Ainsi, il vient :

$$|a_{n,r}| \leq r\epsilon\frac{(1-\beta)^r}{(s-\epsilon)^{r+1}} := \alpha_r.$$

Comme $s > 1-\beta$, nous pouvons supposer $\epsilon$ assez petit pour que $s-\epsilon > 1-\beta$ et la série de terme général $\alpha_r$ est bien convergente. Nous avons finalement montré que $A_n = o(\delta^n\theta^n)$, ce qui achève la démonstration. $\square$

Contrairement au cas démocratique, nous allons voir que lorsque (6) n'est pas vérifiée, la distribution limite peut ne pas être absolument continue par rapport à $q$.

# 6 Méritocratie

Nous nous intéressons désormais au deuxième cas du lemme 3, c'est-à-dire celui où

$$\int_0^1 \frac{q(\mathrm{d}x)}{1-x} \leq \beta^{-1}.$$

Nous en déduisons :

$$\begin{aligned}
\beta^{-1} &\geq \int_0^1 1 + \frac{x}{1-x} q(\mathrm{d}x) \\
&= 1 + \sum_{n\geq 1} \int_0^1 x^n \, q(\mathrm{d}x) \\
&= 1 + \sum_{n\geq 1} \mu_n.
\end{aligned}$$

Donc,

$$\sum_{n\geq 1} \mu_n \leq \beta^{-1}(1-\beta).$$

Posons $f_n = \beta(1-\beta)^{-1}\mu_n$ ; la suite $(f_n)$ satisfait :

$$f_n \geq 0, \ \sum_{n=1}^{\infty} f_n \leq 1.$$

Définissons $(u_n)$, la suite de renouvellement de $(f_n)$, par :

$$u_0 = 1, \ u_n = \sum_{r=1}^{n} f_n u_{n-r}.$$

D'après le lemme 10 démontré en appendice, on dispose de $\mu^*$ une mesure de probabilité sur $[0,1]$ telle que $u_n = \int_0^1 x^n \mu^*(\mathrm{d}x)$ pour tout $n \geq 0$.

**Lemme 6.** *1. La suite $(u_n)$ est décroissante.*

*2. La suite $\left(\frac{u_n}{u_{n-1}}\right)$ est croissante.*

*Preuve du lemme 6.* 1. Cela provient du fait que $(x^n)_{n\geq 0}$ est décroissante si $x \in [0,1]$.

2. Par l'inégalité de Cauchy-Schwarz,

$$u_{n-1}u_{n+1} = \int_0^1 x^{n-1}\mu^*(\mathrm{d}x) \int_0^1 x^{n+1}\mu^*(\mathrm{d}x) \geq \left(\int_0^1 x^n \mu^*(\mathrm{d}x)\right)^2 = u_n^2.$$

□

Donc $\left(\frac{u_n}{u_{n-1}}\right)$ est croissante et majorée par 1. Si

$$\lim_{n\to\infty} \frac{u_n}{u_{n-1}} = 1, \tag{8}$$

nous disons que nous somme dans le cas méritocratique.

**Théorème 2.** *Si*

$$\int_0^1 \frac{q(\mathrm{d}x)}{1-x} \leq \beta^{-1},$$

*et si la suite $(u_n)$ définie ci-dessus vérifie*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{u_n}{u_{n-1}} = 1,$$

*alors $(p_n)$ converge faiblement vers la mesure*

$$p(\mathrm{d}x) = \frac{\beta q(\mathrm{d}x)}{1-x} + \left(1 - \int_0^1 \frac{\beta q(\mathrm{d}y)}{1-y}\right)\delta_1(\mathrm{d}x),$$

*où $\delta_1$ désigne la masse de Dirac en 1.*
*Comme précédemment, la mesure limite $p$ ne dépend pas de $p_0$. Cependant, elle n'est plus nécessairement absolument continue par rapport à $q$.*

Afin de démontrer ce théorème, nous allons relier $(W_n)$ à $(u_n)$. Nous avons la formule suivante :

**Lemme 7.** *Pour $(u_n)$ définie comme ci-dessus, $W_n$ s'écrit :*

$$W_n = (1-\beta)^{n-1} \sum_{r=1}^{n} m_r u_{n-r}.$$

*Preuve du lemme 7.* Ce lemme se prouve par récurrence à partir de la formule (2). $\square$

Posons dans la suite $v_n = \sum_{r=1}^{n} m_r u_{n-r}$. Nous avons donc $W_n = (1-\beta)^{n-1} v_n$.

**Lemme 8.** $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{v_n}{v_{n-1}} = 1.$

**Remarque.** *Ce lemme et le lemme 7 impliquent que*

$$w_n = \frac{W_{n+1}}{W_n} = (1-\beta)\frac{v_{n+1}}{v_n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 1-\beta.$$

*Preuve du lemme 8.* Considérons $\lambda = \mu^* \otimes p_0$, la mesure produit de $\mu*$ et de $p_0$. Alors

$$m_r u_{n-r} = \int_{I\times I} x^{n-r} y^r \lambda(\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y),$$

donc

$$\begin{aligned} v_n &= \sum_{r=1}^{n} m_r u_{n-r} \\ &= \sum_{r=1}^{n} \int_{I\times I} x^{n-r} y^r \lambda(\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y) \\ &= \int_{I\times I} y \sum_{r=0}^{n-1} x^{n-r-1} y^r \lambda(\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y) \\ &= \int_{I\times I} g_n(x,y) \lambda(\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y), \end{aligned}$$

où $g_n(x,y) = \dfrac{x^n - y^n}{x-y} y$ si $x \neq y$, et $g(x,x) = nx^n$.

**Étape 1** :

Montrons que si $x, y \in [0,1]$, alors :

$$\frac{g_{n-1}(x,y)}{n-1} \geq \frac{g_n(x,y)}{n}.$$

Dans un premier temps, prenons $x$ et $y$ distincts. Supposons sans perte de généralité que $1 \geq x > y \geq 0$. Alors

$$\int_y^x t^{n-2} dt \geq \int_y^x t^{n-1} dt,$$

donc
$$\frac{x^{n-1}-y^{n-1}}{n-1} \geq \frac{x^n-y^n}{n},$$
d'où le résultat. Il reste vrai dans le cas $x=y$, par continuité.

De là, $\frac{v_n}{n} \leq \frac{v_{n-1}}{n-1}$, d'où $\frac{v_n}{v_{n-1}} < \frac{n}{n-1}$, et nous obtenons :
$$\limsup \frac{v_n}{n_{n-1}} \leq 1.$$

**Étape 2** :
Soit $0<\alpha<1$. Montrons que si $x,y \in [0,1]$ vérifient $\max(x,y) \geq \alpha$, alors $g_n(x,y) \geq \alpha g_{n-1}(x,y)$. Supposons en effet que $x>y$ et $x \geq \alpha$, alors :
$$x^n - y^n \geq x^n - xy^{n-1} = x(x^{n-1}-y^{n-1}) \geq \alpha(x^{n-1}-y^{n-1}),$$
donc $g_n(x,y) \geq \alpha g_{n-1}(x,y)$.
Le résultat s'étend au cas $x=y$ par continuité.
De plus, nous avons $g_n(x,y) < n\alpha^n$ si $\max(x,y) < \alpha$.
Maintenant :
$$\begin{aligned} v_n &= \int_{0\leq x,y\leq 1} g_n(x,y)\lambda(\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y) \\ &\geq \int_{max(x,y)\geq\alpha} g_n(x,y)\lambda(\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y) \\ &\geq \alpha\int_{max(x,y)\geq\alpha} g_{n-1}(x,y)\lambda(\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y) \\ &= \alpha v_{n-1} - \alpha\int_{x<\alpha,y<\alpha} g_{n-1}(x,y)\lambda(\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y) \\ &\geq \alpha v_{n-1} - (n-1)\alpha^n, \end{aligned}$$
donc
$$\frac{v_n}{v_{n-1}} \geq \alpha - \frac{(n-1)\alpha^n}{v_{n-1}} \geq \alpha - \frac{(n-1)\alpha^n}{m_1 u_{n-2}}. \tag{9}$$
Comme
$$\frac{\frac{n\alpha^{n+1}}{m_1 u_{n+1-2}}}{\frac{(n-1)\alpha^n}{m_1 u_{n-2}}} = \alpha\frac{nu_{n-2}}{(n-1)u_{n-1}} \xrightarrow[n\to\infty]{} \alpha < 1,$$
nous avons :
$$\frac{(n-1)\alpha^n}{m_1 u_{n-2}} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.$$
Prenant la $\liminf$ de (9), nous obtenons
$$\liminf \frac{v_n}{v_{n-1}} \geq \alpha.$$

Ceci étant vrai pour tout $\alpha$ tel que $0 < \alpha < 1$, nous obtenons finalement

$$\frac{v_n}{v_{n-1}} \xrightarrow[n\to\infty]{} 1.$$

$\square$

Maintenant, cherchons la limite de la suite de mesures de probabilité $(p_n)$ :

**Lemme 9.** *Dans le cas méritocratique, pour tout $\xi < 1$, $p_n$ converge en variation totale sur $[0,\xi]$, vers la mesure*

$$p(\mathrm{d}x) = \sum_{r=0}^{\infty} \beta x^r q(\mathrm{d}x) = \frac{\beta q(\mathrm{d}x)}{1-x}.$$

*Preuve du lemme 9 .* Dans la relation de récurrence (1), remplaçons $W_k$ par $(1-\beta)^{k-1}v_k$. Nous avons :

$$(1-\beta)^{n-1}v_n p_n(\mathrm{d}x) = \sum_{r=0}^{n-1}(1-\beta)^{n-r-1}v_{n-r}(1-\beta)^r\beta x^r q(\mathrm{d}x) + (1-\beta)^n x^n p_0(\mathrm{d}x),$$

donc,

$$p_n(\mathrm{d}x) = \sum_{r=0}^{n-1} \frac{v_{n-r}}{v_n}\beta x^r q(\mathrm{d}x) + \frac{1}{v_n}(1-\beta)x^n p_0(\mathrm{d}x).$$

Soit $\epsilon > 0$. Par inégalité triangulaire :

$$\begin{aligned} ||p_n - p||_{VT,[0,\xi]} \le& \beta \int_0^{\xi} \left| \sum_{r=0}^{n-1} (\frac{v_{n-r}}{v_n} - 1)x^r \right| q(\mathrm{d}x) + \frac{1-\beta}{v_n}\int_0^{\xi} x^n p_0(\mathrm{d}x) \\ &+ \beta \int_0^{\xi} \sum_{r=n}^{\infty} x^r q(\mathrm{d}x). \end{aligned}$$

Si $n$ est assez grand, $\displaystyle\int_0^{\xi} \sum_{r=n}^{\infty} x^r q(\mathrm{d}x) \le \frac{\xi^n}{1-\xi} < \epsilon.$

Ensuite,

$$\frac{1}{v_n}\int_0^{\xi} (1-\beta)\, x^n p_0(\mathrm{d}x) \le \frac{\xi^n(1-\beta)}{v_n} := a_n.$$

Par le lemme 8, nous avons

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \to \xi < 1,$$

d'où $a_n \to 0$. Donc pour $n$ assez grand,

$$\frac{1}{v_n}\int_0^{\xi}(1-\beta)x^n p_0(\mathrm{d}x) \le \epsilon.$$

Il reste à estimer le terme $A_n = \int_0^\xi \left| \sum_{r=0}^{n-1} \left( \frac{v_{n-r}}{v_n} - 1 \right) \beta x^r \right| q(\mathrm{d}x)$ .
Soit $N_0$ un entier tel que pour tout $n \geq N_0$, $1 - \epsilon < \frac{v_{n-1}}{v_n} < 1 + \epsilon$. Il vient :

$$\begin{aligned} A_n \leq & \int_0^\xi \left| \sum_{r=0}^{n-N_0} \left( \frac{v_{n-r}}{v_n} - 1 \right) \beta x^r \right| q(\mathrm{d}x) + \int_0^\xi \sum_{r=n-N_0+1}^{n-1} \frac{v_{n-r}}{v_n} \beta x^r q(\mathrm{d}x) \\ & + \int_0^\xi \sum_{r=n-N_0+1}^{n-1} \beta x^r q(\mathrm{d}x). \end{aligned}$$

Pour n assez grand,

$$\begin{aligned} \int_0^\xi \sum_{r=n-N_0+1}^{n} \beta x^r q(\mathrm{d}x) &= \int_0^\xi x^{n-N_0+1} \sum_{r=0}^{N_0-1} \beta x^r \, q(\mathrm{d}x) \\ &\leq \xi^{n-N_0+1} \int_0^\xi \sum_{r=0}^{N_0-1} \beta x^r \, q(\mathrm{d}x) \\ &\leq \epsilon. \end{aligned}$$

De plus, pour $x \in [0, \xi]$ et $n \geq N_0$,

$$\begin{aligned} \sum_{r=n-N_0+1}^{n-1} \frac{v_{n-r}}{v_n} \beta x^r &= \sum_{r=n-N_0+1}^{n} \frac{v_{n-r}}{v_{N_0}} \frac{v_{N_0}}{v_n} \beta x^r \\ &\leq \sum_{r=n-N_0+1}^{n} M(1+\epsilon)^{n-N_0} \xi^r \\ &\leq N_0 M (1+\epsilon)^{n-N_0} \xi^{n-N_0}, \end{aligned}$$

où $M = \sup_{1 \leq m \leq N_0} \frac{v_m}{v_{N_0}}$.
Ainsi, en prenant $\epsilon$ tel que $(1+\epsilon)\xi < 1$ et $n$ assez grand,

$$\begin{aligned} \int_0^\xi \sum_{r=n-N_0+1}^{n} \frac{v_{n-r}}{v_n} \beta x^r \, q(\mathrm{d}x) &\leq \int_0^\xi N_0 M (1+\epsilon)^{n-N_0} \xi^{n-N_0} \, q(\mathrm{d}x) \\ &\leq N_0 M (1+\epsilon)^{n-N_0} \xi^{n-N_0} \\ &\leq \epsilon. \end{aligned}$$

De plus,

$$\begin{aligned}
\int_0^\xi \left| \sum_{r=0}^{n-N_0} \left( \frac{v_{n-r}}{v_n} - 1 \right) \beta x^r \right| q(\mathrm{d}x) &\leq \sum_{r=0}^{n-N_0} \int_0^\xi \left| \frac{v_{n-r}}{v_n} - 1 \right| \beta x^r q(\mathrm{d}x) \\
&\leq \sum_{r=0}^{n-N_0} \int_0^\xi [(1+\epsilon)^r - 1] \, \beta \xi^r q(\mathrm{d}x) \\
&\leq \sum_{r=0}^{n-N_0} [(1+\epsilon)^r - 1] \beta \xi^r \\
&\leq \sum_{r=0}^{\infty} [(1+\epsilon)^r \xi^r - \xi^r] \\
&= \frac{1}{1-(1+\epsilon)\xi} - \frac{1}{1-\xi}.
\end{aligned}$$

Finalement, l'inégalité

$$A_n \leq \frac{1}{1-(1+\epsilon)\xi} - \frac{1}{1-\xi} + 2\epsilon,$$

vérifiée pour $n$ assez grand, conclut la preuve. Ainsi, $(p_n)$ converge en variation totale vers $p$ sur $[0, \xi]$. □

Nous sommes maintenant en mesure de démontrer la convergence faible de $(p_n)$ vers $p$.

*Preuve du théorème 2.* L'intervalle $[0, 1]$ étant compact, $M([0, 1])$, l'ensemble des mesures de probabilité sur $[0, 1]$ muni de la topologie faible, est compact. Soit $p'$ une valeur d'adhérence de $(p_n)$ pour la topologie faible. D'après le lemme 2, pour tout $\xi < 1$, $(p_n)$ converge faiblement vers $p'$ sur $[0, \xi]$, donc $p'$ doit coïncider avec $p$ sur $[0, \xi]$. Par conséquent, p' étant une mesure de probabilité sur $[0, 1]$,

$$p'(\mathrm{d}x) = \frac{\beta q(\mathrm{d}x)}{1-x} + \left( 1 - \int_0^1 \frac{\beta q(\mathrm{d}y)}{1-y} \right) \delta_1(\mathrm{d}x) = p(\mathrm{d}x).$$

La mesure $p$ est donc l'unique valeur d'adhérence de $(p_n)$ pour la topologie faible. La suite $(p_n)$ converge faiblement vers p. □

Ainsi, dans le cas méritocratique, il y a apparition, à la limite, d'un atome à la valeur maximale de fitness.

# 7 Aristocratie

Nous étudions maintenant le cas où la suite $(u_n/u_{n-1})_{n\geq 1}$ croît vers un réel $\sigma < 1$.

**Théorème 3.** *Si*
$$\int_0^1 \frac{q(\mathrm{d}x)}{1-x} \leq \beta^{-1},$$
*et si* $(u_n)$*, la suite de renouvellement de* $(f_n) = (\beta(1-\beta)^{-1}\mu_n)$*, vérifie*
$$\lim_{n\to\infty} \frac{u_n}{u_{n-1}} < 1,$$
*alors* $(p_n)$ *converge faiblement vers la mesure*
$$p(\mathrm{d}x) = \frac{\beta q(\mathrm{d}x)}{1-x} + \left(1 - \int_0^1 \frac{\beta q(\mathrm{d}y)}{1-y}\right)\delta_1(\mathrm{d}x),$$
*où* $\delta_1$ *désigne la masse de Dirac en 1.*
*Contrairement aux cas précédents, la mesure limite* $p$ *dépend de* $p_0$*, à travers la renormalisation qui a été effectuée à la section 2. De plus, elle n'est pas nécessairement absolument continue par rapport à* $q$*.*

*Preuve du théorème 3.* Rappelons que, par hypothèse, les supports de $p_0$ et $q$ (donc ceux des $p_n$) sont inclus dans $[0,1]$, et que $max(supp(p_0) \cup supp(q)) = 1$. Notant $\sigma = \lim_{n\to\infty} \dfrac{u_n}{u_{n-1}}$, nous avons
$$f_n \leq \sum_{r=1}^{n} f_n u_{n-r} = u_n \leq \sigma^n,$$
donc le support de q est inclus dans $[0,\sigma]$. En effet, dans le cas contraire, il existerait $\eta \in ]\sigma, 1]$ tel que $q([\eta,1]) > 0$, et alors
$$\frac{f_n}{\sigma^n} = \frac{\beta}{1-\beta}\frac{\mu_n}{\sigma^n} \geq \frac{\beta}{1-\beta}\frac{\eta^n}{\sigma^n} q([\eta,1]) \xrightarrow[n\to\infty]{} \infty,$$
ce qui contredirait l'inégalité précédente. Ainsi donc, nous avons
$$max(supp(q)) < max(supp(p_0)) = 1.$$
Les arguments de la section précédente restent valables, à l'exception de la preuve de l'inégalité : $\liminf \dfrac{v_n}{v_{n-1}} \geq \alpha$.
Pour la démontrer, nous raisonnons comme suit : soit $\xi \in ]\alpha, 1]$ ; nous avons
$$p_0([\xi,1]) > 0, \text{ et } m_n \geq \xi^n p_o([\xi,1]),$$
donc
$$\frac{v_n}{v_{n-1}} \geq \alpha - \frac{(n-1)\alpha^n}{v_{n-1}} \geq \alpha - \frac{(n-1)\alpha^n}{m_{n-1}} \geq \alpha - \frac{(n-1)\alpha^n}{\xi^n p_0([\xi,1])} \xrightarrow[n\to\infty]{} \alpha.$$
Il est ainsi établi que, comme précédemment, $(p_n)$ converge faiblement vers
$$p(\mathrm{d}x) = \frac{\beta q(\mathrm{d}x)}{1-x} + \left(1 - \int_0^1 \frac{\beta q(\mathrm{d}y)}{1-y}\right)\delta_1(\mathrm{d}x).$$
□

Nous observons l'apparition d'un atome en 1, c'est-à-dire au maximum de fitness de $p_0$. Il existe une partie de la population, qui perdure, et dont la fitness ne peut jamais être atteinte par les individus mutants. Nous nommons donc ce cas le cas aristocratique.

# 8 Conclusion

L'étude de ce modèle a permis de mettre en évidence une transition de phase. Dans le cas démocratique, c'est-à-dire lorsque $\beta \int_0^1 \frac{q(\mathrm{d}y)}{1-y} > 1$, la mutation l'emporte sur la sélection : le taux de mutation $\beta$ est élevé et/ou la mutation produit des individus de fitness élevée. La distribution limite est alors la distribution $q$ multipliée par une fonction simple. Les cas méritocratique et aristocratique, ceux où $\beta \int_0^1 \frac{q(\mathrm{d}y)}{1-y} \leq 1$, correspondent quant à eux à une plus forte influence de la sélection. Dans ces cas, à la limite, on retrouve en-deçà de la fitness maximale une distribution absolument continue par rapport à q ; s'y ajoute une catégorie d'individus de fitness maximale.

# 9 Appendice

**Lemme 10.** *Soit $\mu$ une mesure borélienne finie sur $[0,1]$ et $(f_n)_{n\geq 1}$ la suite de ses moments. Supposons que*

$$\sum_{n\geq 1} f_n \leq 1 \text{ i.e. } \int_0^1 \frac{x}{1-x}\mu(\mathrm{d}x) \leq 1. \tag{10}$$

*Soit $(u_n)_{n\geq 0}$ la suite de renouvellement de $(f_n)_{n\geq 1}$, définie par :*

$$\begin{cases} \forall n \geq 1, u_n = \displaystyle\sum_{r=1}^{n} f_r u_{n-r} \\ u_0 = 1. \end{cases} \tag{11}$$

*Alors il existe une mesure de probabilité borélienne sur $[0,1]$ dont $(u_n)$ soit la suite des moments.*

*Preuve du lemme 10.*
**Cas particulier.** Traitons d'abord le cas où $\mu$ est discrète à support dans $]0,1[$.
Soit $k \geq 1$, $a_1, \ldots, a_k$ des réels positifs non tous nuls, $x_1, \ldots, x_k$ dans $]0,1[$, et $\mu = \sum_{j=1}^{k} a_j \delta_{x_j}$, où $\delta_x$ désigne le Dirac en $x$. Nous avons donc :

$$\forall n \geq 1, f_n = \sum_{j=1}^{k} a_j x_j^n.$$

et la condition (10) se réécrit ici :

$$\sum_{j=1}^{k} \frac{a_j x_j}{1-x_j} \leq 1. \tag{12}$$

Pour montrer que la suite $(u_n)$, définie par (11), est complètement monotone, nous allons étudier la série génératrice associée. Posons donc, pour $z \in D(0,1)$,

$$U(z) = \sum_{n\geq 0} u_n z^n.$$

Le rayon de convergence de cette série est supérieur ou égal à 1 car pour tout $n \geq 1, u_n \leq 1$ (cela se montre par récurrence à partir de (10) et (11)). Il vient :

$$
\begin{aligned}
U(z) &= 1+\sum_{n\geq 1} u_n z^n \\
&= 1+\sum_{n\geq 1}\left(\sum_{r=1}^{n} f_r u_{n-r}\right) z^n \\
&= 1+\left(\sum_{n\geq 0} u_n z^n\right)\left(\sum_{n\geq 1} f_n z^n\right),
\end{aligned}
$$

d'où

$$
U(z)=\left(1-\sum_{n\geq 1} f_n z^n\right)^{-1}.
$$

De plus,

$$
\begin{aligned}
\sum_{n\geq 1} f_n z^n &= \sum_{n\geq 1}\left(\sum_{j=1}^{k} a_j x_j^n\right) z^n \\
&= \sum_{j=1}^{k} a_j\left(\sum_{n\geq 1}(x_j z)^n\right) \\
&= \sum_{j=1}^{k}\frac{a_j x_j z}{1-x_j z}.
\end{aligned}
$$

En définitive,

$$
U(z)=\left(1-\sum_{j=1}^{k}\frac{a_j x_j z}{1-x_j z}\right)^{-1}.
$$

Ainsi, $U$ est une fraction rationnelle dont nous nous proposons d'étudier les pôles. Ceux-ci vérifient :

$$
\sum_{j=1}^{k}\frac{a_j x_j z}{1-x_j z}=1
$$

donc en passant à la partie imaginaire,

$$
\sum_{j=1}^{k}\frac{a_j x_j Im((1-x_j\bar{z})z)}{|1-x_j z|^2}=0
$$

i.e.

$$
Im(z)\left(\sum_{j=1}^{k}\frac{a_j x_j}{|1-x_j z|^2}\right)=0
$$

i.e. (le deuxième facteur étant non nul par hypothèse)

$$Im(z) = 0,$$

donc les pôles de $U$ sont réels. De plus, comme les $x_j$ sont dans $]0, 1[$,

$$r \in ]-\infty, 1] \mapsto \frac{1}{U(r)} = 1 - \sum_{j=1}^{k} \frac{a_j x_j r}{1 - x_j r}$$

est strictement décroissante, et d'après (12), positive ou nulle en 1, de sorte que les pôles de $U$ sont dans $[1, +\infty[$.
Montrons enfin que les pôles de $U$ sont simples. Soit $\zeta$ un pôle de $U$. $\zeta$ est un zéro simple de $\frac{1}{U}$ car $(\frac{1}{U})'(\zeta) = -\sum_{j=1}^{k} \frac{a_j x_j}{(1 - x_j \zeta)^2} < 0$. $\zeta$ est donc bien un pôle simple de $U$. De plus, le résidu de $U$ en $\zeta$ vaut $\left( -\sum_{j=1}^{k} \frac{a_j x_j}{(1 - x_j \zeta)^2} \right)^{-1}$.
Ainsi, $U(z)$ est de la forme

$$\sum_{j=1}^{k} \frac{b_j}{\zeta_j - z} + f(z),$$

où $b_j > 0$, $\zeta_j \geq 1$ et $f$ est une fonction entière. Or

$$\lim_{z \to +\infty} f(z) = \lim_{z \to +\infty} U(z) = \frac{1}{1 + \sum_{j=1}^{k} a_j},$$

donc $f$ est bornée et par le théorème de Liouville, elle est constante, égale à $\left(1 + \sum_{j=1}^{k} a_j\right)^{-1}$. En identifiant les coefficients des séries entières, nous en déduisons que pour $n \geq 1$,

$$u_n = \sum_{j=1}^{k} \frac{b_j}{\zeta_j} \left(\frac{1}{\zeta_j}\right)^n$$

et que de plus,

$$\frac{1}{1 + \sum_{j=1}^{k} a_j} + \sum_{j=1}^{k} \frac{b_j}{\zeta_j} = 1.$$

Nous observons alors que la suite $(u_n)_{n \geq 0}$ est la suite des moments de la mesure de probabilité sur $[0, 1]$ suivante :

$$\mu^* = \left( \frac{1}{1 + \sum_{j=1}^{k} a_j} \right) \delta_0 + \sum_{j=1}^{k} \frac{b_j}{\zeta_j} \delta_{\zeta_j^{-1}},$$

où $\delta_\zeta$ désigne la masse de Dirac en $\zeta$.

**Cas général.** Considérons $\mu$ et $f = (f_n)_{n\geq 1}$ comme dans le lemme. En particulier,

$$f_n = \int_0^1 x^n \mu(\mathrm{d}x)$$

et

$$\sum_{n\geq 1} f_n \leq 1.$$

Nous pouvons supposer sans perte de généralité : $\mu(\{0\}) = 0$ et $\mu$ non nulle.

Nous allons construire pour tout $l \geq 1$ une suite $f^{(l)} = (f_n^{(l)})_{n\geq 1}$ qui soit de la forme particulière précédente (c'est-à-dire la suite des moments d'une mesure discrète sur ]0,1[ vérifiant (12)), de sorte que $(f^{(l)})_{l\geq 1}$ converge simplement vers $f$. En notant, pour tout $l \geq 1$, $u^{(l)} = (u_n^{(l)})_{n\geq 0}$ la suite de renouvellement de $f^{(l)}$, et $u = (u_n)_{n\geq 0}$ celle de $f$, nous aurons que $(u^{(l)})_{l\geq 1}$ converge simplement vers $u$. En effet, pour tout $n \geq 1$,

$$u_n^{(l)} = \sum_{r=1}^{n} f_r^{(l)} u_{n-r}^{(l)} \xrightarrow[l\to\infty]{} \sum_{r=1}^{n} f_r u_{n-r} = u_n.$$

Posons donc, pour $n \geq 1$ et $l \geq 1$,

$$a_i^{(l)} = \mu\left(\left]\frac{i}{l}, \frac{i+1}{l}\right]\right) \text{ et } x_i^{(l)} = \frac{i}{l}, \text{ pour } i = 0, \ldots, l-1,$$

$$\text{puis } f_n^{(l)} = \sum_{i=1}^{l-1} a_i^{(l)} (x_i^{(l)})^n,$$

et montrons que $(f_n^{(l)})_{l\geq 1}$ converge simplement vers $(f_n)$.

Soit $n \geq 1$. Nous avons l'encadrement suivant :

$$f_n^{(l)} = \sum_{i=0}^{l-1} a_i^{(l)} \left(\frac{i}{l}\right)^n \leq f_n \leq \sum_{i=0}^{l-1} a_i^{(l)} \left(\frac{i+1}{l}\right)^n.$$

D'où, avec l'inégalité des accroissements finis :

$$\begin{aligned} 0 \leq f_n - f_n^{(l)} &\leq \sum_{i=0}^{l-1} a_i^{(l)} \left[\left(\frac{i+1}{l}\right)^n - \left(\frac{i}{l}\right)^n\right] \\ &\leq \sum_{i=0}^{l-1} a_i^{(l)} \cdot \frac{n}{l} \\ &\leq \mu(]0,1])\frac{n}{l} \xrightarrow[l\to\infty]{} 0. \end{aligned}$$

Il en découle : $f_n^{(l)} \xrightarrow[l\to\infty]{} f_n$.

Vérifions qu'à $l \geq 1$ fixé, $(f_n^{(l)})_{n\geq 1}$ vérifie bien les conditions particulières précédentes.

- Les $a_i^{(l)}$ sont non tous nuls, car $\mu$ est non nulle.
- La condition (12) est bien vérifiée :

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{k} \frac{a_i^{(l)} x_i^{(l)}}{1 - x_i^{(l)}} &= \sum_{i=1}^{k} \frac{\mu(]\frac{i}{l}, \frac{i+1}{l}])\frac{i}{l}}{1 - \frac{i}{l}} \\
&\leq \int_0^1 \frac{x}{1-x} \mu(\mathrm{d}x) \\
&= \sum_{n \geq 1} f_n \\
&\leq 1
\end{aligned}$$

D'après la première partie de la preuve, il existe pour tout $l \geq 1$ une mesure de probabilité borélienne sur $[0,1]$, notée $\mu^{(l)}$, dont $u^{(l)}$ soit la suite des moments. Or $M([0,1])$ est compact pour la topologie faible, donc nous pouvons extraire de $(\mu^{(l)})_{l \geq 1}$ une sous-suite convergeant faiblement :

$$\mu^{(\phi(l))} \rightharpoonup \mu^*.$$

Alors, pour tout $n \geq 0$ :

$$u_n = \lim_{l \to \infty} u_n^{(\phi(l))} = \lim_{l \to \infty} \int_0^1 x^n \mu^{(\phi(l))}(\mathrm{d}x) = \int_0^1 x^n \mu^*(\mathrm{d}x),$$

donc $(u_n)_{n \geq 0}$ est la suite des moments de $\mu^*$. $\square$

# Références


[1] J. F. C. Kingman. A simple model for the balance between selection and mutation. *Journal of Applied Probability, Vol. 15, No.1*, pages 1–12, 1978.

[2] P. Billingsley. *Convergence of probability measures.* 1968.