THÉORÈMES DE RESTRICTION DE CHEVALLEY

Pierre Connault   Yoann Dabrowski

Sujet proposé par Charles Torossian

Table des matières

Introduction

Soit $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie complexe semi-simple, on peut toujours considérer l'action sur $\mathfrak{g}$ de son groupe adjoint, qui s'étend au dual de $\mathfrak{g}$, puis à l'algèbre des fonctions polynomiales sur $\mathfrak{g}$. Le principe du théorème de restriction de Chevalley est de ramener la description des polynômes invariants par cette action adjointe, à un ensemble de polynômes sur une sous-algèbre de $\mathfrak{g}$, invariant par un groupe bien plus petit, à savoir un groupe fini engendré par des réflexions. Sachant que l'on connaît par un autre théorème de Chevalley la description des algèbres de polynômes invariants par des groupes finis engendrés par des réflexions (voir début de la partie 3 pour rappel), on aura décrit les polynômes invariants par action adjointe.

Dans une première partie, nous réalisons grosso-modo ce programme mais dans un cadre seulement algébrique, sur un corps k de caractéristique nulle algébriquement clos quelconque, si bien que nous serons obligés de nous ramener à l'étude des polynômes invariants par automorphismes élémentaires (éléments du groupe engendrés par les exponentielles des dérivations intérieures nilpotentes). On peut d'ailleurs montrer que le problème est le même que précédemment sur $\mathbb{C}$.

Dans la deuxième partie, nous reprenons un cadre de géométrie différentielle pour pouvoir montrer une autre généralisation de notre résultat pour les décompositions de Cartan et les sous-espaces de Cartan. Ceux-ci ont en fait une relation étroite avec un certain type de variétés Riemanniennes, dits *espaces symétriques*, car munies en chaque point d'une involution isométrique ne laissant localement que le point en question fixe. Et, même si nous ne nous étendrons pas sur ces questions, notre résultat a des applications dans ce contexte.

Enfin, la troisième partie vise à généraliser le théorème de restriction aux cas des applications de classe C^r avec r fini, en utilisant des techniques analytiques pour se ramener à des champs de polynômes.

1 Théorème de Chevalley : Cadre des algèbres de Lie sur un corps algébriquement clos de caractéristique nulle

Dans cette partie, $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{g}$, $\mathfrak{h}$ ... désignent des algèbres de Lie sur K un corps algébriquement clos et de caractéristique nulle.

1.1 Rappels sur les algèbres de Lie

Cette section contient des définitions et certains résultats préliminaires admis.

Définition 1.1: Soit V un espace vectoriel. Une *représentation* π de $\mathfrak{a}$ dans V est un morphisme d'algèbres de Lie de $\mathfrak{a}$ vers $(\mathfrak{gl}\,(V), [,])$ avec $[A, B] = AB - BA$. On dit aussi de manière équivalente que V est un $\mathfrak{g}$ -*module*. On note, si $a \in \mathfrak{a}$ et $x \in V$, $\pi(a).x$ ou même $a.x$.

Selon l'usage consacré, on note $\mathrm{ad}(x)(y) = [x, y]$. Ceci fournit une représentation ad : $\mathfrak{g} \to \mathfrak{gl}(\mathfrak{g})$, appelée représentation adjointe.

Posons $\mathcal{C}^1(\mathfrak{g}) = \mathcal{D}^1(\mathfrak{g}) = [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$ et $\mathcal{C}^n(\mathfrak{g}) = [\mathfrak{g}, \mathcal{C}^{n-1}(\mathfrak{g})]$ et $\mathcal{D}^n(\mathfrak{g}) = [\mathcal{D}^{n-1}(\mathfrak{g}), \mathcal{D}^{n-1}(\mathfrak{g})]$.

Une algèbre est dite *nilpotente* (resp. *résoluble*) si la suite des $\mathcal{C}^n(\mathfrak{g})$ (resp $\mathcal{D}^n(\mathfrak{g})$) est stationnaire ultimement égale à $\{0\}$.

On appelle *forme de Killing* et on note B la forme bilinéaire symétrique :

$$B(x, y) = Tr(\mathrm{ad}\ x \circ \mathrm{ad}\ y).$$

Elle est *associative*[1] au sens où

$$B([x, y], z) = B(x, [y, z]),$$

comme on le voit par les propriétés usuelles de la trace et le caractère de morphisme de ad.

On cite les théorèmes de Engel et de Lie :

Théorème 1.2:

(i.) (Engel) Une algèbre de Lie $\mathfrak{a}$ est nilpotente si et seulement si $\mathrm{ad}(x)$ est nilpotent pour tout x dans $\mathfrak{a}$. En conséquence, soit $(\pi$, V) une représentation de dimension finie d'une algèbre de Lie $\mathfrak{g}$. On suppose

[1] Certains diraient aussi que B est ad-alternée.

que tous les éléments de $\pi(\mathfrak{g})$ sont des endomorphismes nilpotents. Alors, il existe un drapeau

$$\{0\} = V_0 \subset V_1 \subset ... \subset V_n = V$$

tel que $\pi(\mathfrak{g})(V_i) \subset V_{i-1}$, pour $1 \leq i \leq n$.

(ii.) (Lie) Toute sous-algèbre résoluble de $\mathfrak{gl}(V)$ est simultanément trigonalisable.

Définition 1.3: Une algèbre de Lie est dite *semi-simple* si sa forme de Killing est non dégénérée.

Définition 1.4: On appelle *sous-algèbre de Cartan* de $\mathfrak{g}$ une sous-algèbre $\mathfrak{h}$ de $\mathfrak{g}$ nilpotente et égale à son normalisateur dans $\mathfrak{g}$.

Soit $x \in \mathfrak{g}$. Dans le cas où $\mathrm{ad}(x)$ est nilpotent on peut définir

$$\exp(\mathrm{ad}x) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{i!}(\mathrm{ad}(x))^i,$$

le nombre de termes non nuls dans la somme étant fini. On appelle *automorphismes élémentaires* les automorphismes de $\mathfrak{g}$ de cette forme et on note $Aut_e(\mathfrak{g})$ le sous-groupe des automorphismes de $\mathfrak{g}$ engendrés par ces exponentielles.

Théorème 1.5: Dans les algèbres de Lie semi-simples, toutes les dérivations sont intérieures, c'est-à dire du type $\mathrm{ad}(x)$.

Afin d'énoncer le théorème de Chevalley, nous introduisons dans les parties qui vont suivre les racines d'une algèbre de Lie semi-simple associées à une sous-algèbre de Cartan, ainsi que le groupe de Weyl associé.

1.2 Rappels : Décompositions primaires des représentations

Dans cette partie[2], nous supposons seulement que K est un corps commutatif. Soit V un espace vectoriel de dimension finie sur K, S un ensemble,

[2]Nous suivons ici Bourbaki, *Éléments de mathématiques : Groupes et algèbres de Lie*, début du chapitre 7

et r une application de S dans $End(V)$. Soit Π l'ensemble des applications de S dans K. On note pour $\lambda \in \Pi$:

$$V^{\lambda}(S) = \{v \in V | \forall s \in S, \exists n \in \mathbb{N}, (r(s) - \lambda(s))^n(v) = 0\} = \bigcap_{s \in P} V^{\lambda(s)}(s) \quad (*)$$

On rappelle que $x \in End(V)$ est trigonalisable si et seulement si :

$$V = \sum_{a \in k} V^a(x).$$

Nous commençons par deux lemmes techniques.

Lemme 1.6: Soit k' une extension de K. Soit $r' : S \to End(V \otimes_k k')$ l'application associée à r par composition avec l'application canonique. De même, on considère les applications $\lambda : S \to k$ comme des applications de $S \to k'$.

Avec ces notations, pour tout $\lambda \in \Pi$, on a :

$$(V \otimes_k k')^{\lambda}(S) = V^{\lambda}(S) \otimes_k k'.$$

Preuve : Soit (a_i) une base du K-espace vectoriel k'. Si $v \in V \otimes_k k'$, v se met de manière unique sous la forme $\sum v_i \otimes a_i$ où (v_i) est une famille à support fini d'éléments de V. On a, pour tout $s \in S$:

$$(r'(s) - \lambda(s))^n(v) = \sum (r(s) - \lambda(s))^n v_i \otimes a_i.$$

La conséquence suivante conclut le lemme :

$$v \in (V \otimes_k k')^{\lambda}(S) \Leftrightarrow v_i \in V^{\lambda}(S).$$

∎

Lemme 1.7: Soient $V,\ V',\ W$ trois espaces vectoriels. Soient $r : S \to End(V)$, $r' : S \to End(V')$ et $q : S \to End(W)$.

Soient $x, y \in End(V)$.

(i) Soit $B : V \times V' \to W$ une application bilinéaire telle que

$$q(s)B(v, v') = B(r(s)v, v') + B(v, r'(s)v'),$$

pour $s \in S,\ v \in V,\ v' \in V'$. Alors pour toutes applications $\lambda, \mu \in \Pi$, B applique $V^{\lambda}(S) \times V^{\mu}(S)$ dans $W^{\lambda+\mu}(S)$.

(ii) S'il existe un entier n tel que $(\text{ad } x)^n y = 0$, chaque $V^a(x)$ est stable par y.

(iii) Supposons comme déjà annoncé V de dimension finie. Si $V = \sum_{a \in k} V^a(x)$ et si chaque $V^a(x)$ est stable par y, alors il existe un entier n tel que $(\text{ad } x)^n y = 0$.

Preuve :

(i) On a :

$$(q(s)-\lambda(s)-\mu(s))B(v,v') = B((r(s)-\lambda(s))v,v')+B(v,(r'(s)-\mu(s))v'),$$

avec les mêmes notations, d'où par une récurrence facile sur n :

$$(q(s) - \lambda(s) - \mu(s))^n B(v, v') = \\ \sum_{i+j=n} \begin{pmatrix} n \\ i \end{pmatrix} B((r(s) - \lambda(s))^i v, v') + B(v, (r'(s) - \mu(s))^j v'),$$

d'où on déduit le lemme.

(ii) Soit $E = End(V)$. Soit B l'application bilinéaire $(u, v) \mapsto u(v)$ de $E \times V$ dans V. Par définition de ad x et l'associativité de la composition, on a donc :

$$x(B(u, v)) = B(u, x(v)) + B((\text{ad } x)(u), v),$$

pour $x \in E, u \in E, v \in V$. Faisons opérer x sur E par ad x. D'après le (i), on a $B(E^0(x), V^a(x)) \subset V^a(x), \forall a \in k$. Si $(\text{ad } x)^n y = 0$, alors $y \in E^0(x)$, donc $y(V^a(x)) \subset V^a(x)$, ce qui conclut (ii).

(iii) Pour prouver ce point, on peut remplacer V par $V^a(x)$, et x (resp y) par sa restriction à $V^a(x)$. Quitte à remplacer x par $x - a$, on peut donc supposer x nilpotent. On vérifie alors que $(\text{ad } x)^{2\dim V-1} = 0$.

■

Dans la suite, nous dirons que l'application $r : S \to End(V)$ satisfait la condition (PC) de "presque commutativité" si l'on a :

(PC) Pour tout couple (s, s') d'éléments de S, il exite un entier n tel que $(\text{ad } r(s))^n r(s') = 0$.

Proposition 1.8: Supposons V de dimension finie. Les conditions suivantes sont équivalentes :

(i) La condition (PC) est vérifiée et pour tout $s \in S$, $r(s)$ est trigonalisable.

(ii) Pour tout $\lambda \in \Pi$, $V^\lambda(S)$ est stable par $r(S)$, et l'on a $V = \sum_{\lambda \in \Pi} V^\lambda(S)$.

De plus, si V est de dimension finie et (PC) est vérifiée, $V^0(S)$ est stable par $r(S)$.

Preuve : Si $V = \sum_{\lambda\in\Pi} V^\lambda(S)$, on a $V = \sum_{a\in k} V^a(s)$ pour tout $s \in S$, et il résulte du lemme précédent (iii) et de la remarque préalable que (ii) implique (i).

Supposons maintenant la condition (i) vérifiée. L'indice (ii) du même lemme et la formule $(*)$ ci-dessus impliquent que chaque $V^\lambda(S)$ est stable par $r(S)$. Reste à prouver que $V = \sum_{\lambda\in\Pi} V^\lambda(S)$. Raisonnons par récurrence sur dim V en distinguant deux cas.

Premier cas : pour tout $s \in S$, $r(s)$ admet une et une seule valeur propre $\lambda(s)$, alors $V = V^\lambda(S)$.

Second cas : il existe $s \in S$ tel que $r(s)$ admet au moins deux valeurs propres distinctes. Alors V est somme directe des $V^a(S)$ pour $a \in k$, et dim $V^a(s) <$ dim V pour tout a. Chaque $V^a(S)$ est stable par $r(S)$ et il suffit d'appliquer l'hypothèse de récurrence.

Pour prouver le résultat supplémentaire, on peut, grâce au lemme 6, supposer K algébriquement clos. Alors on applique le (i) de ce lemme et pour tous $s \in S$, $r(s)$ est trigonalisable. ∎

Supposons maintenant S muni d'une structure d'espace vectoriel, l'application $r : S \to End(V)$ linéaire, V et S de dimensions finies. Nous rappelons les deux résultats suivants.

Lemme 1.9: Supposons la condition (PC) vérifiée et soit $\lambda : S \to k$ tel que $V^\lambda(S) \neq 0$. Alors si K est de caractéristique 0, l'application λ est linéaire.

Lemme 1.10: Supposons K infini et la condition (PC) vérifiée. Soit $\tilde{S}$ l'ensemble des $s \in S$ tel que $V^0(s) = V^0(S)$. Si $s \in S$, on note $P(s)$ le déterminant de l'endomorphisme de $V/V^0(S)$. Alors la fonction $s \mapsto P(s)$ est polynomiale sur S. On a $\tilde{S} = \{s \in S | P(s) \neq 0\}$: c'est un ouvert non vide de S pour la topologie de Zariski.

Soit maintenant $\mathfrak{h}$ une sous-algèbre nilpotente d'une algèbre de Lie $\mathfrak{g}$, soit (π, V) une représentation de $\mathfrak{g}$. On peut définir les espaces précédents avec $S = \mathfrak{h}$.

On peut aussi définir, pour tout λ de $\mathfrak{h}^*$, les espaces propres communs :

$$V_\lambda = \{x \in V | \forall h \in \mathfrak{h}, \pi(h)x = \lambda(h)x\}.$$

et les espaces caractéristiques :

$$V^{\lambda} = \{x \in V | \exists n \in \mathbb{N} \ \forall h \in \mathfrak{h} \, , (\pi(h) - \lambda(h))^n(x) = 0\}.$$

Une forme linéaire λ est un *poids* de la représentation π si que V_{λ} est non nul.

On rappelle le résultat bien connu suivant sur les espaces primaires :

Proposition 1.11: Pour toute représentation, on a :

$$V = \oplus_{\lambda \in \mathfrak{h}^*} V^{\lambda}.$$

Définition 1.12: On appelle *racine* un poids de la représentation adjointe. On note $\mathfrak{g}_{\lambda}$ les espaces propres communs associés. Autrement dit, chaque λ tel que $\mathfrak{g}_{\lambda}$ est non nul est appelé racine de $\mathfrak{g}$ relativement à $\mathfrak{h}$.

On note R l'ensemble des racines non nulles.

Définition 1.13: Soit $x \in \mathfrak{g}$. On appelle *nilespace* de ad x la réunion croissante $\cup_{n \geq 0} \mathrm{Ker}((\mathrm{ad}\ x)^n)$ et on le note $\mathfrak{g}^0(x)$ en accord avec ci-dessus. On note aussi $\mathfrak{g}^+(x) = \cap_{n \geq 0} Im((\mathrm{ad}\ x)^n)$.

Proposition 1.14: On a : $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}^0(x) \oplus \mathfrak{g}^+(x)$.

PREUVE : Soit $u = \mathrm{ad}(x)$. Par finitude de la dimension la suite des noyaux et la suite des images stationnent. D'après le théorème du rang, elles atteignent leurs limites au même indice m. Donc dim $\mathfrak{g}$ = dim $\mathfrak{g}^0(x)$ + dim $\mathfrak{g}^+(x)$.

Soit alors par l'absurde $y \in \mathfrak{g}^0(x) \cap \mathfrak{g}^+(x)$, non nul. On écrit $y = u^m(z)$. Soit i minimal tel que $u^i(y) = 0$. Alors $u^{m+i-1}(z) \neq 0$ et $u^{m+i}(z) = 0$, donc la suite des noyaux ne stationnerait pas à l'indice m mais à l'indice $m + i > m$.

■

Définition 1.15: Soit $x \in \mathfrak{g}$. Le polynôme caractéristique de $\mathrm{ad}(x)$ se développe :

$$det(T - \mathrm{ad}(x)) = T^n + \sum_{k=1}^{n} a_{n-k}(x) T^{n-k},$$

avec a_i des fonctions polynomiales sur $\mathfrak{g}$. On constate que la dimension de $\mathfrak{g}^0(x)$ est justement le plus petit entier i tel que $a_i(x)$ est non nul.

Soit l le minimum de l'ensemble $\{\dim\, \mathfrak{g}^0(x)\ |x \in \mathfrak{g}\,\}$.

Définition 1.16: On dit que x est *générique* si $\dim\, \mathfrak{g}^0(x)\ = l$; l est appelé le *rang* de $\mathfrak{g}$.

Notons deux lemmes utiles par la suite :

Lemme 1.17: Soit $\mathfrak{h}$ une algèbre nilpotente de $\mathfrak{g}$, alors $\mathfrak{h}$ est une sous-algèbre de Cartan si et seulement si $\mathfrak{h}\ = \mathfrak{g}^{\,0}(\mathfrak{h}\,)$.

PREUVE : Soit $\mathfrak{n}$ le normalisateur de $\mathfrak{h}$ dans $\mathfrak{g}$. Comme $[\mathfrak{h}\,,\mathfrak{n}\,] \subset \mathfrak{h}$ et que $\mathfrak{h}$ est nilpotente, il est clair que $\mathfrak{h}\ \subset \mathfrak{n}\ \subset \mathfrak{g}^{\,0}(\mathfrak{h}\,)$. Si $\mathfrak{g}^{\,0} = \mathfrak{h}$, on a $\mathfrak{h}\ = \mathfrak{n}$ et $\mathfrak{h}$ est son propre normalisateur dans $\mathfrak{g}$ et donc une sous-algèbre de Cartan.

Réciproquement, supposons $\mathfrak{g}^{\,0}(\mathfrak{h}\,) \neq \mathfrak{h}$. Appliquant le Théorème d'Engel à la représentation adjointe de $\mathfrak{h}$ dans $\mathfrak{g}^{\,0}(\mathfrak{h}\,)/\mathfrak{h}$ on obtient $\mathfrak{n}\ \neq \mathfrak{h}$ (le premier élément du drapeau obtenu a une préimage avant passage au quotient qui est dans $\mathfrak{n}$), donc $\mathfrak{h}$ n'est pas une sous-algèbre de Cartan, d'où la contraposée. ■

Lemme 1.18: Si $\mathfrak{h}$ est une sous-algèbre de Cartan de $\mathfrak{g}$, c'est une sous-algèbre nilpotente maximale de $\mathfrak{g}$.

PREUVE : Si $\mathfrak{k}$ est une sous-algèbre nilpotente de $\mathfrak{g}$ contenant $\mathfrak{h}$, il est clair que $\mathfrak{h}$ est une sous-algèbre de Cartan de $\mathfrak{k}$ (encore nilpotente et égale à son normalisateur dans $\mathfrak{k}$). Or pour une algèbre nilpotente $\mathfrak{k}$, la seule sous-algèbre de Cartan est elle-même (donc ici $\mathfrak{h} = \mathfrak{k}$). En effet, dans une algèbre nilpotente $\mathfrak{k}$, une sous-algèbre distincte de $\mathfrak{k}$ n'est pas égale à son normalisateur dans $\mathfrak{k}$.

Pour le voir, soit i le plus grand entier (qui existe car $\mathfrak{k}$ est nilpotente) tel que $\mathfrak{h}\ + \mathcal{C}^i\mathfrak{k}\ \neq \mathfrak{h}$. Alors $[\mathfrak{h}\ + C^i(\mathfrak{k}\,), \mathfrak{h}\,] \subset \mathfrak{h}\ + \mathcal{C}^{i+1}(\mathfrak{k}\,) \subset \mathfrak{h}$ (par maximalité de i). Par suite, le normalisateur de $\mathfrak{h}$ dans $\mathfrak{k}$ contient $\mathfrak{h}\ + \mathcal{C}^i(\mathfrak{k}\,)$: ceci contredit le fait qu'elle est une sous algèbre de Cartan. ■

On a alors :

Théorème 1.19: Soit x dans $\mathfrak{g}$, supposé générique. Alors il existe une unique sous-algèbre de Cartan contenant x, qui est $\mathfrak{g}^0(x)$.

PREUVE :

Considérons les deux parties de $\mathfrak{g}^0(x)$:

$$S = \{y \in \mathfrak{g}^0(x) \mid \mathrm{ad}(y)|_{\mathfrak{g}^+(x)} \text{ est bijectif}\}$$

$$U = \{y \in \mathfrak{g}^0(x) \mid \mathrm{ad}_{\mathfrak{g}^0(x)}(y) \text{ n'est pas nilpotent}\}.$$

On peut traduire ces conditions en termes de non-nullité de certains $a_i(x)$, donnés dans la définition précédente, donc ces deux ensembles sont des ouverts de Zariski de $\mathfrak{k}$.

De plus $x \in S$ donc S est non vide. Si U est non vide, alors $U \cap S$ non plus, car K est algébriquement clos. Soit donc $0 \neq y \in U \cap S$. Alors trigonalisant ad(y) sur $\mathfrak{g}^0(x) \oplus \mathfrak{g}^+(x)$ on constate que dim $(\mathfrak{g}^0(y)) >$ dim $\mathfrak{h}$, en contradiction avec le caractère générique de x.

Donc U est vide et $\mathfrak{g}^0(x)$ est nilpotente.

Par ailleurs, on peut écrire $\mathfrak{g}^0(x) = \mathfrak{g}^0(\mathfrak{h}')$ avec $\mathfrak{h}' = kx$ algèbre de Lie nilpotente. Donc par le lemme 17 appliqué à $\mathfrak{h}'$, $\mathfrak{g}^0(x)$ est une sous-algèbre de Cartan.

Montrons l'unicité : comme $x \in \mathfrak{h}$, $\mathfrak{g}^0(\mathfrak{h}) \subset \mathfrak{g}^0(x)$. De plus, par le lemme 17, on a :

$$\mathfrak{h} = \mathfrak{g}^0(\mathfrak{h})$$

donc $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}^0(x)$.

Ensuite comme, par le lemme 18, toute sous-algèbre de Cartan est maximale parmi les sous-algèbres nilpotentes de $\mathfrak{g}$, on conclut que $\mathfrak{h} = \mathfrak{g}^0(x)$.

■

1.3 Propriétés élémentaires des racines

Dans toute la suite, $\mathfrak{g}$ désigne une algèbre de Lie semisimple et $\mathfrak{h}$ une sous-algèbre de Cartan. Rappelons que K est algébriquement clos, et que B désigne la forme de Killing.

Lemme 1.20: Supposons que pour tout $\alpha \in R$, on ait :

$$\mathfrak{g}^\alpha = \mathfrak{g}_\alpha.$$

Alors pour tout x, y dans $\mathfrak{h}$ on a :

$$B(x,y) = \sum_{\alpha \in R} (\dim \mathfrak{g}^\alpha)\alpha(x)\alpha(y).$$

PREUVE : On a $\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus_{c \in R} \mathfrak{g}_c$.

On a de plus $B(x,y) = Tr(\mathrm{ad}(x)\mathrm{ad}(y)) = \sum_{c \in R} \mu_c$ avec μ_c la somme des valeurs propres de ad(x)ad(y) sur $\mathfrak{g}^c$ (car K est algébriquement clos).

Or $\mathrm{ad}(x)\mathrm{ad}(y)(x_c) = \mathrm{ad}(x)(c(y)x_c) = c(x)c(y)x_c$ donc $\mu_c = (\dim \mathfrak{g}^c)c(x)c(y)$.

■

Proposition 1.21:

(i) Si $\alpha, \beta \in \mathfrak{h}^*$, alors $[\mathfrak{g}^{\alpha}, \mathfrak{g}^{\beta}] \subset \mathfrak{g}^{\alpha+\beta}$.

(ii) Si $x \in \mathfrak{g}^{\alpha}$ alors $\mathrm{ad}(x)$ est nilpotent.

(iii) Si $x \in \mathfrak{g}^{\alpha}$ et $y \in \mathfrak{g}^{\beta}$ et $\alpha+\beta$ est non nul alors x et y sont orthogonaux sous B.

(iv) Si α est racine alors $-\alpha$ aussi et la restriction de B à $\mathfrak{g}^{\alpha} \times \mathfrak{g}^{-\alpha}$ est non dégénérée.

(v) La forme bilinéaire $B|_{\mathfrak{h}}$ est non dégénérée.

Preuve :

(i) Soient $x \in \mathfrak{h}$, $\alpha = \lambda(x)$, $\beta = \mu(x)$, $y \in \mathfrak{g}^{\lambda}$, $z \in \mathfrak{g}^{\mu}$. Une récurrence simple montre que :

$$(\mathrm{ad}\ x - (\alpha+\beta))^n[y,z] = \sum_{i=0}^{n} \frac{n!}{i!(n-i)!}[(\mathrm{ad}\ x - \alpha)^i y, (\mathrm{ad}\ x - \beta)^{n-i} z].$$

On a donc $(\mathrm{ad}\ x - \alpha - \beta)^n[y,z] = 0$ pour n assez grand, d'où $[y,z] \in \mathfrak{g}^{\lambda+\mu}$.

On remarque que ce résultat est aussi une conséquence du lemme 7.

(ii) Par récurrence en utilisant (i) précédente on a : $\mathrm{ad}(x)^k(y) \in \mathfrak{g}^{k.\alpha+\beta}$ si $y \in \mathfrak{g}^{\beta}$ qui est nul si k est assez grand puisque les poids sont en nombre fini. De plus, si $y \in \mathfrak{g}^{0}$ alors $\mathrm{ad}(x)(y) \in \mathfrak{g}^{\alpha}$. Comme $V = \oplus_{\alpha \in R} \mathfrak{g}^{\alpha}$, $\mathrm{ad}(x)$ est nilpotent.

(iii) Si $x \in \mathfrak{g}_{\alpha}$ et $y \in \mathfrak{g}_{\beta}$ alors l'application $\mathrm{ad}(x) \circ \mathrm{ad}(y)$ envoie $\mathfrak{g}^{\lambda}$ vers $\mathfrak{g}^{\lambda+\alpha+\beta}$, pour tout $\lambda \in \mathfrak{h}^*$. Vu que $\alpha+\beta \neq 0$ et qu'un nombre fini de $\mathfrak{g}^{\lambda}$ sont non nuls, on en déduite que $\mathrm{ad}(x) \circ \mathrm{ad}(y)$ est nilpotente. Ainsi sa trace est nulle, c'est-à-dire $B(x,y) = 0$.

(iv) Si $\alpha \in R$, l'espace $\mathfrak{g}^{\alpha}$ est non nul et orthogonal à $\sum_{\lambda \neq -\alpha} \mathfrak{g}^{\lambda}$ d'après le (ii). Comme B est non dégénérée, cela force $\mathfrak{g}^{-\alpha} \neq 0$ donc $-\alpha$ est une racine. Si $x \in \mathfrak{g}^{\alpha}$ est orthogonal à $\mathfrak{g}^{-\alpha}$, de nouveau d'après le (ii), il est orthogonal à $\mathfrak{g}$ et donc x=0.

(v) Comme $\mathfrak{g}^{0} = \mathfrak{h}$, si $x \in \mathfrak{h}$ est orthogonal à $\mathfrak{h}$, elle est de même que précédemment othogonale à $\mathfrak{g}$ par le (ii) et donc x=0.

■

Notations : Par conséquent, si $\alpha \in \mathfrak{h}^*$ on note t_{α} l'unique vecteur de $\mathfrak{h}$ tel que $\forall h \in \mathfrak{h}$, $B(t_{\alpha}, h) = \alpha(h)$. On note aussi $(\alpha, \beta) = B(t_{\alpha}, t_{\beta})$.

Proposition 1.22:

(i) L'ensemble des racines R engendre $\mathfrak{h}^*$.

(ii) La sous-algèbre de Cartan $\mathfrak{h}$ est abélienne.

(iii) Si $x \in \mathfrak{h}$, x est ad-semisimple et si $\lambda \in \mathfrak{h}^*$, $y \in \mathfrak{g}^{\lambda}$, on a $[x, y] = \lambda(x)y$ et donc $\mathfrak{g}_{\lambda} = \mathfrak{g}^{\lambda}$.

(iv) Si $x \in \mathfrak{g}_{\alpha}$ et $y \in \mathfrak{g}_{-\alpha}$ alors $[x, y] = B(x, y)t_{\alpha}$.

(v) Pour toute racine α, $[\mathfrak{g}_{\alpha}, \mathfrak{g}_{-\alpha}] = kt_{\alpha}$.

(vi) L'élément $\alpha(t_{\alpha}) = B(t_{\alpha}, t_{\alpha})$ est non nul. On peut donc définir $h_{\alpha} = 2t_{\alpha}/B(t_{\alpha}, t_{\alpha})$ et alors $\alpha(h_{\alpha}) = 2$.

(vii) Si $x_{\alpha} \in \mathfrak{g}_{\alpha}$ est non nul alors on peut trouver $y_{\alpha} \in \mathfrak{g}_{-\alpha}$ tel que $[x_{\alpha}, y_{\alpha}] = h_{\alpha}$.

Preuve :

(i) Si R n'engendre pas $\mathfrak{h}^*$ alors par dualité il existe $h \in \mathfrak{h}, h \neq 0$ tel que $\alpha(h) = 0\ \forall \alpha \in R$. Alors $B(h, y) = 0, \forall y \in \mathfrak{h}$ car $B(x, y) = \sum_{\alpha \in \mathfrak{h}^*}(\dim \mathfrak{g}^{\alpha})\alpha(x)\alpha(y)$ par 20. Or $\forall \alpha \in R, B(h, \mathfrak{g}_{\alpha}) = 0$ par la proposition 21.(iii). Donc $\mathfrak{h}$ est orthogonale à $\mathfrak{g}$ pour B, donc h=0 par non-dégénérescence, contradiction.

(ii) Soient $x,\ y \in \mathfrak{h}$. Si $\alpha \in R$, ad x et ad y laissent stable $\mathfrak{g}^{\alpha}$ par 21.(i). Or, d'après $(\mathrm{ad}\ [x, y])|_{\mathfrak{g}^{\alpha}} = [\mathrm{ad}\ x|_{\mathfrak{g}^{\alpha}}, \mathrm{ad}\ y|_{\mathfrak{g}^{\alpha}}]$, on voit que $(\mathrm{ad}\ [x, y])|_{\mathfrak{g}^{\alpha}}$ est de trace nulle. Or cette trace vaut $(\dim \mathfrak{g}^{\alpha})\alpha([x, y])$ donc $\alpha([x, y]) = 0, \forall \alpha \in R$ et donc $[x, y] = 0$ par le (i).

(iii) Soit ad $x = s + n$ une décomposition de Jordan de ad x, s semi-simple et n nilpotent. On sait que $s(y) = \lambda(x)y, \forall y \in \mathfrak{g}_{\lambda}$. Montrons que s est une dérivation. Si $y \in \mathfrak{g}^{\lambda}$, $z \in \mathfrak{g}^{\mu}$. On a alors $[y, z] \in \mathfrak{g}^{\lambda+\mu}$ et

$$s([y, z]) = (\lambda + \mu)(x)[y, z] = [\lambda(x)y, z] + [y, \mu(x)z] = [s(y), z] + [y, s(z)],$$

ce qui suffit pour montrer que s est une dérivation vu les sommes directes connues pour $\mathfrak{g}$.

Maintenant, comme $\mathfrak{g}$ est semi-simple, toute dérivation est intérieure, d'après le théorème (difficile) cité en première section. Donc $s = \mathrm{ad}\ u, u \in \mathfrak{g}$. Pour $h \in \mathfrak{h} = \mathfrak{g}^0$, on a $0 = s(h) = [u, h]$, donc u appartient au normalisateur de $\mathfrak{h}$ dans $\mathfrak{g}$, qui est $\mathfrak{h}$. De plus $n = \mathrm{ad}(x - u), x - u \in \mathfrak{h}$. Comme n est nilpotent, $B(x - u, x - u) = 0$ et donc $x = u$ par non dégénérescence de B, et donc x est ad-semisimple. Pour $y \in \mathfrak{g}_{\lambda}$, on a ainsi : $[x, y] = [u, y] = s(y) = \lambda(x)y$.

(iv) Soit $h \in \mathfrak{h}$, $x \in \mathfrak{g}^{\alpha}$, $y \in \mathfrak{g}^{-\alpha}$. Alors, on a en utilisant l'associativité de B, puis le (iii) :
$B(h, [x, y]) = B([h, x], y) = B(\alpha(h)x, y) = \alpha(x)B(x, y) = B(h, t_{\alpha})B(x, y)$,

donc
$$B(h, [x, y]) = B(h, B(x, y)t_\alpha).$$
Ainsi $([x, y] - B(x, y)t_\alpha)$ est un élément de $\mathfrak{h}$ orthogonal à $\mathfrak{h}$, donc nul. Donc $[x, y] = B(x, y)t_\alpha$.

(v) Montrons que $[\mathfrak{g}_\alpha, \mathfrak{g}_{-\alpha}]$ est non nul. Par 21.(iii) il existe $x \in \mathfrak{g}_\alpha$ non nul et $y \in \mathfrak{g}_{-\alpha}$ tels que $B(x, y)$ est non nul. On vient de voir que que $[x, y] = B(x, y)t_\alpha$; donc $[x, y]$ est non nul.

(vi) Si $\alpha(t_\alpha) = B(t_\alpha, t_\alpha)$ était nul, prenons comme précédemment $x \in \mathfrak{g}_\alpha$ non nul et $y \in \mathfrak{g}_{-\alpha}$ tels que $B(x, y)$ est non nul, et même, quitte à multiplier par un certain scalaire, $B(x, y) = 1$. Alors $[x, y] = t_\alpha$. Appelons $\mathfrak{a}$ le sous-espace engendré par x, y, t_α. Alors $\mathfrak{a}$ est une sous-algèbre de Lie résoluble, donc on déduit du théorème de Lie que ad t_α est nilpotent. Comme il estaussi semisimple, il est nul et $t_\alpha = 0$: contradiction. Il vient immédiatement que $\alpha(h_\alpha) = 2$.

(vii) Il suffit de multiplier y_α par un scalaire bien choisi.

■

Proposition 1.23: Tout algèbre de Lie semi-simple $\mathfrak{g}$ est engendrée (comme algèbre) par ses éléments nilpotents.

Preuve :

Ecrivons : $\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus (\oplus_{\alpha\neq 0}\ \mathfrak{g}_\alpha)$. D'une part les éléments de $\mathfrak{g}_\alpha$ sont nilpotents et engendrent $\mathfrak{g}_\alpha$.

D'autre part, $\mathfrak{h}$ est engendrée par les t_α, car ils forment une famille duale de celle constituée par les α, qui eux engendrent $\mathfrak{h}^*$. Comme $t_\alpha = [x_\alpha, y_\alpha]$ est engendré par des éléments nilpotents, $\mathfrak{h}$ l'est aussi. ■

Rappelons que R désigne l'ensemble des racines non nulles.

Proposition 1.24:

1. Si $\alpha \in R$ et $l.\alpha \in R$ alors $l \in \{-1; +1\}$.
2. Si $\alpha, \beta \in R$ alors $\beta(h_\alpha) \in \mathbb{Z}$ et $\beta - \beta(h_\alpha)\alpha \in R$.
3. Les espaces $\mathfrak{g}^\alpha$ sont de dimension 0 ou 1 et $(a, b) = \sum_{\alpha\in R} \alpha(a)\alpha(b)$.

Les différents points sont démontrés dans des lemmes ci-dessous.

Notations : Remarquons que si $x_\alpha \in \mathfrak{g}_\alpha$ et $y_\alpha \in \mathfrak{g}_{-\alpha}$ alors :
$$[h_\alpha, x_\alpha] = \alpha(h_\alpha)x_\alpha,\ [h_\alpha, y_\alpha] = -\alpha(h_\alpha)y_\alpha,\ \text{et } [x_\alpha, y_\alpha] = h_\alpha.$$

Notons pour alléger x, y, h pour $x_\alpha, y_\alpha, h_\alpha$. On a :

$$[h, x] = 2x;\ [h, y] = -2y;\ \text{et } [x, y] = h.$$

Alors, x, y, h engendrent une sous-algèbre de Lie de dimension trois, isomorphe à $\mathfrak{sl}_2(K)$.[3]

Etude de $\mathfrak{sl}_2(K)$

Lemme 1.25: *Kh est une sous-algèbre de Cartan de $\mathfrak{sl}_2(K)$.*

PREUVE : Tout d'abord ad(h) est diagonalisable de valeurs propres 2, 0 et -2 pour les vecteurs propres respectifs x, h, y de $\mathfrak{sl}_2(K)$. Donc Kh est formée d'éléments diagonaux dans S, qui commutent puisque $[h, h] = 0$. Soit alors $ax+by+ch \in \mathfrak{sl}_2(K)$. Si $[ax+by+ch, h] = 0$ alors $2ax-2by = 0$ et $a = b = 0$. Ainsi, Kh est maximale.

■

Etudions plus précisément les représentations de dimensio finie de $\mathfrak{sl}_2(K)$ à l'aide de la sous-algèbre Kh. La sous-algèbre de Cartan considérée ici étant une droite, on identifiera les formes linéaires à leurs coefficients. Les poids des représentations seront donc des éléments de K.

Soit V une représentation de $\mathfrak{sl}_2(K)$ de dimension finie.

Lemme 1.26: *Si $v \in V_\lambda$ alors $x.v \in V_{\lambda+2}$ et $y.v \in V_{\lambda-2}$*

PREUVE : $h.(x.v) = [h, x].v + x.h.v = 2x.v + \lambda x.v = (\lambda + 2)x.v$. ■

Puisque les poids de la représentation sont en nombre fini, il existe λ tel que $V_\lambda \neq 0$ et $V_{\lambda+2} = 0$. Soit $v_0 \in V_\lambda$ non nul. Soit $v_i = (1/i!)y^i.v_0$.

Lemme 1.27: *On a les relations suivantes :*

1. $h.v_i = (\lambda - 2i).v_i$.
2. $y.v_i = (i + 1)v_{i+1}$.
3. $x.v_i = (\lambda - i + 1)v_{i-1}$.

PREUVE :

[3]En effet, si on considère la base de $\mathfrak{sl}_2(K)$:

$$h = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, y = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

on constate qu'elle vérifie ces relations.

1. Itérer le lemme précédent.
2. Par définition.
3. Raisonnons par récurrence sur l'entier i :
   Tout d'abord on a $x.v_1 = \lambda.v_0$, ce qui initialise la propriété.
   Supposons qu'à un certain rang i on ait $x.v_{i-1} = (\lambda - i + 2)v_{i-2}$, et montrons l'hérédité : $ix.v_i = x.y.v_{i-1} = [x,y].v_{i-1} + y.x.v_{i-1} = h.v_{i-1} + y.x.v_{i-1}$ pour commencer. Mais par hypothèse de récurrence on a
   $$y.x.v_{i-1} = y.(\lambda - (i-1) + 1)v_{(i-1)-1}$$
   d'où :
   $$h.v_{i-1} + y.x.v_{i-1} = (\lambda - 2i).v_{i-1} + y.(\lambda - (i-1) + 1)v_{(i-1)-1}.$$
   En conséquence $ix.v_i = (\lambda - 2i).v_{i-1} + y.(\lambda - i + 2)v_{i-2}$, ce qui en réduisant donne :
   $$ix.v_i = (\lambda - 2i)v_{i-1} + (\lambda - i + 2)(i-1)v_{i-1} = i(\lambda - i + 1)v_{i-1}.$$
   En simplifiant par i, on a le résultat.

■

Proposition 1.28: Si V est irréductible, alors les poids sont exactement $m, m-2, m-4, ..., -m$ où $m+1$ est la dimension de V.

Preuve :

Par (1) du lemme 27 les v_i sont des vecteurs propres pour $\mathrm{ad}(h)$ associés à des valeurs distinctes, donc seul un nombre fini d'entre eux est non nul. Soit $n > 0$ le plus petit tel que $v_n = 0$. De (2) du lemme 27 on déduit que $\forall i < n \; v_i \neq 0$. Soit $V' = Vect\{v_i | i < n\}$. Déjà $V' \neq 0$ et les formules du lemme montrent que V' est stable. Donc $V = V'$, et $m + 1 = n$. V est donc somme directe des espaces propres associés aux v_i, car le nombre de tels v_i vaut dim V. Les poids sont donc exactement les $(\lambda - 2i)$ avec $n > i \geq 0$.

Appliquons enfin le (3) du lemme 27 à v_n, alors $0 = (\lambda - n + 1)v_m$ donc $\lambda = n + 1 = m$. Les poids sont exactement les entiers positifs annoncés. ■

Réciproquement, on montre que les formules du lemme précédent définissent une représentation irréductible de dimension finie de $\mathfrak{sl}_2(K)$. Par la suite, nous admettrons le fait suivant, qui est un cas particulier du théorème de Weyl :

Théorème 1.29: Toute représentation de $\mathfrak{sl}_2(K)$ de dimension finie, est somme directe de représentations *irréductibles* de $\mathfrak{sl}_2(K)$ de dimension finie.

Ayant classifié toutes les représentations irréductibles de $\mathfrak{sl}_2(K)$, nous connaissons donc toutes les représentations de $\mathfrak{sl}_2(K)$ de dimension finie.

Lemme 1.30: Pour toute racine α la dimension de $\mathfrak{g}_{\alpha}$ est 1.

Preuve :

Supposons le contraire par l'absurde.

Soit $0 \neq y \in \mathfrak{g}_{-\alpha}$. On peut alors prendre $x_\alpha \in \mathfrak{g}_{\alpha}$ tel que $B(x_\alpha, y) = 0$, en effectuant des combinaisons linéaires en dimension > 1. On choisit alors y_α comme plus haut. Alors $\{x_\alpha, y_\alpha, h_\alpha\}$ engendre un espace $\mathfrak{sl}_2(K)$, et $\mathfrak{g}$ est une représentation de $\mathfrak{sl}_2(K)$ notée π. D'une part $\pi(x_\alpha)(y) = [x_\alpha, y] = B(x_\alpha, y)h_\alpha = 0$. Mais d'autre part $\mathfrak{g}$ comme représentation est somme de représentations irréductibles de $\mathfrak{sl}_2(K)$ de la forme vue plus haut, i.e. :

$$\mathfrak{g} = \oplus_k \pi_{m_k}$$

avec $m_k > 0$.

Le lemme précédent nous fournit même les vecteurs propres v_i^m précis ; en particulier, on peut décomposer y :

$$y = \sum_{i,k} a_{i,k} v_i^{m_k}.$$

Comme on l'a vu, y est annulé par x_α ; donc les vecteurs $v_i^{m_k}$ qui interviennent effectivement dans la décomposition de y sont nécessairement liés à la valeur propre m_k. Chaque représentation irréductible π_{m_k} en fournit exactement un, associé au coefficient a_k. En accord avec le lemme 27 notons $v_0^{m_k}$ un tel vecteur.

On peut donc écrire simplement :

$$y = \sum_k a_k v_0^{m_k}.$$

Observons alors que

$$[h_\alpha, y] = -\alpha(h_\alpha)y = -2y = \sum_k -2a_k v_0^{m_k},$$

et aussi que

$$[h_\alpha, y] = \sum_k a_k [h_\alpha, v_0^{m_k}] = \sum_k a_k m_k v_0^{m_k}.$$

Puisque les vecteurs $v_0^{m_k}$ forment une famille libre, l'égalité des deux quantités conduit à $m_k = -2$, ce qui est absurde. ∎

Lemme 1.31: Si α et β sont deux racines alors $\beta(h_\alpha)$ est entier et $\beta - \beta(h_\alpha)\alpha$ est une racine.

Preuve : Considérons la representation de $\mathfrak{sl}_2(K)$: $M = \oplus_{i\in\mathbb{Z}}\mathfrak{g}_{\beta+i\alpha}$. Chaque $\mathfrak{g}_{\alpha+i\beta}$ ici est de dimension 1 (ou 0), et fournit exactement un poids pour $\mathfrak{sl}_2(K)$: $\beta(h_\alpha)+2i$, car $\alpha(h_\alpha)=2$; ainsi $\beta(h_\alpha)$ est entier.

Par étude de $\mathfrak{sl}_2(K)$, ces poids sont entiers, répartis de deux en deux et deux à deux opposés. De plus dans le présent cas de figure : $\beta+i\alpha$ est une racine si et seulement si $\beta(h_\alpha)+2i$ est un poids. On a donc la liste exacte des racines de la forme $\beta+i\alpha$: $\beta-r\alpha$, $\beta-(r-1)\alpha$, ..., β,...,$\beta+q\alpha$.

Comme $-(\beta-r\alpha)(h_\alpha) = (\beta+q\alpha)(h_\alpha)$ on a $\beta(h_\alpha) = r-q$. Or, comme $-r \leq 0 \leq q$ donne $-r \leq q-r \leq q$ et puisque $(\beta-\beta(h_\alpha)\alpha)(h_\alpha) = q-r$, $(\beta-\beta(h_\alpha)\alpha)$ est une racine.

■

Lemme 1.32: Si α est une racine, les seules racines proportionelles à α sont α et $-\alpha$.

Preuve :

Soit $\beta = l\alpha$ une racine. Alors $2l = l\alpha(h_\alpha) = \beta(h_\alpha)$ donc $2l$ est entier et aussi $2/l$ en inversant les rôles de α et β. Donc l est $1, 2, 1/2$ ou leurs opposés.

Soit $\beta = \alpha$. Considérons M comme dans la preuve précédente. On a $M = \oplus_{i\in\mathbb{Z}}\mathfrak{g}_{\beta+i\alpha} = \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{g}_\alpha \oplus \mathfrak{g}_{-\alpha} \oplus \mathfrak{g}_{2\alpha} \oplus \mathfrak{g}_{-2\alpha}$, vu ce qui précède.

Supposons $\mathfrak{g}_{2\alpha}$ non nul.

Il était déjà vrai dans le théorème précédent que M est irréductible : en effet chacune des composantes irréductibles de M possède le poids, 0 ou 1, de multiplicité 1. Un seul poids de ce type se retrouvant dans M, une seule composante existe c'est donc M elle-même. Pourtant $\mathfrak{h} \oplus \mathfrak{g}_\alpha \oplus \mathfrak{g}_{2\alpha}$ est un sous-module strict de M, non nul. Ceci contredit l'irréductibilité.

■

Reste à prouver que $(a,b) = \sum_{c\in R}(a,c)(c,b)$. Ceci, par le jeu des définitions introduites équivaut à : $(a,b) = B(t_a,t_b) = \sum_{c\in R} c(t_a)c(t_b) = \sum_{c\in R}(a,c)(c,b)$. C'est la deuxième égalité qui mérite preuve, mais celle-ci est immédiate :

Lemme 1.33: $\forall x,y \in \mathfrak{h}$ on a $B(x,y) = \sum_{\alpha\in R}\alpha(x)\alpha(y)$.

Preuve : Par le premier lemme de cette partie et le lemme 30. ■

Enfin, on montre que le corps K de base est sans importance pourvu qu'il contienne $\mathbb{Q}$. En effet, R engendre $\mathfrak{h}^*$. Soit $(\alpha_i)_i$ une famille d'éléments de R qui forment une base de $\mathfrak{h}^*$. Alors si $\beta \in R$, β se décompose sur $(\alpha_i)_i$ ainsi :

$$\beta = \sum_i c_i\alpha_i$$

donc

$$2(\beta,\alpha_j)/(\alpha_j,\alpha_j) = \sum_i (2(\alpha_i,\alpha_j)/(\alpha_j,\alpha_j))c_i$$

Les coefficients du type $2(\gamma,\alpha_j)/(\alpha_j,\alpha_j)$ sont entiers pour tout $\gamma \in R$ donc les c_i sont rationnels.

Soit alors E le sous-espace vectoriel sur $\mathbb{Q}$ engendré par R.

Proposition 1.34:

(i) Le produit de deux éléments de E par $(.,.)$ est dans $\mathbb{Q}$.

(ii) De plus $(.,.)$ est définie positive.

(iii) Enfin $\dim_k(\mathfrak{h}^*) = \dim_{\mathbb{Q}}(E)$

Preuve :

1. Il suffit de prouver que $B(t_\alpha, t_\alpha)$ est rationnel. Or $B(h_\alpha, h_\alpha) = \sum_{\beta \in R} \beta(h_\alpha)^2$ ce qui conclue.
2. De plus $(.,.)$ est définie positive. En effet $(a,a) = \sum_{c \in R}(a,c)(c,a)$ qui est une somme de carrés, strictement positive si a est non nul.
3. Enfin $\dim_k(\mathfrak{h}^*) = \dim_{\mathbb{Q}}(E)$: on a vu que la base est la même.

■

On reprend certaines des propriétés des racines, en remarquant que

$$2(\alpha,\beta)/(\alpha,\alpha) = \beta(h_\alpha).$$

1. L'ensemble des racines R engendre E.
2. Si $\alpha \in R$ et $l.\alpha \in R$ alors $l \in \{-1; +1\}$.
3. Si $\alpha \in R$ alors $\sigma_\alpha(R) = R$.
4. Si $\alpha \in R$ et $\beta \in R$ alors $2(\alpha,\beta)/(\alpha,\alpha) \in \mathbb{Z}$ et $\beta - 2(\alpha,\beta)/(\alpha,\alpha)\alpha \in R$.

Reste à introduire le groupe de Weyl et nous pourrons énoncer le Théorème de Chevalley.

1.4 Groupe de Weyl

On pose E le sous-ensemble de $\mathfrak{h}^*$ engendré comme $\mathbb{Q}$-e.v. par les racines.

Définition 1.35: Le sous-groupe W de $\mathfrak{gl}(E)$ engendré par $\{\sigma_\alpha | \alpha \in R\}$ est le *groupe de Weyl*.

Une *base* Δ de R est une base de E comme espace vectoriel telle que dans Δ chaque racine voit ses coordonnées entières et toutes de même signe ;

l'existence d'une telle base est établie plus loin. Dans ce cas on note pour tout $\alpha \in R$, $\alpha > 0$ si et seulement si les coordonnées de α dans Δ sont positives. On note $\alpha > \beta$ si $\alpha - \beta > 0$.

Soit $\lambda \in E$, on dit que λ est un *poids*[4] quand $\forall \alpha \in R, 2.(\lambda, \alpha)/(\alpha, \alpha) \in \mathbb{Z}$.

Etant donnée une base Δ, un poids λ est dit dominant lorsque pour tout $\alpha \in \Delta$, on a $2.(\lambda, \alpha)/(\alpha, \alpha)$ positif. On note Λ et Λ^+ les ensembles constitués des poids et des poids dominants.

Dans la suite nous montrons qu'il existe une base, que tout élément de Λ est conjugué à un élément de Λ^+ sous l'action de W, et qu'il n'y a qu'un nombre fini de poids dominants inférieurs à un autre poids dominant donné.

Définition 1.36: Soit $P_\alpha = \{\beta \in E | (\beta, \alpha) = 0\}$ i.e. $P_\alpha = \{\beta \in E | \sigma_\alpha(\beta) = 0\}$. Comme le corps de base est ici $\mathbb{Q}$, $E - (\cup_{\alpha \in R}(P_\alpha))$ est non vide. Ses éléments sont dits réguliers, les autres sont singuliers. Tensorisant par le corps des réels, on appelle chambres de Weyl les points à coordonnées rationnelles des composantes connexes dans $\mathbb{R}^n$ de $E - (\cup_{\alpha \in R}(P_\alpha))$.

Soit $\gamma \in E$ et $R^+(\gamma) = \{\alpha \in R | (\gamma, \alpha) > 0\}$. Un élément de $R^+(\gamma)$ est décomposable s'il est somme de deux éléments de $R^+(\gamma)$, indécomposable sinon.

Lemme 1.37: Soit $\alpha, \beta \in R$ avec $(\alpha, \beta) > 0$. Alors $\alpha - \beta \in R$.

Preuve : $(\alpha, \beta) > 0$ signifie $\beta(h_\alpha) > 0$. Or $\beta(h_\alpha) = r - q$ donc $r > q$ avec les notations du lemme 31. Ainsi $r \geq 1$ et la liste des racines de la forme $\beta + i\alpha$ contient $\beta - \alpha$. ∎

Théorème 1.38: Soit $\Delta = \{\alpha \in R^+(\gamma) | \alpha \text{ est indécomposable }\}$. Alors Δ est une base.

Preuve :

1. Toute racine de $R^+(\gamma)$ est combinaison linéaire à coefficients dans $\mathbb{Z}$ d'éléments de Δ.

   C'est vrai pour les racines dans Δ, i.e. les indécomposables. Et chaque décomposable par finitude de R est somme finie à coefficients entiers d'indécomposables.

[4] Attention à ne pas confondre avec la précédente notion de poids : en particulier une racine est par définition un poids pour la représentation adjointe, tandis qu'un poids ici n'est pas nécéssairement une racine, la réciproque cependant étant vraie.

2. $\forall \alpha, \beta \in \Delta, \alpha = \beta$ ou $(\alpha, \beta) < 0$.
   Sinon $(\alpha, \beta) > 0$ donc $\alpha - \beta$ est une racine puis $\alpha = \beta + (\alpha - \beta)$ serait décomposable.
3. Δ est libre.
   Supposons $\sum r_\alpha \alpha = 0$.
   Séparons les coefficients positifs des coefficients négatifs ; on obtient :
   $$\sum_A s_\alpha \alpha = \sum_B t_\beta \beta$$
   avec $s_\alpha > 0$ et $t_\beta > 0$. Donc $(\sum s_\alpha \alpha, \sum s_\alpha \alpha) = (\sum s_\alpha \alpha, \sum t_\beta \beta) = \sum s_\alpha t_\beta (\alpha, \beta)$. Or (α, β) est négatif, donc $(\sum s_\alpha \alpha, \sum s_\alpha \alpha) = 0$ puis $\sum s_\alpha \alpha = 0$. Or $(\sum s_\alpha \alpha, \gamma) = \sum s_\alpha (\alpha, \gamma)$; et comme $(\alpha, \gamma) > 0$ et $s_\alpha \geq 0$ pour les α dans A, on conclut que $s_\alpha = 0$ pour tout α dans A, et de même pour tout β dans B.
   D'où la conclusion.
4. Δ est une base de R.
   En effet Δ est libre et engendre $R^+(\gamma)$ avec coefficients dans $\mathbb{Z}$. Comme $R = R^+(\gamma) \cup (-R^+(\gamma))$ ceci conclut.

■

Théorème 1.39: Tout élément de Λ est conjugué sous l'action de W à un élément de Λ^+ .

Preuve : Soit $\gamma \in \Lambda$. Soit $\delta = \frac{\sum_{\alpha > 0} \alpha}{2}$ et $\sigma \in W$ tel que $(\sigma(\gamma), \delta)$ est maximum.

Soit $\alpha \in \Delta$. On constate que σ_α envoie les racines positives sur des positives, sauf α qui l'est sur $-\alpha$. En effet si $\beta \geq 0$ alors on écrit $\beta = \sum_i k_i \alpha_i$, mais $\sigma_\alpha(\beta) = \beta - 2\frac{(\beta,\alpha)}{(\alpha,\alpha)}\alpha$ donc $\sigma_\alpha(\beta)$ a encore des coefficients positifs, donc tous le sont.

Donc $\sigma_\alpha(\delta) = \delta - \alpha$. Alors $(\sigma(\gamma), \delta) \geq (\sigma_\alpha \sigma(\gamma), \delta) \geq (\sigma(\gamma), \sigma_\alpha(\delta)) \geq (\sigma(\gamma), \delta - \alpha) = (\sigma(\gamma), \delta) - (\sigma(\gamma), \alpha)$. Donc $\forall \alpha \in \Delta, (\sigma(\gamma), \alpha) \geq 0$.

Par conséquent, $\sigma(\gamma)$ est conjugué de γ et est dominant. ■

Théorème 1.40:
$\forall \lambda \in \Lambda^+ , Card(\{\mu \in \Lambda^+ | \mu < \lambda\}) < \infty$

Preuve : Soit λ et μ dominants et $\lambda < \mu$. Alors d'une part $\lambda + \mu$ est dominant, d'autre part $\lambda - \mu$ est somme de racines positives. Par conséquent $0 \leq (\lambda + \mu, \lambda - \mu)$ donc $0 \leq (\lambda, \lambda) - (\mu, \mu)$. Donc $\mu \in \{x \in E | (x, x) \leq (\lambda, \lambda)\}$. Tensorisant par $\mathbb{R}$, on obtient un compact contenant $\{x \in E | (x, x) \leq$

$(\lambda, \lambda)\}$; son intersection avec l'ensemble discret Λ^+ est finie, et celle de $\{x \in E | (x, x) \leq (\lambda, \lambda)\}$ l'est également.

$\blacksquare$

Enfin, remarquons :

Proposition 1.41: Soit V une représentation de dimension finie de $\mathfrak{g}$ et μ un poids de V. Alors $\mu \in \Lambda$.

PREUVE : V fournit en particulier une représentation de $\mathfrak{sl}_2(K)$ donc $\forall \alpha \in R$, $\mu(h_\alpha) \in \mathbb{Z}$. Donc par définition, $\mu \in \Lambda$. $\blacksquare$

1.5 Enoncé du théorème de Chevalley

Notations : Supposons en toute généralité qu'un groupe G agit sur $\mathfrak{a}$ une algèbre de Lie. Notons alors $S(\mathfrak{a}^*)$ les fonctions polynomiales sur $\mathfrak{a}$ et $S(\mathfrak{a}^*)^G$ les fonctions polynomiales sur $\mathfrak{a}$ invariantes par l'action du groupe G, $S^m(\mathfrak{a}^*)$ celles qui se situent dans la composante homogène de degré m. Soit enfin $i : S(\mathfrak{g}^*) \to S(\mathfrak{h}^*)$ la restriction, qui est un morphisme d'algèbres. Le théorème de Chevalley s'énonce alors ainsi :

Théorème 1.42: L'application i restreinte à $S(\mathfrak{g}^*)^{\mathrm{Aut}_e(\mathfrak{g})}$ est un isomorphisme d'algèbres de $S(\mathfrak{g}^*)^{\mathrm{Aut}_e(\mathfrak{g})}$ vers $S(\mathfrak{h}^*)^W$.

1.6 Conjugaison des sous-algèbres de Cartan

L'objet de cette section est de prouver :

Théorème 1.43: Soient $\mathfrak{h}$ et $\mathfrak{k}$ deux sous-algèbres de Cartan de $\mathfrak{g}$. Alors il existe α un élément de $\mathrm{Aut}_e(\mathfrak{g})$ tel que $\alpha(\mathfrak{h}) = \mathfrak{k}$.

PREUVE :

Tout $x \in \mathfrak{g}_\alpha$ est ad-nilpotent puisque $\mathrm{ad}(x)(\mathfrak{g}_\beta) \in \mathfrak{g}_{\alpha+\beta}$. donc $\exp(\mathrm{ad}(x))$ existe.

Soit alors p la dimension de $\mathfrak{g}$, afin que $\mathrm{ad}(x)^p = 0$ et notons $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ les racines non nulles. Définissons alors f, application de $\mathfrak{h} \times \mathfrak{g}_{\alpha_1} \times \mathfrak{g}_{\alpha_2} \times \cdots \times \mathfrak{g}_{\alpha_n}$ vers $\mathfrak{g}$, par :

$$f(h, x_1, x_2, \cdots, x_n) = (\sum_{j=0}^{p-1} \frac{1}{j!} (\mathrm{ad} x_1)^j)(\sum_{j=0}^{p-1} \frac{1}{j!} (\mathrm{ad} x_2)^j) \cdots (\sum_{j=0}^{p-1} \frac{1}{j!} (\mathrm{ad} x_n)^j) h,$$

i.e.

$$f(h, x_1, x_2, \cdots, x_n) = \exp(\mathrm{ad}(x_1)) \exp(\mathrm{ad}(x_2)) \cdots \exp(\mathrm{ad}(x_n))h.$$

La première expression montre que f est polynomiale.
Soit $\mathfrak{h}'$ l'ouvert $\mathfrak{h} - \bigcup_{1 \leq i \leq n} \mathrm{Ker}(\alpha_i)$ (on rappelle $\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus (\oplus_i \mathfrak{g}_{\alpha_i})$).
Soit T l'application linéaire tangente à f en $(h_0, 0, \cdots, 0)$.
Alors on a :
$f(h_0 + h, 0, 0, \cdots, 0) = h_0 + h$,
$f(h_0, x, 0, \cdots, 0) = \exp(\mathrm{ad}(x))h_0 = h_0 + [x, h_0] + \cdots$,
et plus généralement :

$$f(h_0, 0, \cdots 0, x, 0, \cdots, 0) = \exp(\mathrm{ad}(x))h_0 = h_0 + [x, h_0] + \cdots .$$

Ainsi $T(h, 0, 0, \cdots, 0) = h$ et $T(0, \cdots, 0, x, 0, \cdots, 0, 0) = [x, h_0]$. Donc

$$T(\mathfrak{h} \times 0 \times \cdots \times 0) = \mathfrak{h}$$

et

$$T(0 \times 0 \times .. \times \mathfrak{g}_{\alpha_i} \times 0 \times \cdots \times 0) = -[h_0, \mathfrak{g}_{\alpha_i}],$$

Puisque $h_0 \in \mathfrak{h}'$ on a $-[h_0, \mathfrak{g}_{\alpha_i}] = \mathfrak{g}_{\alpha_i}$, puis

$$T(0 \times 0 \times .. \times \mathfrak{g}_{\alpha_i} \times 0 \times \cdots \times 0) = \mathfrak{g}_{\alpha_i}$$

Donc au final T est surjective donc f est une application dominante. Or l'image d'un ouvert de Zariski par une application dominante est un ouvert de Zariski dense. Donc $f(\mathfrak{h}' \times \mathfrak{g}_{\alpha_1} \times \cdots \times \mathfrak{g}_{\alpha_2} \times \cdots \times \mathfrak{g}_{\alpha_n})$ contient une partie A ouverte de Zariski non vide.

Evidemment, $\mathrm{Aut}_e(\mathfrak{g})(\mathfrak{h}')$ contient A. Mais on peut faire de même avec $\mathfrak{k}$, et $\mathrm{Aut}_e(\mathfrak{k})(\mathfrak{h}')$ contient un ouvert de Zariski non vide noté B.

Dans ce cas $A \cap B$ est non vide. On a alors $s.h_1 = t.k_1$, i.e. $t^{-1}.s.h_1 = k_1$ avec $s, t \in \mathrm{Aut}_e(\mathfrak{g})$ et h_1,k_1 dans $\mathfrak{h}'$, $\mathfrak{a}'$.

Or $\mathfrak{h}$ et $\mathfrak{k}$ sont les nilespaces de $\mathrm{ad}(h_1)$ et $\mathrm{ad}(k_1)$. En effet h_1 est générique. Dès lors cela résulte du lemme 19 sachant que h_1 est générique.

Donc $t^{-1}s(\mathfrak{h}) = \mathfrak{a}$.

■

1.7 Modules de Verma

Nous admettons le théorème suivant, qui décrit les représentations irréductibles de $\mathfrak{g}$; on pourra se référer à "Introduction to Lie Algebras and Representation Theory" de James E. Humphreys ou à "Algèbres Envelopantes" de J. Dixmier.

Théorème 1.44:
Soit U une représentation de dimension finie de $\mathfrak{g}$ et λ un poids dominant. Alors il existe une représentation irréductible V de $\mathfrak{g}$, dont le plus grand poids (pour la relation d'ordre $<$ introduite avec le groupe de Weyl) est λ, et telle que V_λ est de dimension 1.

De plus le groupe de Weyl W agit sur les espaces V_μ, où μ est un poids de la représentation V, en permutant ces espaces et en conservant leur dimension.

1.8 Preuve du Théorème de Chevalley

On utilise plusieurs lemmes :

Proposition 1.45:
Soit $w \in W$. Alors il existe $\theta \in \mathrm{Aut}_e(\mathfrak{g})$ tel que $\theta_{|\mathfrak{h}} = w$.
Par conséquent, si $f \in S(\mathfrak{g}^*)^{\mathrm{Aut}_e(\mathfrak{g})}$ alors $f_{|\mathfrak{h}} \in S(\mathfrak{h}^*)^W$.

Preuve : Sans perte de généralité on suppose $w = \sigma_\alpha$. Soit x_α et y_α dans $\mathfrak{g}_\alpha$ et $\mathfrak{g}_{-\alpha}$ tels que $[x_\alpha, y_\alpha] = h_\alpha$. Posons

$$\theta = (\exp(\mathrm{ad}(x_\alpha)))(\exp(\mathrm{ad}(-y_\alpha)))(\exp(\mathrm{ad}(x_\alpha))),$$

et montrons que $\theta = \sigma_\alpha$. Pour cela écrivons $\mathfrak{h} = \mathrm{Ker}\ \alpha \oplus h_\alpha k$.

Si $h \in \mathrm{Ker}\alpha$ alors $[x_\alpha, h] = 0$ et $[y_\alpha, h] = 0$ donc seule l'identité est utile dans la définition de θ. Donc $\theta(h) = h$.

Concernant h_α, on a successivement :

1. $[x_\alpha, h_\alpha] = -2x_\alpha$, donc
$$(\exp(\mathrm{ad}(x_\alpha)))(h_\alpha) = h_\alpha - 2x_\alpha.$$
2. $[x_\alpha, h_\alpha - 2x_\alpha] = 2y_\alpha - 2h_\alpha$ puis $[y_\alpha, [y_\alpha, h_\alpha - 2x_\alpha]] = -4x_\alpha$. Ceci donne :
$$(\exp \mathrm{ad} - y_\alpha)(h_\alpha - 2x_\alpha) = (h_\alpha - 2x_\alpha) + (2y_\alpha - 2h_\alpha) + 1/2(-4x_\alpha),$$
autrement dit
$$(\exp(\mathrm{ad}(-y_\alpha))(h_\alpha - 2x_\alpha)) = -2x_\alpha - h_\alpha.$$
3. $(\exp(\mathrm{ad}(x_\alpha)))(-2x_\alpha - h_\alpha) = -2x_\alpha - h_\alpha + 2x_\alpha = -h_\alpha$.

C'est ce qu'on cherchait.

Soit alors $f \in S(\mathfrak{g}^*)^{\mathrm{Aut}_e(\mathfrak{g})}$. f est laissée invariante par les $\theta \in \mathrm{Aut}_e(\mathfrak{g})$ construits plus haut donc sa restriction à $\mathfrak{h}$ est invariante par W. Donc $f_{|\mathfrak{h}} \in S(\mathfrak{h}^*)^W$. ■

Cette propriété prouve que le morphisme i défini précédemment vérifie :

$$i(S(\mathfrak{g}^*)^{\mathrm{Aut}_e(\mathfrak{g})}) \subset S(\mathfrak{h}^*)^W.$$

Lemme 1.46:

Soit $f \in S(\mathfrak{g}^*)$. Alors $f \in S(\mathfrak{g}^*)^{\mathrm{Aut}_e(\mathfrak{g})}$ si et seulement si pour tout x nilpotent, ad $x.f = 0$.

Avant d'entamer la preuve, précisons l'action de ad x.

Si f est un monôme, à savoir $f = \prod_{i=1}^n u_i$, on pose :

$$(\mathrm{ad}x.f) = \sum_{i=1}^n u_1(y) \cdots u_{i-1}(y) u_i(-[x,y]) \cdots u_n(y),$$

et dans le cas général ad x agit linéairement en tant que dérivation.

Preuve : On note $\theta(x)v = \mathrm{ad}(x).v$.

Supposons $f \in S(\mathfrak{g}^*)^{\mathrm{Aut}_e(\mathfrak{g})}$. Soit x nilpotent, et p l'indice de nilpotence. Dans le cas où f est du type $f = \prod_{i=1}^n u_i$, on a $(\mathrm{ad}\ x)^{np}.f = 0$.

Ensuite, on montre d'abord pour chaque monôme f, par une récurrence sur son degré que

$$f(\exp(t\ \mathrm{ad}\ x)(y)) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} t^n (\theta(x))^n (f))(y).$$

En effet, le résultat se déduit par linéarité de f pour l'initialisation, et si $f = PQ$, l'hérédité s'obtient en appliquant la formule de Leibniz pour les dérivations.

Donc si f est invariante pour l'action de ad x, alors $\theta(x)^n(f) = 0$ pour tout $n \geq 1$, d'ou la condition suffisante.

Réciproquement, posons $\phi(t) = f(\exp(t\ \mathrm{ad}\ x)(y))$. C'est une fonction polynomiale en t, de dérivée en 0 valant $-(\theta(x)f)(y)$, si bien que si l'invariance par automorphisme intérieur est vérifiée pour f, on obtient $\theta(x)f = 0$ pour tout élément nilpotent x de $\mathfrak{g}$. Or d'après le lemme 23, $\mathfrak{g}$ est engendrée en tant qu'algèbre de Lie par ses éléments nilpotents, d'où la condition nécessaire. ■

Lemme 1.47: Soit (π, V) une représentation de $\mathfrak{g}$ et m un entier alors la fonction $f : x \rightarrow tr(\pi(x)^m)$ appartient à $S(\mathfrak{g}^*)^{\mathrm{Aut}_e(\mathfrak{g})}$.

Preuve :

Puisque chaque élément $\pi(x)$ est linéaire en x, on a $f \in S^n(\mathfrak{g}^*)$.

De plus, avec les notations du lemme précédent, on a :

$$(\mathrm{ad}\, x.f)y = \sum_{i=1}^{n} tr(\pi(y)^{i-1}\pi(-[x,y])\pi(y)^{n-i}) = -tr(\pi(x)\pi(y)^n - \pi(y)^n\pi(x)) = 0,$$

l'avant dernière égalité provenant d'une sommation télescopique. Donc, par le lemme précédent, f est invariante par action adjointe.

■

Lemme 1.48: Soit m un entier. Tout élément de $S^m(\mathfrak{h}^*)^W$ est combinaison linéaire de fonctions polynomiales sur $\mathfrak{h}$ de la forme $tr(\pi(.)^m)$.

Preuve :

En premier lieu, réduisons le problème.

Rappelons que l'ensemble Λ contient R, donc qu'il engendre $\mathfrak{h}^*$ comme espace vectoriel. Ainsi les λ^n, avec $n \geq 0$, engendrent $S(\mathfrak{h}^*)$.

Soit $T^m(\mathfrak{h}^*)$ l'espace engendré par $\{\lambda^m | \ \lambda \in \Lambda^+\}$. Montrons que $S^m = T^m$. Soient en effet a et b deux poids dominants ; alors $(a+ib)^m \in T^m$ pour tout entier i tel que $0 \leq i \leq m-1$. La matrice de ces m vecteurs dans la base $a^i b^{m-i}$ est inversible donc les $a^i b^{m-i}$ sont combinaison linéaire de $(a+ib)^m$. Donc $\forall i \leq m,\ a^i b^{m-i} \in T^m$.

Une induction prouve alors que $\prod a_i^{k_i} \in T^m$; puis, en prenant pour a^i et b^i les éléments de Δ, on conclut.

Ainsi les λ^m, avec $\lambda \in \Lambda^+$, engendrent $S^m(\mathfrak{h}^*)$. Pour tout $f \in S(\mathfrak{h}^*)$, posons ensuite $\sigma f = \sum_{w \in W} fw \in S(\mathfrak{h}^*)^W$. Si $f \in S(\mathfrak{h}^*)^W$, alors f et σf sont proportionnelles ; donc σ est surjective. Ainsi les $\sigma(\lambda^m)$ engendrent $S^m(\mathfrak{h}^*)^W$.

De plus tout poids étant conjugué sous l'action de W à un poids dominant par 39 on peut prendre $\lambda \in \Lambda^+$ dans $\sigma(\lambda^m)$. Donc l'ensemble $\{\sigma(\lambda^m) | \ \lambda \in \Lambda^+\}$ engendre $S^m(\mathfrak{h}^*)^W$. C'est sur lui qu'il suffit de prouver le lemme.

Soit $E_\lambda = \{\mu \in \Lambda^+ \mid \mu < \lambda\}$. Soit (π, V) une représentation simple de dimension finie et de plus grand poids λ. Soit $g(x) = tr((\pi(x))^m)$. On a vu que $V = \oplus_{\alpha \in \Lambda} V_\alpha$, et que les α sont permutés par W avec conservation de l'ordre de multiplicité ; donc $g(x)$ est combinaison linéaire des $\sigma(\mu^m)$, avec $\mu \in E_\lambda$. Par conséquent, λ^m est combinaison linéaire de g et de certains μ^m, avec $\mu \in E_\lambda$.

Or ce dernier ensemble est fini ; une récurrence sur son cardinal conclut.

■

Théorème 1.49: L'application i restreinte à $S(\mathfrak{g}^*)^{\mathrm{Aut}_e(\mathfrak{g})}$ est un isomorphisme d'algèbres de $S(\mathfrak{g}^*)^{\mathrm{Aut}_e(\mathfrak{g})}$ vers $S(\mathfrak{h}^*)^W$.

Preuve :

Montrons l'injectivité. Soit $f \in (\mathfrak{g}^*)^{\mathrm{Aut}_e(\mathfrak{g})}$ telle que $f_{|\mathfrak{h}} = 0$. Soit G l'ensemble des éléments génériques de $\mathfrak{g}$. Si $x \in \mathfrak{g}$ alors il existe $\theta \in \mathrm{Aut}_e(\mathfrak{g})$ tel que $\theta(x) \in \mathfrak{h}$. Ensuite comme f est invariante par $\mathrm{Aut}_e(\mathfrak{g})$, on a :

$$f(x) = f(\theta(x)) = 0.$$

Donc $f_{|G} = 0$. Or G est un ouvert de Zariski et f un polynôme, donc $f = 0$.

Montrons la surjectivité. Soit $f \in (\mathfrak{h}^*)^W$. Alors le lemme précédent montre que f est combinaison linéaire de fonctions du type $tr(\pi(.)^m)$:

$$\forall x \in \mathfrak{h} \;\; f(x) = \sum a_i tr(\pi_i(x)^m).$$

Mais le membre de droite est aussi défini sur $\mathfrak{g}$ et par le lemme 47, il appartient à $S(\mathfrak{g}^*)^{\mathrm{Aut}_e(\mathfrak{g})}$.

■

1.9 Base de Chevalley

Nous concluons cette partie par un résultat algébrique qui nous sera utile dans la partie suivante. Plus précisément nous introduisons la notion de base de Chevalley d'une algèbre de Lie, et nous admettrons qu'une algèbre de Lie semi-simple sur un corps algébriquement clos de caractéristique nulle admet des bases de Chevalley.

Définition 1.50: Soit l le rang de $\mathfrak{g}$. On appelle *base de Chevalley* de $\mathfrak{g}$ une base de $\mathfrak{g}$ de la forme $\{X_\alpha | \alpha \in R; H_i,\ i \in [1, l]\}$ vérifiant les conditions suivantes :

1. $\forall \alpha \in R, X_\alpha \in \mathfrak{g}^\alpha$ *et* $[X_\alpha, X_{-\alpha}] = H_\alpha$.
2. Il existe une base de R $B = \{\beta_1, \cdots, \beta_l\}$ tel que $\forall i \in [1, l],\ H_i = H_{\beta_i}$.
3. Si $\alpha,\ \beta,\ \alpha+\beta \in R$, alors $[X_\alpha, X_\beta] = N_{\alpha,\beta} X_{\alpha+\beta}$, et $N_{-\alpha,-\beta} = -N_{\alpha,\beta} \in \mathbb{Z}$.

2 Théorème de Chevalley : Cadre espaces symétriques

2.1 Décomposition de Cartan

Dans cette partie, $\mathfrak{g}$ désigne une algèbre de Lie sur $\mathbb{C}$, $\mathfrak{g}^R$ la même algèbre vue comme algèbre de Lie sur $\mathbb{R}$.

Nous rappelons que même dans le cadre algébrique, une sous-algèbre de Cartan de $\mathfrak{g}$, est une sous-algèbre abélienne maximale dont tous les éléments sont semi-simples et réciproquement (nous avons d'ailleurs montré, au passage, dans la partie précédente, tous les points à l'exception de la maximalité pour l'implication). Nous utiliserons dans cette partie cette définition équivalente.

Enfin, le groupe de Weyl, sera introduit ici d'une manière un peu différente mais, on peut montrer que les deux types de descriptions, en terme de racines comme de quotient, se prêtent aux deux cadres – algébrique et différentiel.

Notations : Soit $\mathfrak{a}$ une algèbre de Lie sur $\mathbb{R}$, nous notons Int($\mathfrak{a}$) son groupe adjoint, c'est-à-dire le sous-groupe de Lie immergé de GL($\mathfrak{a}$) correspondant à la sous-algèbre de Lie ad($\mathfrak{a}$) de $\mathfrak{gl}$ ($\mathfrak{a}$). Notons Aut($\mathfrak{a}$) le sous groupe fermé de GL($\mathfrak{a}$) des automorphismes de $\mathfrak{a}$, c'est donc un groupe de Lie par le théorème de Cartan. On note $\partial(\mathfrak{a})$ son algèbre de Lie, dont on sait que c'est l'algèbre de Lie des dérivations de $\mathfrak{a}$ [5], de tel sorte que Int($\mathfrak{a}$) $\subset$ Aut($\mathfrak{a}$) puisque ad($\mathfrak{a}$) $\subset \partial(\mathfrak{a})$.

De plus, remarquons que si $\mathfrak{a}$ est semi-simple le fait que Int($\mathfrak{a}$) et Aut($\mathfrak{a}$) ont même algèbre de Lie implique que Int($\mathfrak{a}$) est la composante neutre de Aut($\mathfrak{a}$), et partant un sous-groupe de Lie (fermé)[6].

Définition 2.51: Une *forme réelle* de $\mathfrak{g}$ est une sous-algèbre $\mathfrak{g}_0$ de l'algèbre de Lie réelle $\mathfrak{g}^R$ telle que :

$$\mathfrak{g}^R = \mathfrak{g}_0 \oplus J\mathfrak{g}_0 \ (\textit{somme directe d'espaces vectoriels}),$$

où J désigne l'opérateur de $\mathfrak{g}^R$ correspondant à la multiplication par i dans $\mathfrak{g}$.

[5]En effet, le théorème de Cartan nous indique aussi que $\partial(\mathfrak{a})=\{D \in \mathfrak{gl}(\mathfrak{a}) \ : \ \forall\, t \in \mathbb{R}, e^{tX} \in Aut(\mathfrak{a})\}$. Soient $X, Y \in \mathfrak{a}, D \in \partial(\mathfrak{a})$, la relation $e^{tD}[X,Y] = [e^{tD}X, e^{tD}Y], \forall t \in \mathbb{R}$ implique $D[X,Y] = [DX,Y] + [X,DY]$ donc D est une dérivation. Réciproquement, pour une dérivation, l'identité de Leibniz redonne la relation de morphisme pour e^{tD} car exp est ici l'exponentielle usuelle de End($\mathfrak{a}$).

[6]Pour les résultats élémentaires sur les groupes et algèbres de Lie, nous renvoyons pour plus de détail aux notes de cours de F. Paulin : *Introduction à la géométrie différentielle* dont nous utilisons les conventions.

Dans ce cadre, l'application $\sigma : X + iY \mapsto X - iY (X, Y \in \mathfrak{g}_0)$ est appelée *conjugaison* de $\mathfrak{g}$ par rapport à $\mathfrak{g}_0$.

Alors, σ est un morphisme involutif de $\mathfrak{g}^R$, antilinéaire dans $\mathfrak{g}$. En fait, se donner une forme réelle revient à se donner un tel morphisme, et alors $\mathfrak{g}_0$ est l'ensemble des points fixes de σ et $J\mathfrak{g}_0$ l'espace propre associé à -1.

Lemme 2.52: Toute algèbre de Lie semi-simple $\mathfrak{g}$ sur $\mathbb{C}$ possède une forme réelle qui est compacte, c'est-à-dire telle que son groupe adjoint est compact.

PREUVE : Notons B la forme de Killing sur $\mathfrak{g} \times \mathfrak{g}$, $\mathfrak{h}$ une sous-algèbre de Cartan de $\mathfrak{g}$, R le système de racine correspondant. Pour chaque $\alpha \in R$, soit X_α les éléments d'une base de Chevalley que l'on fixe, si bien que $B(X_\alpha, X_{-\alpha}) = 1$ et ainsi

$$\begin{aligned} B(X_\alpha - X_{-\alpha}, X_\alpha - X_{-\alpha}) &= -2 \\ B(i(X_\alpha + X_{-\alpha}), i(X_\alpha + X_{-\alpha})) &= -2 \\ B(X_\alpha - X_{-\alpha}, i(X_\alpha + X_{-\alpha})) &= 0 \\ B(iH_\alpha, iH_\alpha) &= -\alpha(H_\alpha) < 0. \end{aligned}$$

Comme $B(X_\alpha, X_\beta) = 0$ si $\alpha + \beta \neq 0$, B est donc définie négative sur

$$\mathfrak{g}_k = \sum_{\alpha \in R} \mathbb{R}(iH_\alpha) + \sum_{\alpha \in R} \mathbb{R}(X_\alpha - X_{-\alpha}) + \sum_{\alpha \in R} \mathbb{R}(i(X_\alpha + X_{-\alpha})).$$

De plus, $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_k \oplus i\mathfrak{g}_k$. Enfin, la relation $N_{\alpha,\beta} = -N_{-\alpha,-\beta}$ implique que $\forall X, Y \in \mathfrak{g}_k,\ [X, Y] \in \mathfrak{g}_k$ (calcul simple). Ainsi $\mathfrak{g}_k$ est une forme réelle de $\mathfrak{g}$. La forme de Killing de $\mathfrak{g}_k$ étant la restriction de B, elle est définie négative, ce qui implique que $\mathfrak{g}_k$ est compacte par la proposition suivante. ∎

Proposition 2.53: Soit $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie semi-simple sur $\mathbb{R}$. Alors $\mathfrak{g}$ est compacte, c'est-à-dire de groupe adjoint compact, si et seulement si la forme de Killing B de $\mathfrak{g}$ est définie négative.

PREUVE : Pour la condition suffisante, il suffit de remarquer que le groupe $O(B)$ des transformations linéaires sur $\mathfrak{g}_k$ laissant B invariante est alors compact, d'où de même ses sous groupes-fermés $\mathrm{Aut}(\mathfrak{g}_k)$ et $\mathrm{Int}(\mathfrak{g}_k)$.

Pour la condition nécessaire, supposons $\mathfrak{g}$ algèbre de Lie compacte semi-simple. Comme $\mathrm{Int}(\mathfrak{g})$ est compacte, il existe une forme quadratique définie positive invariante Q, sous l'action du groupe linéaire compact $\mathrm{Int}(\mathfrak{g})$ (il suffit de moyenner la forme bilinéaire associée à une forme quadratique définie positive quelconque par rapport à la mesure de Haar définie sur le groupe compact. Comme $Int(\mathfrak{g})$ est un groupe de Lie compact, on peut aussi construire une mesure invariante unimodulaire pour ne pas utiliser l'existence et l'unicité d'une mesure de Haar sur un groupe compact). Notons ϕ la forme bilinéaire associée, et on considère une base orthogonale $\mathcal{B} = (X_1, \cdots, X_n)$ de $\mathfrak{g}$ correspondante. En dérivant la relation $\phi(X,Y) = \phi(e^{tad(Z)}X, e^{tad(Z)}Y)$, on obtient $\phi([Z,X],Y) + \phi(X,[Z,Y]) = 0$, si bien que pour tout Z dans $\mathfrak{g}$, $ad(Z)$ a une matrice antisymétrique dans $\mathcal{B}$. Ainsi, la forme de Killing est négative, si on note $(a_{ij}(Z))$ la matrice de $ad(Z)$ dans cette base, on a en effet :

$$B(Z,Z) = Tr(ad(Z)ad(Z)) = \sum_{i,j} a_{ij}(Z)a_{j,i}(Z) = -\sum_{i,j} a_{ij}(Z)^2 \leq 0.$$

Ensuite, comme on est sur un $\mathbb{R}$ - espace vectoriel et que B est non dégénérée, elle est nécessairement définie négative. ■

Lemme 2.54: Soient $\mathfrak{g}_0$ une algèbre de Lie semi-simple sur $\mathbb{R}$, $\mathfrak{g}$ sa complexifiée, et $\mathfrak{u}$ une forme réelle compacte de $\mathfrak{g}$. Soient σ et τ les conjugaisons par rapport à $\mathfrak{g}_0$ et $\mathfrak{u}$. Alors, il existe un automorphisme φ de $\mathfrak{g}$ tel que la forme réelle compacte $\varphi(\mathfrak{u})$ soit invariante sous σ.

Preuve : Définissons la forme hermitienne B_τ sur $\mathfrak{g} \times \mathfrak{g}$ par :

$$B_\tau(X,Y) = -B(X,\tau Y), \qquad X,Y \in \mathfrak{g}.$$

Elle est définie positive car $\mathfrak{u}$ est compacte donc B est définie négative sur $\mathfrak{u}$ par la proposition précédente. La transformation linéaire $N = \sigma\tau$ est un automorphisme de l'algèbre de Lie complexe $\mathfrak{g}$ et laisse ainsi la forme de Killing B-invariante si bien qu'en utilisant $\tau^2 = \sigma^2 = I$, on trouve que N est auto-adjoint pour B_τ :

$$B_\tau(NX,Y) = B(NX,\tau Y) = B(X, N^{-1}\tau T = Y) = B(X,\tau NY) = B_\tau(X,NY).$$

Soient alors $X_1, \cdots, X_n$ une base de $\mathfrak{g}$ de diagonalisation de N, et soient $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$ les valeurs propres positives de $P = N^2$ correspondantes. Pour $t \in \mathbb{R}$, soit P^t la transformation linéaire de $\mathfrak{g}$ représentée dans la base précédente par les $(\lambda_i)^t > 0$, qui commutent avec N. Soient c_{ij}^k les constantes de structure de $\mathfrak{g}$. Le fait que P soit un automorphisme implique successivement :

$$\lambda_i\lambda_j c_{ij}^k = \lambda_k c_{ij}^k \qquad (1 \leq i,j,k \leq n)$$

$$(\lambda_i)^t(\lambda_j)^t c_{ij}^k = (\lambda_k)^t c_{ij}^k \qquad (t \in \mathbb{R}),$$

d'où on voit que P^t est un automorphisme de $\mathfrak{g}$.

Considérons alors l'application $\tau_1 = P^t\tau P^{-t}$ de $\mathfrak{g}$ dans $\mathfrak{g}$, qui n'est autre que la conjugaison relativement a la forme réelle compacte $P^t\mathfrak{u}$. De plus, on constate que $\tau N\tau^{-1} = N^{-1}$ et donc $\tau P = P^{-1}\tau$ soit par un calcul matriciel direct $\tau P^t = P^{-t}\tau$ pour tout $t \in \mathbb{R}$. En conséquence, on obtient les relations :

$$\sigma\tau_1 = \sigma P^t\tau P^{-t} = \sigma\tau P^{-2t} = NP^{-2t}$$

$$\tau_1\sigma = P^t\tau P^{-t}\sigma = P^{2t}\tau\sigma = N^{-1}P^{2t}.$$

Soit pour $t = \frac{1}{4}$, on trouve $\sigma\tau_1 = \tau_1\sigma$, et remarquant que cette condition de commutation équivaut à l'invariance sous σ voulue pour $\varphi\mathfrak{u} = P^{\frac{1}{4}}\mathfrak{u}$, le résultat est établi. ■

Définition 2.55: Soient $\mathfrak{g}_0$ une algèbre de Lie semi-simple sur $\mathbb{R}$, $\mathfrak{g}$ sa complexifiée, σ la conjugaison de $\mathfrak{g}$ par rapport à $\mathfrak{g}_0$. Une somme directe $\mathfrak{g}_0 = \mathfrak{k}_0 \oplus \mathfrak{p}_0$ avec $\mathfrak{k}_0$ une sous-algèbre et $\mathfrak{p}_0$ un sous-espace vectoriel est appelée *décomposition de Cartan* s'il existe une forme réelle compacte $\mathfrak{g}_k$ de $\mathfrak{g}$ telle qu'on ait les relations suivantes (où i désigne l'opérateur de la structure complexe de $\mathfrak{g}$) :

$$\sigma.\mathfrak{g}_k \subset \mathfrak{g}_k, \qquad \mathfrak{k}_0 = \mathfrak{g}_0 \cap \mathfrak{g}_k, \qquad \mathfrak{p}_0 = \mathfrak{g}_0 \cap (i\mathfrak{g}_k) \qquad \text{(CAR)}$$

D'après les deux lemmes précédents, toute algèbre de Lie semi-simple sur $\mathbb{R}$ admet une décomposition de Cartan.

Proposition 2.56: Soient $\mathfrak{g}_0$ une algèbre de Lie semi-simple sur $\mathbb{R}$ qui s'écrit comme somme directe d'une sous algèbre $\mathfrak{k}_0$ et d'un sous-espace $\mathfrak{p}_0$, B sa forme de Killing. Les propriétés suivantes sont équivalentes :

(i). $\mathfrak{g}_0 = \mathfrak{k}_0 \oplus \mathfrak{p}_0$ est une décomposition de Cartan de $\mathfrak{g}_0$.

(ii). $\forall T \in \mathfrak{k}_0 \backslash \{0\}\ B(T,T) < 0, \qquad \forall X \in \mathfrak{p}_0 \backslash \{0\}\ B(X,X) > 0,$
et l'application $s_0 : T + X \mapsto T - X, \quad (T \in \mathfrak{k}_0, X \in \mathfrak{p}_0)$ est un automorphisme.

Si ces conditions sont vérifiées, $\mathfrak{k}_0$ est maximale parmi les sous-algèbres de $\mathfrak{g}_0$ dont le groupe de Lie associé dans $\mathrm{Int}(\mathfrak{g}_0)$ est compact.

Preuve : $(ii) \Rightarrow (i)$. Comme s_0 est un automorphisme, on a $B(\mathfrak{k}_0 , \mathfrak{p}_0) = 0$, $[\mathfrak{k}_0 , \mathfrak{p}_0] \subset \mathfrak{p}_0$ et $[\mathfrak{p}_0 , \mathfrak{p}_0] \subset \mathfrak{k}_0$ donc le sous-espace $\mathfrak{g}_k = \mathfrak{k}_0 + i\mathfrak{p}_0$ est une sous-algèbre et même une forme réelle compacte, bien sûr satisfaisant (CAR).

Réciproquement, (CAR) implique facilement $(ii) \Rightarrow (i)$. en utilisant comme ci dessus la proposition 53.

Admettons un instant que $Int(\mathfrak{g}_0)$ et $Int(\mathfrak{g}_k)$ peuvent être considérés comme des sous-groupes fermés de $Int(\mathfrak{g}^R)$, ce que nous prouvons juste après. Alors, comme $Int(\mathfrak{g}_k)$ est compacte, il en est de même de $Int(\mathfrak{g}_0) \cap Int(\mathfrak{g}_k)$. Ce dernier groupe est donc un sous-groupe de Lie de $Int(\mathfrak{g}_0)$ qui est le groupe adjoint de l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}_0 \cap \mathfrak{g}_k = \mathfrak{k}_0$. Ainsi, il reste à voir la condition de maximalité. Par l'absurde supposons $\mathfrak{k}_1$ être une sous-algèbre de $\mathfrak{g}_0$ contenant strictement $\mathfrak{k}_0$ et de groupe adjoint compact. Soit alors $X \neq 0, X \in \mathfrak{k}_1 \cap \mathfrak{p}_0$. Soit η la conjugaison de $\mathfrak{g}$ par rapport à $\mathfrak{g}_k$. Alors, $\eta\mathfrak{g}_0 \subset \mathfrak{g}_0$ (et on remarque aussi $\eta X = -X$ car $X \in \mathfrak{p}_0 \subset i\mathfrak{g}_k$) et définissons la forme bilinéaire B_η sur $\mathfrak{g}_0 \times \mathfrak{g}_0$ par :

$$B_\eta(Y, Z) = -B(Y, \eta Z), \qquad Y, Z \in \mathfrak{g}_0 .$$

Elle est symétrique, définie positive toujours par la proposition 53 et on a aussi :

$$B_\eta(adX(Y), Z) = -B([X, Y], \eta Z) = \\ B(Y, [X, \eta Z]) = -B(Y, [\eta X, \eta Z]) = B_\eta(Y, adX(Z)).$$

Ainsi adX a des valeurs propres réelles et non toutes nulles mais alors la suite $(e^{nadX})_{n\in\mathbb{Z}}$ ne peut pas être incluse dans un groupe compact de matrice. Ceci contredit la définition de $\mathfrak{k}_1$.

Reste à montrer la fermeture $Int(\mathfrak{g}_0)$ et $Int(\mathfrak{g}_k)$ dans $Int(\mathfrak{g}^R)$ admise momentanément. Plus généralement, nous montrons le résultat suivant : considérons $\mathfrak{g}_0$ une forme réelle de l'algèbre de Lie semi-simple complexe $\mathfrak{g}$ de conjugaison σ. Soit G_0 le sous-groupe immergé (connexe) de $Int(\mathfrak{g}^R)$ d'algèbre de Lie $ad(\mathfrak{g}_0)$, alors G_0 est un sous-groupe fermé de $Int(\mathfrak{g}^R)$ isomorphe à $Int(\mathfrak{g}_0)$ en tant que groupe de Lie. C'était donc ce sous-groupe que nous considérions précédemment.

En effet, à un automorphisme s de $\mathfrak{g}^R$, correspond un automorphisme $\tilde{s}$ de $Int(\mathfrak{g}^R)$ tel que $\tilde{s}(e^{adX}) = e^{ad(s.X)}, (X \in \mathfrak{g}^R)$. En particulier, il existe un morphisme $\tilde{\sigma}$ de $Int(\mathfrak{g}^R)$ tel que $(d\tilde{\sigma})_e(adX) = ad(\sigma.X)$ pour $X \in \mathfrak{g}^R$. Puisque ad est un isomorphisme de $\mathfrak{g}^R$ sur $ad(\mathfrak{g}^R)$, ceci prouve que $ad(\mathfrak{g}_0)$ est l'ensemble des points fixes de $(d\tilde{\sigma})_e$, si bien que G_0 est la composante neutre de l'ensemble des points fixes de $\tilde{\sigma}$, et à ce titre un sous-groupe fermé.

Ensuite, soit ad_0 la représentation adjointe de $\mathfrak{g}_0$, et notons, pour chaque endomorphisme A de $\mathfrak{g}^R$ laissant $\mathfrak{g}_0$ invariant, A_0 sa restriction à $\mathfrak{g}_0$. Alors pour chaque X de $\mathfrak{g}_0$, on a $(adX)_0 = ad_0X$ et l'application $A \mapsto A_0$ envoie G_0 sur $Int(\mathfrak{g}_0)$. Cette application est en fait un isomorphisme car si $A \in G_0$ est tel que A_0 est l'identité, comme A commute avec la structure complexe J, A est aussi l'identité. Enfin, on a un morphisme analytique (donc de groupe de Lie) car c'est une submersion en l'identité. ∎

2.2 Sous-espace de Cartan

Notations : Dans cette partie et par la suite, on considère $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie complexe semi-simple, $\mathfrak{g}_0$ une forme réelle, $\mathfrak{g}_0 = \mathfrak{k}_0 \oplus \mathfrak{p}_0$ une décomposition de Cartan de conjugaison σ, $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{p}$ les complexifiés. Soit $\mathfrak{u}$ la forme réelle compacte $\mathfrak{k}_0 \oplus i\mathfrak{p}_0$ associée de conjugaison τ. On note $\theta = \sigma\tau = \tau\sigma$. C'est l'automorphisme de $\mathfrak{g}$ d'ordre 2 valant 1 sur $\mathfrak{k}$ et -1 sur $\mathfrak{p}$. Nous remarquons en examinant les valeurs propres de θ que

$$[\mathfrak{k}, \mathfrak{k}] \subset \mathfrak{k}, \qquad [\mathfrak{k}, \mathfrak{p}] \subset \mathfrak{p}, \qquad [\mathfrak{p}, \mathfrak{p}] \subset \mathfrak{k}.$$

On a des résultats correspondant pour $\mathfrak{p}_0$ et $\mathfrak{k}_0$. Notons aussi $K = \exp\, ad\, \mathfrak{k}_0$ le sous-groupe compact (connexe) de $\mathrm{Int}(\mathfrak{g}_0)$ associé à $\mathfrak{k}_0$ (la forme des éléments étant donnée par la démonstration du théorème de Cartan sur les sous-groupes fermés d'un groupe de Lie). On déduit des relations précédentes, puisqu'un sous-espace vectoriel de dimension finie est toujours fermé :

$$k.\mathfrak{k}_0 \subset \mathfrak{k}_0, \qquad k.\mathfrak{p}_0 \subset \mathfrak{p}_0 \qquad \forall k \in K.$$

Soient enfin $\mathfrak{a}_0$ une sous-algèbre abélienne maximale de $\mathfrak{p}_0$ (on l'appelle *sous-espace de Cartan*), $\mathfrak{a}$ sa complexifiée dans $\mathfrak{p}$. Soit $\mathfrak{h}_0$ une sous-algèbre abélienne maximale de $\mathfrak{g}_0$ contenant $\mathfrak{a}_0$ (elle existe par le lemme de Zorn). Remarquons que sa complexifiée $\mathfrak{h}$ est une sous-algèbre de Cartan de $\mathfrak{g}$. Comme une sous-algèbre de Cartan est une sous-algèbre abélienne maximale dont tous les éléments sont semi-simples, il suffit en effet de montrer cette deuxième propriété. On constate d'abord que si $X \in \mathfrak{h}_0$ et $Y \in \mathfrak{a}_0$, on a

$$[X - \theta X, Y] = [X, Y] - \theta[X, \theta Y] = [X, Y] + \theta[X, Y] = 0 + 0,$$

l'avant dernière égalité venant de $\theta Y = -Y$ car $Y \in \mathfrak{p}_0$ et la dernière du caractère abélien. Or puisque $X - \theta X \in \mathfrak{p}_0$, il vient, par maximalité de $\mathfrak{a}_0$, que $X - \theta X \in \mathfrak{a}_0$ si bien que $\mathfrak{h}_0$ est stable par θ et on a donc la décomposition :

$$\mathfrak{h}_0 = \mathfrak{h}_0 \cap \mathfrak{k}_0 \oplus \mathfrak{h}_0 \cap \mathfrak{p}_0 .$$

Maintenant, pour la forme hermitienne définie positive sur $\mathfrak{g} \times \mathfrak{g}$ B_τ du lemme 54, on a pour $Z \in \mathfrak{u}$ $B_\tau([Z, X], Y) + B_\tau(X, [Z, Y]) = 0$. Donc si adZ laisse un sous-espace invariant, il laisse aussi son orthogonal pour B_τ invariant et donc adZ est semi-simple. Donc pour $H \in (\mathfrak{h} \cap \mathfrak{k}) \cup (\mathfrak{h} \cap \mathfrak{p})$, $ad\ H$ est semi-simple. Or $ad\ H_1$ et $ad\ H_2$ commutent si $H_1 \in \mathfrak{h} \cap \mathfrak{k}$ et si $H_2 \in \mathfrak{h} \cap \mathfrak{p}$ donc $ad\ (H_1 + H_2)$ est aussi semi-simple et la somme directe montrée juste avant permet de conclure que $\mathfrak{h}$ est une sous-algèbre de Cartan.

Soit R l'ensemble des racines non nulles de $\mathfrak{g}$ par rapport à $\mathfrak{h}$. On note R_p l'ensemble des racines qui ne s'annulent pas identiquement sur $\mathfrak{a}$ et R^+

l'ensemble des racines positives par rapport à un ordre fixé sur R. Enfin soit $P_+ = R^+ \cap R_p$.

Lemme 2.57: Soient $\mathfrak{a}_0$ et $\mathfrak{a}_0'$ deux sous-espaces abélien maximaux de $\mathfrak{p}_0$. Alors, on a :

(i) Il existe un élément $H \in \mathfrak{a}_0$ dont le centralisateur dans $\mathfrak{p}_0$ est $\mathfrak{a}_0$

(ii) Il existe un élément $k \in K$ tel que $k.\mathfrak{a}_0 = \mathfrak{a}_0'$

(iii)

$$\mathfrak{p}_0 = \bigcup_{k\in K} k.\mathfrak{a}_0 \,.$$

Preuve : (i) On considère dans la proposition 10 S=$\mathfrak{a}_0$ agissant linéairement sur V=$\mathfrak{p}$ par ad. Cette dernière vérifie la condition (PC) de presque commutativité par la commutativité de $\mathfrak{a}_0$. Donc par 10, l'ensemble des $H \in \mathfrak{a}_0$ tel que $\mathfrak{p}_0{}^0(H) = \mathfrak{p}_0{}^0(\mathfrak{a}_0)$ est non vide (les exposants 0 désignant comme d'habitude les nilespaces).

Soit donc un tel H, comme il est dans $\mathfrak{a}_0$, il est semi-simple comme remarqué juste avant le lemme, et $\mathfrak{p}_0{}^0(H)$ est donc le centralisateur de H dans $\mathfrak{p}_0$. (En effet, $\mathbb{C}$ étant algébriquement clos, $ad(H)$ est diagonalisable et a même espace propre associé à 0 dans $\mathfrak{p}$ que $ad(H)^n$, puis par intersection dans $\mathfrak{p}_0$.)

Enfin, $\mathfrak{a}_0 = \mathfrak{g}_0{}^0(\mathfrak{a}_0) \cap \mathfrak{p}_0 = \mathfrak{p}_0{}^0(\mathfrak{a}_0)$. La première égalité venant du fait que comme tous les éléments de $\mathfrak{a}_0$ sont semi-simples, $\mathfrak{g}$ est complètement réductible sous $ad\mathfrak{a}_0$ de telle sorte que $\mathfrak{g}_0{}^0(\mathfrak{a}_0)$ est le centralisateur de $\mathfrak{a}_0$ dans $\mathfrak{p}_0$ (et on conclut par maximalité de $\mathfrak{a}_0$ comme algèbre abélienne dans $\mathfrak{p}_0$). Ceci montre donc que H convient.

(iii) Soit X quelconque dans $\mathfrak{p}_0$. La fonction $k \mapsto B(H, k.X)$ est continue sur le groupe compact (par 56) K et prend donc une valeur minimale pour, disons, $k = k_0$. Pour $T \in \mathfrak{k}_0$, nous avons donc :

$$\{\frac{d}{dt}B(H, (\exp\ tT)k_0.X\}_{t=0} = 0.$$

Soit par le théorème de dérivation des applications composées

$$B(H, [T, k_0.X]) = 0.$$

Par conséquent, pour tout $T \in \mathfrak{k}_0$ $B([H, k_0.X], T) = 0$. Mais par la remarque sur θ lors des notations, $[H, k_0.X] \in \mathfrak{k}_0$ et finalement $[H, k_0.X]$ est nul car B est définie sur $\mathfrak{k}_0$. D'où par (i) $k_0.X \in \mathfrak{a}_0$ ce qui prouve(iii).

(ii) Enfin, en utilisant (iii) sur $\mathfrak{a}_0'$, il existe $k \in K$ tel que $H \in k.\mathfrak{a}_0'$. Tout élément de $k.\mathfrak{a}_0'$ commute avec H, dont $\mathfrak{a}_0$ est le centralisateur dans $\mathfrak{p}_0$, d'où

$k.\mathfrak{a}_0^{'} \subset \mathfrak{a}_0$. On conclut alors la démonstration du lemme en applicant l'inverse de k et en concluant à l'égalité par maximalité de $\mathfrak{a}_0^{'}$. ■

Nous concluons cette partie par un lemme utile dans la preuve même du théorème de Chevalley.

Lemme 2.58: Soit $H \in \mathfrak{a}_0$. Alors, les valeurs propres de $ad(H)_{|\mathfrak{p}_0}$ sont 0 et $\alpha(H)^2$ où α parcourt l'ensemble P_+.

Preuve : Soit $\alpha \in R_p$, il existe un vecteur $X_\alpha \neq 0$ tel que

$$[H, X_\alpha] = \alpha(H)X_\alpha \forall H \in \mathfrak{h}\,.$$

On écrit alors $X_\alpha = X_1 + iX_2, X_1, X_2 \in \mathfrak{g}_0$. Comme α est réel sur $\mathfrak{a}_0$ on a $[H, X_i] = \alpha(H)X_i$ pour $H \in \mathfrak{a}$. Au moins l'un des deux vecteurs est non nul et s'écrit $Y_\alpha + Z_\alpha, Y_\alpha \in \mathfrak{p}_0, Z_\alpha \in \mathfrak{k}_0$. En égalant les composantes sur $\mathfrak{p}_0$ et $\mathfrak{k}_0$, on obtient :

$$[H, Y_\alpha] = \alpha(H)Z_\alpha, \qquad [H, Z_\alpha] = \alpha(H)Y_\alpha,$$

pour $H \in \mathfrak{a}$. Au moins un parmi Y_α, Z_α est non nul, et les deux le sont car α ne s'annule pas identiquement sur $\mathfrak{a}$.

Ainsi, si $\alpha \in R_p$, Y_α est vecteur propre de ad(H) avec valeur propre $\alpha(H)^2$ pour tout H dans $\mathfrak{a}_0$. De plus 0 est systématiquement valeur propre pour n'importe quel vecteur propre dans $\mathfrak{a}_0$ puisque $\mathfrak{a}_0$ est commutative. Enfin, comme on a la somme directe $\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus \bigoplus_{\alpha \in R} \mathfrak{g}^{\alpha}$ et que chaque X_α est une base de $\mathfrak{g}^{\alpha}$ qui est de dimension 1 sur $\mathbb{C}$, on obtient en restreignant à $\mathfrak{p}$ une base de vecteurs propres pour ad(H), ce qui garantit que nous avons toutes les valeurs propres souhaitées.

■

2.3 Groupe de Weyl

Nous conservons ici les notations de la partie précédente et notons $\mathfrak{m}_0$ le centralisateur de $\mathfrak{a}_0$ dans $\mathfrak{k}_0$. Soient M et M' les centralisateur et normalisateur de $\mathfrak{a}_0$ dans K, c'est-à-dire :

$$M = \{k \in K | \forall H \in \mathfrak{a}_0 \; k.H = H\}$$

$$M' = \{k \in K | k.\mathfrak{a}_0 \subset \mathfrak{a}_0\}.$$

Le groupe M est clairement distingué dans M'. La définition du groupe de Weyl que nous adopterons dans ce cadre dépend du lemme suivant :

Lemme 2.59: Les groupes M et M' sont compacts et ont la même algèbre de Lie, à savoir $ad(\mathfrak{m}_0)$.

Preuve : Les groupes M et M' sont des sous-groupe fermés de K, donc compacts. L'algèbre de Lie de M est clairement $ad(\mathfrak{m}_0)$. Soit $\mathfrak{L}(M')$ la sous-algèbre de Lie de $\mathfrak{k}_0$, en bijection via ad avec l'algèbre de Lie de M' incluse dans $ad(\mathfrak{k}_0)$ et soit $Y \in \mathfrak{L}(M')$. Alors $[Y, H] \in \mathfrak{a}_0$ pour chaque $H \in \mathfrak{a}_0$ de telle sorte que :

$$B(adH(Y), adH(Y)) = -B((adH)^2 Y, Y) = 0.$$

Ainsi, $[H, Y] = 0$ pour chaque $H \in \mathfrak{a}_0$ donc $Y \in \mathfrak{m}_0$. ■

Définition 2.60: Le groupe quotient $W = M'/M$ est appelé groupe de Weyl associé à la décomposition de Cartan $\mathfrak{g}_0 = \mathfrak{k}_0 + \mathfrak{p}_0$ et au sous-espace de Cartan $\mathfrak{a}_0$.

Remarque : Comme M contient la composante neutre M_0 de M', W est discret comme M'/M_0 et comme il est compact (séparé car discret), il est donc fini. De plus l'action de M' induit un isomorphisme de W dans $GL(\mathfrak{a}_0)$, et on peut donc voir W comme un groupe de transformation linéaire complexe sur $\mathfrak{a}$. De plus, le lemme 57 montre que W ne dépend pas du sous-espace de Cartan $\mathfrak{a}_0$ choisi à isomorphisme près.

Nous démontrons essentiellement un résultat de conjugaison par le groupe de Weyl important dans la preuve du théorème de Chevalley.

Proposition 2.61: Soit $\mathfrak{c}$ un sous-ensemble de $\mathfrak{a}_0$ et supposons qu'il existe un élément $k \in K$ tel que $k.\mathfrak{c} \subset \mathfrak{a}_0$. Alors il existe un élément $s \in W$ tel que $s.C = k.C$ pour tout $C \in \mathfrak{c}$.

Preuve : Le centralisateur $Z_\mathfrak{c}$ de $\mathfrak{c}$ dans $Int(\mathfrak{g})$ est un sous-groupe fermé de $Int(\mathfrak{g})$, d'algèbre de Lie $ad(\mathfrak{z}_\mathfrak{c})$, où $\mathfrak{z}_\mathfrak{c}$ est le centralisateur de $\mathfrak{c}$ dans $\mathfrak{g}_0$. Comme $\mathfrak{z}_\mathfrak{c}$ est invariant par θ, on a $\mathfrak{z}_\mathfrak{c} = \mathfrak{z}_\mathfrak{c} \cap \mathfrak{k}_0 \oplus \mathfrak{z}_\mathfrak{c} \cap \mathfrak{p}_0$. Les sous-espaces $\mathfrak{a}_0$ et $k^{-1}.\mathfrak{a}_0$ sont des sous-espaces de Cartan de $\mathfrak{z}_\mathfrak{c} \cap \mathfrak{p}_0$. Par le lemme 57, il existe un élément H de $\mathfrak{a}_0$, dont le centralisateur dans $\mathfrak{p}_0$ est $\mathfrak{a}_0$. Soit X un élément fixé de $\mathfrak{z}_\mathfrak{c} \cap \mathfrak{p}_0$. La fonction $z \mapsto B(H, z.X), (z \in Z_\mathfrak{c} \cap K)$ est à valeurs réelles et atteint son minimum disons en z_0, dans la mesure où $Z_\mathfrak{c} \cap K$ est compact. Pour tout $T \in \mathfrak{z}_\mathfrak{c} \cap \mathfrak{p}_0$, on a alors :

$$\{\frac{d}{dt} B(H, Ad(\exp\ tT) z_0.X)\}_{t=0} = 0.$$

D'où il suit :

$$B(H, [T, z_0.X]) = -B([H, z_0.X], T) = 0.$$

Or $[H, z_0.X] \in \mathfrak{z}_\mathfrak{c} \cap \mathfrak{p}_0$, donc on en conclut $[H, z_0.X] = 0$, et donc, vue la construction de H, $z_0.X \in \mathfrak{a}_0$. En particulier, soit $X = H'$ où H' est un élément de $k^{-1}\mathfrak{a}_0$ dont le centralisateur dans $\mathfrak{p}_0$ est $k^{-1}\mathfrak{a}_0$. Alors, ce qui précède montre que $H' \in z_0^{-1}.\mathfrak{a}_0$ et donc $z_0^{-1}.\mathfrak{a}_0 = k^{-1}\mathfrak{a}_0$. Par conséquent, $kz_0^{-1} \in M'$. Puisque $z_0 \in Z_\mathfrak{c} \cap K$, la restriction de kz_0^{-1} à $\mathfrak{a}_0$ donne l'élément s de W souhaité. ■

Lemme 2.62: Chaque élément s du groupe de Weyl permute les Chambres de Weyl, c'est à dire les composantes connexes du complémentaire dans $\mathfrak{a}_0$ de l'union des hyperplans noyaux des réflexions de W.

Preuve : En effet, la démonstration du lemme 58 montre qu'un forme linéaire réelle λ sur $\mathfrak{a}_0$ est la restriction d'une racine (de $\mathfrak{g}$ relativement à $\mathfrak{h}$) si et seulement si il existe un vecteur $X \neq 0$ dans $\mathfrak{p}_0$, tel que

$$\forall H \in \mathfrak{a}_0 \, , (adH)^2X = \lambda(H)^2X.$$

En conséquence immédiate, on a aussi que pour $k \in M'$ et pour chaque forme linéaire réelle λ sur $\mathfrak{a}_0$, si on pose $\lambda^k(H) = \lambda(Ad(k^{-1})H)$, alors λ est la restriction d'une racine (de $\mathfrak{g}$ relativement à $\mathfrak{h}$) si et seulement si λ^k est la restriction d'une racine.

À partir de là, soit $k \in M'$, tel que s coincide avec la restriction de k à $\mathfrak{a}_0$. Il suit de la remarque précédente que s'il existe une racine dans R_p s'annulant en un point $H \in \mathfrak{a}_0$, alors il existe une racine dans R_p s'annulant en $k.H$. Par conséquent et par contraposée, s envoie un élément d'une chambre de Weyl dans une chambre de Weyl, et comme s est une bijection continue, elle permute les chambres de Weyl. ■

2.4 Théorème de Chevalley

Nous pouvons maintenant énoncer le théorème de restriction de Chevalley dans notre nouveau cadre.

Soit comme précédemment $\mathfrak{g}_0 = \mathfrak{k}_0 \oplus \mathfrak{p}_0$ une décomposition de Cartan d'une algèbre de Lie semi-simple sur $\mathbb{R}$, $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{p}$ les complexifiés déjà explicités, σ l'automorphisme involutif de $\mathfrak{g}_0$ associé, $\mathfrak{a}_0$ un sous-espace de Cartan. Soit G un groupe de Lie connexe d'algèbre $\mathfrak{g}_0$, K un sous groupe de G d'algèbre de Lie $\mathfrak{k}_0$. On suppose comme précédemment adK compacte de sorte que l'on possède une mesure unimodulaire sur K, c'est-à-dire à la fois invariante à droite et à gauche. Maintenant, considérons les algèbres symétriques $S(\mathfrak{p})$ et S($\mathfrak{a}$). Le groupe $Ad_G(K)$ (et ainsi K) agit sur $S(\mathfrak{p})$ et le groupe de Weyl W agit sur $S(\mathfrak{a})$ comme dans la première partie. Soient $S(\mathfrak{p})^K$ et $S(\mathfrak{a})^W$ les ensembles de polynômes invariants associés. Comme la forme de Killing B est non dégénérée sur $\mathfrak{p} \times \mathfrak{p}$ et $\mathfrak{a} \times \mathfrak{a}$, on peut identifier canoniquement $\mathfrak{p}$ et son dual, $\mathfrak{a}$ et son dual et étendre l'isomorphisme aux algèbres symétriques et nous considérerons donc les éléments des ensembles précédemment introduits comme des fonctions polynomiales sur $\mathfrak{a}$ ou $\mathfrak{p}$. Pour une fonction f sur $\mathfrak{p}$, notons $\overline{f}$ sa restriction à $\mathfrak{a}$.

Théorème 2.63: (Chevalley) Le morphisme de restriction $p \mapsto \overline{p}$ induit un isomorphisme de $S(\mathfrak{p})^K$ sur $S(\mathfrak{a})^W$.

Preuve : [7] On note $J \subset S(\mathfrak{a})^W$ l'image de $S(\mathfrak{p})^K$ par l'application de restriction. On remarque que la définition de W en termes de quotient et que son action précisée plus haut rendent immédiatement l'application de restriction bien définie entre les deux espaces.

Montrons le résultat par étapes.

- Étape 1 : *L'application de restriction $p \mapsto \overline{p}$ est injective de $S(\mathfrak{p})^K$ dans $S(\mathfrak{a})^W$ (donc bijective de $S(\mathfrak{p})^K$ dans J).* En effet, tout vecteur $X \in \mathfrak{p}$ peut être tourné en un vecteur de $\mathfrak{a}$ par un $Ad(k)(k \in K)$ par le lemme 57, donc si la restriction est nulle, il en est de même de l'application initiale.
- Étape 2 : *Si $p_1, p_2 \in S(\mathfrak{p})^K$ et $p_1 = p_2 q$ où $q \in S(\mathfrak{p})$, alors $q \in S(\mathfrak{p})^K$.* En effet, si $q_0 = \int_K Ad(k).qdk$, alors $p_1 = p_2 q_0$ et donc $q = q_0 \in S(\mathfrak{p})^K$.
- Étape 3 : *Les anneaux $S(\mathfrak{p})^K$ et J sont intégralement clos.* Soit en effet x un élément du corps des fractions $Frac(S(\mathfrak{p})^K)$ de $S(\mathfrak{p})^K$, entier sur $S(\mathfrak{p})^K$. Alors x considéré comme élément de $Frac(S(\mathfrak{p}))$ est entier sur $S(\mathfrak{p})$, mais ce dernier est intégralement clos car factoriel, donc $x \in S(\mathfrak{p})$ et, par l'étape 2, on a $x \in S(\mathfrak{p})^K$. Ceci montre que $S(\mathfrak{p})^K$ est intégralement clos, puis que J l'est aussi par l'isomorphisme de l'étape 1.
- Étape 4 : *L'anneau $S(\mathfrak{a})$ est entier sur J.* Pour $H \in \mathfrak{a}$, soit T_H la restriction à $\mathfrak{p}_0$ de $ad(H)^2$. Il a pour polynôme caractéristique :

  $$det(\lambda I - T_H) = \lambda^r + p_1(H)\lambda^{r-1} + \cdots + p_{r-l}(H)\lambda^l,$$

  avec les p_i invariants par $Ad_G(K)$ comme le déterminant vu que ce groupe agit par automorphisme de $\mathfrak{g}$ d'une part et conserve $\mathfrak{p}_0$ d'autre part (i.e on peut basculer l'action sur l'argument de T_H et effectuer un changement de base pour lire le déterminant), donc on a $p_i \in J$. Les racines du polynôme caractéristique sont par ailleurs d'après le lemme

[7] Selon S.Helgason (*Differential Geometry and Symmetric Spaces*, Academic Press, 1962), la preuve est celle de Chevalley, transmise par Harish-Chandra

58 parmi 0 et les $\alpha(H)^2$ où α varie dans P_+. Les fonction $\alpha^2 \in S(\mathfrak{a})$ sont donc entières sur J et donc les α aussi. Puisque les fonctions linéaires sur $\mathfrak{a}$ sont des combinaisons linéaires des α, $S(\mathfrak{a})$ est engendré comme anneau par les α et on en déduit l'étape 4.

- Étape 5 : *Soient $H_0 \in \mathfrak{a}_0$ et $H_1 \in \mathfrak{a}$ tels que $\forall p \in J,\ p(H_0) = p(H_1)$. Alors il existe $s \in W$ tel que $H_1 = sH_0$.* Le lemme 58 indique que les racines de $det(\lambda^2 I - T_H)$ sont 0 et $\pm\alpha(H)(\alpha \in P_+)$. Ainsi, puisque $det(\lambda^2 I - T_{H_0}) = det(\lambda^2 I - T_{H_1})$, on en déduit que $\alpha(H_1)$ est réel pour tout $\alpha \in P_+$ (comme les $\alpha(H_0)$) de telle sorte que $H_1 \in \mathfrak{a}_0$. Prouvons alors que H_0 et H_1 sont conjugués sous $Ad_G(K)$ par l'absurde. Il existe alors une fonction continue sur p_0 identiquement nulle sur l'orbite compacte $Ad_G(K)H_0$ et valant identiquement 1 sur l'orbite compacte $Ad_G(K)H_1$ distincte de la précédente. Par le théorème d'approximation de Weierstrass, il existe un polynôme $p \in S(\mathfrak{p}_0)$ tel que

$$|p(H) - 0| < \frac{1}{3} \qquad sur \qquad H \in Ad_G(K)H_0$$

$$|p(H) - 1| < \frac{1}{3} \qquad sur \qquad H \in Ad_G(K)H_1$$

Mais alors le polynôme

$$p^* = \int_K Ad(k).pdk$$

appartient à $S(\mathfrak{p})^K$ mais prend des valeurs différentes en H_0 et H_1 contredisant l'hypothèse et montrant qu'il existe donc $k \in K$ tel que $Ad(k)H_0 = H_1$. Par la proposition 61, on en conclut qu'il existe $\sigma \in W$ tel que $\sigma H_0 = H_1$, ce qui conclut la démonstration de l'étape 5.

- Étape 6 : *L'extension $Frac(S(\mathfrak{a}))/Frac(J)$ est galoisienne.* En effet, le polynôme $F(\lambda) = \lambda^{2r} + p_1\lambda^{2r-2} + \cdots + p_{r-l}\lambda^{2l}$ est à coefficients dans J, comme remarqué à l'étape 4, et de racines 0 et $\pm\tilde{\alpha}$, avec $\tilde{\alpha}$ la restriction à $\mathfrak{a}$ de $\alpha \in P_+$.Mais alors, comme les $\tilde{\alpha}$ $(\alpha \in P_+)$ engendrent le dual de $\mathfrak{a}$, il est clair que le corps des fractions $Frac(S(\mathfrak{a}))$ est le corps de décomposition de F sur $Frac(J)$, ce qui donne la normalité de l'extension. La séparabilité vient de la caractéristique nulle.

- Étape 7 : *Tout automorphisme σ de $Frac(S(\mathfrak{a}))$ laissant $Frac(J)$ fixe laisse $S(\mathfrak{a})^W$ fixe point par point.* En effet, un tel σ permute les racines du F introduit ci-dessus et laisse ainsi $S(\mathfrak{a})$ invariant. Fixons $H_0 \in \mathfrak{a}_0$. Alors, l'application $\lambda : p \mapsto p^\sigma(H_0)$ est un homomorphisme de $S(\mathfrak{a})$ dans $\mathbb{C}$. Soit H_1 l'unique élément de $\mathfrak{a}$ tel que sous l'identification de $S(\mathfrak{a})$ et $S(\mathfrak{a}^*)$, $\lambda(H) = B(H, H_1), \forall H \in \mathfrak{a}$. Alors, $\lambda(p) = p(H_1)$ pour tout $p \in S(\mathfrak{a})$. Ainsi si $p \in J$, $p(H_1) = \lambda(p) = p^\sigma(H_0) = p(H_0)$, d'où par l'étape 5 il existe s dans W tel que $H_1 = sH_0$. D'où, pour $q \in S(\mathfrak{a}\,)^W$:

$$q^\sigma(H_0) = q(H_1) = q(sH_0) = q(H_0)$$

et comme H_0 est arbitraire dans $\mathfrak{a}_0$, $q^\sigma = q$. Ainsi tout automorphisme de $Frac(S(\mathfrak{a}\,))$ qui est l'identité sur $Frac(J)$ laisse fixé point à point $S(\mathfrak{a}\,)^W$.

- Conclusion : Par la théorie de Galois, $S(\mathfrak{a}\,)^W \subset Frac(J)$. Mais $S(\mathfrak{a}\,)^W$ est entier sur J par l'étape 4 et J est intégralement clos par l'étape 3. Ainsi $S(\mathfrak{a}\,)^W = J$ car on avait déjà $J \subset S(\mathfrak{a}\,)^W$.

■

3 Théorème de restriction de Chevalley en classe C^r(G. Barbançon, 1986)

Nous nous proposons maintenant d'étendre les résultats précédents de restrictions pour les fonctions polynomiales aux applications de classe C^r[8]. Plus précisément, dans ce cadre et avec les notations précédentes, l'équivalent du théorème de Chevalley montre qu'une certaine application de restriction est un isomorphisme d'espace de Fréchet – celle entre l'espace des fonctions de classe C^r sur l'espace $\mathfrak{p}$ d'une décomposition de Cartan invariantes par action adjointe de K vers l'espace des fonctions de même classe sur un espace de Cartan $\mathfrak{a}$ de $\mathfrak{p}$, invariant par l'action du Groupe de Weyl.

Nous rappelons d'abord les résultats sur la description des invariants d'algèbre de polynômes sous l'action d'un groupe de réflexions et quelques résultats (essentiellement le théorème de Whitney) sur les champs de polynômes. En effet, on commencera ensuite par étendre le résultat d'engendrement par des invariants élémentaires de l'algèbre de polynômes invariants par un groupe de réflexion fini, au cas C^r en écrivant une fonction C^r invariante par un groupe de réflexions finis (comme le groupe de Weyl dans le cas précédent) en une fonction C^q des polynômes invariants élémentaires. On remarquera que dans ce résultat, on obtient une perte de dérivabilité telle que l'ordre q est déterminé par le groupe, la dimension de l'espace et r, la perte étant moins importante que le résultat analogue de Hilbert pour des groupes finis non engendrés par des réflexions. Pour obtenir ce résultat, il nous faudra en effet nous ramener au cas polynomial en décrivant des fonctions C^r comme champ de polynômes de Taylor, d'où l'introduction de ceux ci. En faite, on commence par construire le champ de polynôme cherché (associé à l'application de classe C^q cherché à terme), puis à vérifier la régularité du champ. Une partie de celui-ci étant obtenu par inversion locale, en dehors d'une surface algébrique, la régularité voulue se ramène à une condition de continuité (par un analogue du théorème de limite de la dérivée que nous montrons dés la première partie ci-dessous). Cette continuité sera d'abord obtenu pour les différentielles des champs de polynôme, sur lesquelles on obtient un système d'équations algébriques. À partir de l'expression, donnée par la formule de Cramer, la régularité voulue va se déduire de résultats de contrôle de régularités par divisions et multiplications linéaires en écrivant les déterminants de Cramer comme produit et divisions des champs initiaux par des formes linéaires (partie 3.2). Ce premier résultat sur les invariant de

[8]Le résultat est de G.Barbançon, *Invariants de Classe C^r des groupes finis engendrés par des réflexions et théorème de Chevalley en Classe C^r*, in Duke Mathematical Journal, Septembre 1986 Vol 53, No. 3.

classe C^r sera obtenu à la partie 3.3.

Nous aurons alors généralisé à la classe C^r, les résultats sur les invariants par des groupes de réflexions. Ce sera la base de la démonstration du nouveau théorème de restriction en classe C^r, utilisant aussi le résultat du cadre polynomial. En somme, il faudra là reprendre la construction précédente pour étendre une fonction invariante sur l'espace de Cartan par le groupe de Weyl en une fonction sur $\mathfrak{p}$ invariante par action adjointe, et cela, sans perte de dérivabilité, ce qui sera possible en ajoutant des constructions spécifiques au cadre algèbre de Lie aux outils précédemment utilisés.

3.1 Rappels sur les invariants polynomiaux par des groupes de réflexions et sur les champs de polynômes

Nous considérons d'abord un espace vectoriel V de dimension finie l sur $\mathbb{R}$ (considéré comme espace euclidien) et W un sous-groupe fini d'ordre m de $Gl(V)$, engendré par des réflexions (qu'on peut supposer orthogonales, quitte à redéfinir le produit scalaire en prenant une moyenne).

Théorème 3.64: Soit W comme ci-dessus, l'algèbre des invariants $S(V^*)^W$ est engendrée par l polynômes W-invariants $(p_1, \cdots, p_l)$ homogènes, algébriquement indépendants de degré $k_1, \cdots, k_l$ vérifiant

$$k_1 \cdots k_l = m \qquad \sum_{i=1}^{l}(k_i - 1) = N,$$

avec N le nombre de réflexions contenues dans le groupe. Dans ce cas, on parle de *W-invariants élémentaires.*

De plus, si les l_α désignent des formes linéaires de noyaux les hyperplans H_α des points fixes d'une réflexions α du groupe W. Le jacobien J de l'ensemble d'invariants élémentaires est

$$J = c \prod_{\alpha \text{ réflexions de } G} l_\alpha, \; c \in \mathbb{R}^+.$$

Enfin, l'application $u : V \to \mathbb{R}^l$ définie par $u(x) = (p_1(x), \cdots, p_l(x)), x \in V$ est propre.

Nous rappelons maintenant le théorème de Whitney sur les champs de polynômes, après quelques rappels de définitions.

Définition 3.65:

Un *champ Taylorien* sur une partie E de $\mathbb{R}^n$ est une application $A : E \to \mathbb{C}[X],\ (X = (X_1, \cdots, X_n))$ tel que $A_x = \sum_k \frac{1}{k!}\breve{A}_k(x)X^k$ (avec $k \in \mathbb{N}^n$)

Le champ est dit *continu à l'ordre r* si les $\breve{A}_k$ sont continues sur E pour $|k| \leq r$. Soit $x \in E, x' \in \mathbb{R}^n$, on note $A_x(x')$ la valeur de A_x en $(x' - x)$. On note A^r le champ A tronqué aux r premiers degrés des polynômes.

On dit qu'un champ Taylorien est *r-régulier*, s'il satisfait aux conditions de Whitney :

$$\forall a \in E, \forall q \in \mathbb{N}^n, |q| \leq r,$$
$$(R_x A)^q(x') = \left(\tfrac{\partial^{|q|}A}{\partial X^q}\right)_{x'}(x') - \left(\tfrac{\partial^{|q|}A}{\partial X^q}\right)_x(x') \in o(|x - x'|^{r-|q|}),$$

quand x et x' tendent vers a. On note $J^r(E)$ leur ensemble.

Un champ taylorien A est *formellement holomorphe* sur une partie fermée $\tilde{E}$ de $\mathbb{C}^n \cong \mathbb{R}^{2n}$ s'il vérifie les conditions de Cauchy en plus, c'est-à-dire

$$\textit{pour } j = 1, \cdots, n \qquad \frac{\partial A}{\partial X_j} = i\frac{\partial A}{\partial Y_j}.$$

Cela revient à dire que c'est ponctuellement un polynôme de la variable complexe.

On note $J^r_C(\tilde{E})$ leur ensemble. Pour un champ défini sur $\mathbb{R}^n \subset \mathbb{C}^n$, on parle de *champ complexifié* si on associe aux polynômes de la variable réelle le polynôme correspondant de la variable complexe de telle sorte qu'on obtienne un champ formellement holomorphe.

Réciproquement, à un champ formellement holomorphe sur $\mathbb{C}^n$, on associe un champ *décomplexifié* qui est le polynôme sur $\mathbb{R}^n$ avec les mêmes coefficients.

On dit que deux fermés E et F de $\mathbb{R}^n$ sont *1-régulièrement séparés* si pour tout x_0 dans leur intersection, il existe un voisinage V de x_0, et une constante $C > 0$, tels que pour tout x dans V : $d(x, E) + d(x, F) \geq Cd(x, E \cap F)$.

Remarque : On remarque que des formes réelles de $\mathbb{C}^n$ sont 1-régulièrement séparées. Si on se donne une réunion finie de formes réelles et une famille de champs de vecteurs, chacun r-régulier sur l'une des formes de l'union, et coïncidant sur les intersections, alors on obtient un champ r-régulier sur l'union. Réciproquement, étant donné un champ sur une union, il suffit que le champ soit r-régulier sur chacune des composantes pour être r-régulier sur l'ensemble.

On remarque aussi que la condition de Whitney est juste la condition imposée au champ taylorien issu d'une application $f \in C^r$ (et noté $T^r_E f$, pour E un fermé de l'ouvert Ω de définition de f) par les inégalités de Taylor pour le développement. On note $[f]_E$ le champ de polynômes complexifiés correspondant.

Le théorème de Whitney affirme que cette condition de r-régularité est même suffisante pour qu'un champ taylorien soit un tel champ associé à une application de classe C^r.

Théorème 3.66: La restriction T_E^r de l'espace des fonctions de Classe C^r sur $\mathbb{R}^n$ à l'espace des champs de Whitney d'ordre r sur E est surjective. Elle admet une section linéaire, continue si on munit les espaces de leurs topologies de Fréchet naturelles (pour $r < +\infty$), c'est à dire pour l'espace des champs de Whitney d'ordre r sur E, défini par la famille de semi-normes (K décrivant les compacts de E) :

$$||A||_{K,r} = sup_{x \in K, |q| \leq r} \left| \frac{1}{q!} \check{A}_q(x) \right| + sup_{(x,x') \in K^2, x \neq x', |q| \leq r} \left(\frac{|(R_x A)^q(x')|}{|x - x'|^{r-|q|}} \right)$$

3.2 Conséquences du théorème de prolongement de Whitney, division et multiplication de Champs de Whitney par des formes linéaires

Lemme 3.67: Soient Γ et $\tilde{\Gamma}$ deux réunions finies de formes réelles dans $\mathbb{C}^n$, avec $\Gamma \subset \tilde{\Gamma}$, il existe une application linéaire continue qui à $H \in J_C^r(\Gamma)$ associe $\tilde{H} \in J_C^r(\tilde{\Gamma})$ avec la restriction de $\tilde{H}$ à Γ valant H.

Preuve : Comme $\tilde{\Gamma}$ est une réunion finie de formes réelles, il suffit que pour chaque forme réelle Π, on puisse construire une application linéaire continue $\pi : J_C^r(\Gamma) \to J_C^r(\Pi)$ telle que $\pi(H)$ et H sont égales sur $H \cap \Pi$. Comme les formes réelles de $\mathbb{C}^n$ sont 1-régulièrement séparées, cette seule condition de compatibilité implique par la remarque suivant les définitions de la partie précédente qu'un champ défini comme $\pi(H)$ sur Π et comme H sur Γ est dans $J_C^r(\Gamma \cup H)$.

Maintenant, quitte à appliquer un $\mathbb{C}$-automorphisme, supposons $\Pi = \mathbb{R}^n$. Soit alors $\Lambda = H \cap \Gamma$, le champ induit par restriction de H sur Λ est formellement holomorphe, r-régulier et peut être décomplexifié. Le théorème du prolongement de Whitney donne un opérateur linéaire et continu, un prolongement r-régulier sur $\mathbb{R}^n$ du champ défini sur Λ. La complexification donne le champ cherché (on prend les mêmes coefficients comme polynômes de la variable complexe).

■

Le résultat suivant généralise le théorème bien connu de la limite de la dérivée.

Lemme 3.68: Soit Γ une réunion finie de formes réelles, dans $\mathbb{C}^n$, et w un polynôme complexe non identiquement nul, soit F l'ensemble de ses zéros. Tout champ formellement holomorphe r-continu sur Γ, r-régulier sur $\Gamma - F$ est r-régulier sur Γ.

PREUVE : Une condition nécessaire et suffisante pour qu'un champ soit r-régulier sur un ouvert est le caractère C^1 des coefficients $\check{A}_p, |p| \leq (r-1)$ auquel il faut ajouter les relations

$$\forall i \in [1,n] \frac{\partial \check{A}_p}{\partial x_i} = \check{A}_{p_1,\cdots,p_i+1,\cdots p_n}.$$

Par la remarque suivant les définitions du paragraphe précédent, on peut supposer $\Gamma = \mathbb{R}^n$ et décomplexifier grâce à l'holomorphie formelle. De plus, on peut supposer que localement $\mathbb{R}^n \cap F$ ne contient aucune droite parallèle aux axes. Toute droite non située dans F a alors une intersection finie avec F et en appliquant le théorème de la limite de la dérivée en dimension 1, on obtient des limites sur chaque axe des dérivés partielles des coefficients d'où le caractère C^1 des coefficients cherchés et les identités voulues ci-dessus aux point de F en passant à la limite. On a donc la condition de r-régularité cherchée. ∎

Nous en arrivons aux résultats de multiplications et de divisions par des formes linéaires de champs de Whitney, qui permettront de construire et d'évaluer la régularité des prolongements que l'on cherche.

Lemme 3.69: Soit f un champ r-régulier, formellement holomorphe sur une réunion finie de formes réelles de $\mathbb{C}^n$ et λ une forme linéaire complexe de noyau H. Le champ défini par $[\lambda f] = \lambda[f]^r$ est $(r+1)$-continu sur Γ et, si $x_0 \in \Gamma \cap H$, on a pour tout $x \in \Gamma$ et $k \in \mathbb{N}^n, |k| \leq r+1$:

$$(R_{x_0}\lambda f)^k(x) = D^k(\lambda(x)f_x(x) - \lambda(x)f_{x_0}(x)) \in o(|x-x_0|^{r-|k|+1}).$$

En conséquence immédiate, si $\lambda_1, \cdots, \lambda_s$ sont des formes linéaires complexes de noyaux $H_1, \cdots, H_s$, le champ $[(\prod_{i=1}^s \lambda_i)f]$ est $(r+s)$-continu et si $x_0 \in \Gamma \cap (\cap_{i=1}^s H_i)$, on a pour $k \in \mathbb{N}^n, |k| \leq r+s$:

$$\left(R_{x_0}\left[\left(\prod_{i=1}^s \lambda_i\right) f\right]\right)^k (x) \in o(|x-x_0|^{r-|k|+s}).$$

PREUVE : Comme le coefficient d'ordre $r+1$ de $[\lambda f]_x$ est combinaison linéaire de coefficients d'ordre r de f_x, on en déduit la continuité d'ordre $(r+1)$. Quand au deuxième point, il résulte de la formule de Leibniz et de la propriété de lipschitzianité locale de λ : $|\lambda(x)| = |\lambda(x) - \lambda(x_0)| \leq C|x - x_0|$. ■

Lemme 3.70: Soit λ une forme linéaire complexe non identiquement nulle de noyau H. Soit Γ une réunion de formes réelles de $\mathbb{C}^n$, f un champ de Whitney formellement holomorphe r-régulier sur Γ, tel que si $x \in \Gamma \cap H$ le polynôme f_x soit divisible par λ_x. Alors il existe un champ F, $(r-1)$-régulier, formellement holomorphe sur Γ, avec $[f]^r = [\lambda F]^r$.

PREUVE :

En chaque point $z \in \Gamma$, F_z est bien défini :

Si $z \in \Gamma - H$, F est r-régulier au voisinage de z et si $z \in \Gamma \cap H$, $[l]_z = \lambda(Z)$ et f_z est divisible par $\lambda(Z)$ avec $f_x^r = \lambda(Z)F_z^{r-1} = (\lambda F)_z^r$. D'après le lemme 68, il suffit de montrer que F est $(r-1)$-régulier sur $\Gamma - H$ et $(r-1)$-continu sur Γ.

D'autre part, d'après les remarques qui suivent les définitions du paragraphe précédent, on peut supposer que Γ est réduit à une forme réelle.

On prend donc $z_0 \in \Lambda = \Gamma \cap H$ et $z \in \Gamma - \Lambda$, z_1 la projection de celui-ci sur Λ qui tend éventuellement vers z_0 en même temps que z.

Utilisant la r-régularité de f, on montre par récurrence que

$$\forall q, |q| \leq r-1, D^q F_z(z) - D^q F_{z_1}(z) = o(|z - z_1|^{r-1-|q|}),$$

en notant $D^q F = \frac{\partial^{|q|} F}{\partial Z^q}$ la dérivation formelle de R par rapport aux indéterminées.

Comme H est r-régulier, on a (condition d'ordre $q = 0$ sachant que $f_z(z) = \check{f}_0(z)$, coefficient d'ordre 0 du champ) :

$$f_z(z) - f_{z_1}(z) = \lambda(z)\check{F}_0(z) - [\lambda(z)F_{z_1}(z)] = o(|z - z_1|^r)$$

$$\lambda(z)[\check{F}_0(z) - F_{z_1}(z)] = o(|\lambda(z)|^r),$$

soit

$$F_z(z) - f_{z_1} = o(|\lambda(z)|^{r-1}).$$

D'où l'initialisation.

Supposons maintenant que pour $|q| \leq |k| - 1 < r - 1$, la relation voulue soit vérifiée. La r-régularité de f donne à présent :

$$D^k f_z(z) - D^k f_{z_1}(z) = o(|z - z_1|^{r-|k|}),$$

soit avec la formule de Leibniz, l'existence de constantes numériques a et b tel que :

$$a(D^{k-1}F_z(z) - D^{k-1}_{z_1}(z)) + b\lambda(z)(D^kF_zz - D^kF_{z_1}(z)) = o(|z-z_1|^{r-1-|k|}).$$

Le résultat vient immédiatement en utilisant l'hypothèse de récurrence.

À partir de là, sur Λ, les coefficients de F de degré $|k|$ sont des combinaisons linéaires de ceux de f de degré $|k+1|$, et la relation précédente signifie en fait que : $\forall k, |k| \leq r-1, \check{F}_k(z) - \check{F}_k(z_1) = o(|z-z_1|)$ quand z et z_1 tendent vers z_0 (en notant ici $\check{F}_k$ les coefficients du champ F).

Mais comme z_1 et z_0 sont dans Λ, la continuité de f implique une relation équivalente entre ces deux points, donnant par sommation la continuité en z_0. ■

Lemme 3.71: Soient $f_1, \cdots f_k$, k champs de Whitney formellement holomorphes, r-réguliers, sur une réunion finie de formes réelles de $\mathbb{C}^n$ et D un produit de d formes linéaires complexes (en comptant leur multiplicités). Soient pour i de 1 à k, des produits Λ_i de $s_i \leq s$ formes prises dans D. Si $\phi = \sum_{i=1}^k \Lambda_i f_i$ appartient ponctuellement à l'idéal engendré par D, le champ formellement holomorphe défini par $\Phi = \phi/D$, grâce à l'appartenance ponctuelle, est $(r-d+s)$-régulier.

Preuve :

Remarquons d'abord que le nombre de λ_τ intervenant dans le produit D, qui s'annulent en x est une fonction semi-continue inférieurement, car tout point x de Γ possède un voisinage sur lequel ne s'annulent que des formes qui s'annulent en x.

Si en x_0 le nombre de formes s'annulant est inférieur ou égal à $d-s$, Φ est $(r-d+s)$-régulier dans un de ces voisinages par le lemme 70. Si au contraire, $d-p$ formes s'annulent avec $p < s$ en x_0, pour chaque $i \in [1,k]$, au moins $s-p$ facteurs λ_i^j s'annulent en x_0 et pour $q \in \mathbb{N}^n, |q| \leq r+s-p$, on obtient par le lemme de multiplication 69 :

$$(R_{x_0}\phi)^q x \in o(|x-x_0|^{r-|q|+s-p}).$$

La restriction de ϕ à l'ensemble où exactement $d-p$ formes s'annulent est donc $(r+s-p)$-régulière et le lemme de division 70 indique que ϕ est $r-d+s = r+(s-p)-(d-p)$ régulier. Donc, on a ce degré de régularité $r-d+s$ sur chacune des parties de la partition de Γ selon le nombre de formes qui s'annulent.

De plus ϕ est globalement $(r+s)$-continue par le lemme de multiplication 69, mais la définition de Φ en x_0 donne :

$$\phi_{x_0}(X) = \left(\prod_{j=1}^{d} \lambda_j(X)\right) \Phi_{x_0}(X).$$

Donc les coefficients $\check{\Phi}_q(x_0)$ sont combinaisons linéaires des coefficients $\check{\phi}_{q'}(x_0)$ avec $|q'| \geq |q| + d$ et sont donc continus en x_0 pour $|q| + d \leq r + s$. Le champ Φ est donc $(r-d+s)$-continu et donc $(r-d+s)$-régulier en utilisant le lemme 68. ∎

3.3 Invariants de classe C^r de groupes finis engendrés par des réflexions

Énonçons le résultat que nous cherchons à démontrer en conservant les notations précédentes

Soit W le groupe fini engendré par des réflexions agissant sur V, on note par la suite V_0 le sous-espace de V des invariants de W et son supplémentaire orthogonal V_1 disons de dimension n sur lequel l'action de W est non triviale. Soit $H_1, \cdots, H_n$ les murs d'une chambre de Weyl fixée du groupe dans V_1 (λ_i les réflexions de W correspondantes). Les invariants élémentaires sont formés des coordonnées de V_0 et de polynômes invariants $(p_1, \cdots, p_n)$ homogènes de degrés k_i tel que le produit des k_i est encore $m = card\ W$ et leur somme $card\ R + n$ où R est l'ensemble des réflexions de W. On note W_i le sous-groupe de W engendré par les réflexions selon les hyperplans $H_1, \cdots, H_{i-1}, H_{i+1}, \cdots H_n$. Ce sous-groupe laisse invariant le sous-espace de dimension 1 intersection des $H_j, j \neq i$. On note R_i l'ensemble des réflexions de W_i, c'est-à-dire exactement l'ensemble des réflexions dans les hyperplans noyaux de formes linéaires qui peuvent s'écrire comme combinaisons linéaires des $\lambda_j, j \neq i$.

Théorème 3.72: Soit f une fonction de classe C^r sur V, W-invariante, il existe F de classe C^q sur $\mathbb{R}^l$ telle que $f = F \circ u$, avec $q = [r/(1+d-s)]$, d le nombre de réflexions du groupe W et s l'infimum des $s_i = card(R_i)$.

On commence par des lemmes préparatoires.

La première étape consiste à étendre f par un champ formellement holomorphe sur une réunion W-invariante de formes réelles de$\mathbb{C}^l$. Plus précisément, on a :

Lemme 3.73: Soit f une fonction de classe C^r sur $\mathbb{R}^l$, W-invariante. Il existe un champ de Whitney d'ordre r, formellement holomorphe, W-invariant, qui prolonge f à une réunion finie de formes réelles de $\mathbb{C}^l$ qui contient $u^{-1}(\mathbb{R}^l)$.

Preuve : On note σ l'application de Newton :

$$\sigma : (x_1, \cdots, x_m) \mapsto (\sigma_1, \cdots, \sigma_m),$$

avec les fonctions symétriques élémentaires :

$$\sigma_i = \sum_{\{j_1, \cdots, j_i\}} \prod_{k=1}^{i} x_{j_k}.$$

On considère f comme définie sur $E = \mathbb{R}^l \times (\mathbb{R}^m)^l$ (en la considérant constante sur les dernières variables), symétrique par rapport aux variables $y_i = (y_i^1, \cdots, y_i^l)$ pour $i = 1, \cdots, l$. La fonction f induit sur E, forme réelle de $\mathbb{C}^l \times (\mathbb{C}^m)^l$, un champ de Withney $\tilde{f}$ r-régulier, formellement holomorphe que l'on prolonge par le lemme 67 à $\Gamma = \mathbb{R}^l \times (\sigma^{-1}(\mathbb{R}^m))^l$ qui est une réunion finie de formes réelles, comme $\sigma^{-1}(\mathbb{R}^m)$.

On définit :

$$\tau_j : (x_1, \cdots, x_l; y) \mapsto (x_1 - y_1^j, \cdots, x_l - y_l^j, y)$$

$$\tau_{i,j} : (x_i, \cdots, x_l; y) \mapsto (x_i - y_i^j, \cdots, x_l - y_l^j), y)$$

$$p_i : (x_i, \cdots, x_l, y) \mapsto (x_{i+1}, \cdots, x_l; y)$$

$$\bar{p}_i = p_i \circ \cdots \circ p_1$$

$$r_{i,j} : (x_{i+1}, \cdots, x_l, y) \mapsto (y_i^j, \cdots, y_l^j; y).$$

On prolonge alors $\tilde{f}$ à $\tilde{\Gamma} = \Gamma \cup (\cup_{j=1}^{m} \tau_j^{-1}(\Gamma))$. On remarque aussi que $r_{i-1} \circ p_{i+1}(\bar{p}_i(\tilde{\Gamma})) \subset \bar{p}_i(\tau_j^{-1}(\Gamma)) \subset \bar{p}_i(\tilde{\Gamma})$.

Par ailleurs, Γ et les $\bar{p}_i(\Gamma)$ sont symétriques.

On remarque alors que $[\tilde{f}]_\Gamma - [\tilde{f}]_\Gamma \circ (r_{1,1} \circ p_1)$ est définit sur $\tilde{\Gamma}$, r-régulier, contenant $X_1 - Y_1^1$ en facteur, donc par le lemme de division 70, on déduit que :

$$\Big([\tilde{f}]_\Gamma - [\tilde{f}]_\Gamma \circ (r_{1,1} \circ p_1)\Big)^r = \Big(\tilde{H}_{1,1}[X_1 - Y_1^1]\Big)^r,$$

avec $\tilde{H}_{1,1}$ $(r-1)$-régulier et $A_{1,1} = [\tilde{f}]_\Gamma \circ r_{1,1}$ r-régulier. On a donc :

$$[\tilde{f}]^r_\Gamma = \left(\tilde{H}_{1,1}[X_1 - Y_1^1]\right)^r + (A_{1,1} \circ p_1)^r .$$

Montrons par récurrence sur $k \leq m$ que :

$$[\tilde{f}]^r_\Gamma = \left(\tilde{H}_{1,k}[\prod_{j=1}^{k}(X_1 - Y_1^j)]\right)^r_{\tilde{\Gamma}} + \left(\sum_{i=0}^{k-1}(A^{k-1}_{1,i} \circ p_1)[X_1^i]\right)^r_{\tilde{\Gamma}},$$

avec $A^{k-1}_{1,i}$ $(r-k+1)$-régulier et $\tilde{H}_{1,m}$ $r-k$-régulier.

En effet, nous avons l'initialisation, et nous supposons donc le résultat au rang k. Par le lemme de division 70, nous avons de même que précédemment :

$$\left((\tilde{H}_{1,k} - \tilde{H}_{1,k} \circ (r_{1,k+1} \circ p_1)) \prod_{j=1}^{k}[X_1 - Y_1^j]\right)^r_{\tilde{\Gamma}} = \left(\tilde{H}_{1,k+1} \prod_{j=1}^{k+1}[X_1 - Y_1^j]\right)^r_{\tilde{\Gamma}},$$

soit

$$\left(\tilde{H}_{1,k}\left[\prod_{j=1}^{k}(X_1 - Y_1^j)\right]_{\tilde{\Gamma}}\right)^r = \left(\tilde{H}_{1,k+1}\left[\prod_{j=1}^{k+1}(X_1 - Y_1^j)\right]_{\tilde{\Gamma}}\right)^r + \left(\tilde{H}_{1,k} \circ (r_{1,k+1} \circ p_1)\left[\prod_{i=1}^{k}(X_1 - Y_1^j)\right]_{\tilde{\Gamma}}\right)^r,$$

d'où en remplaçant le terme venant de l'hypothèse de récurrence et réordonnant le reste :

$$[\tilde{f}]^r_\Gamma = \left(\tilde{H}_{1,k+1}\left[\prod_{j=1}^{k+1}(X_1 - Y_1^j)\right]\right)^r_{\tilde{\Gamma}} + \left(\sum_{i=0}^{k}(A^k_{1,i} \circ p_1)[X_1^i]\right)^r_{\tilde{\Gamma}},$$

avec la régularité voulue.

En bilan, on obtient :

$$[\tilde{f}]^r_\Gamma = \left(\left[\prod_{j=1}^{m}(X_1 - Y_1^j)\right] g_1\right)^r_{\tilde{\Gamma}} + \left(\sum_{k=0}^{m-1}(\Phi_k \circ p_1)[X_1^k]\right)^r_{\tilde{\Gamma}},$$

avec $\Phi_k = A^{m-1}_{1,k}$ $(r-m+1)$-régulier défini sur $p(\tilde{\Gamma})$ et $g_1 = \tilde{H}_{1,m}$ $(r-m)$-régulier.

En recommençant, la division pour les champs $\Phi_k \circ p_1$ et au bout de l opérations :

$$[\tilde{f}]^r_{\tilde{\Gamma}} = \left[\sum_{i=1}^{l}\left(\left[\prod_{j=1}^{m}(X_i - Y_i^j)\right] g_i\right)\right]^r_{\tilde{\Gamma}} + \left[\sum_{\gamma}\Phi_\gamma[X^\gamma]\right]^r_{\tilde{\Gamma}} \qquad (**)$$

où $\gamma = (\gamma_1, \cdots, \gamma_l) \in \mathbb{N}^l, 0 \leq \gamma_j \leq m-1$ et les champs Φ_γ sont formellement holomorphes, $(r - l(m-1))$-régulier, symétriques en les variables y_i et définis sur $(\sigma^{-1}(\mathbb{R}^m))^l$.

Pour $x = (x_1, \cdots, x_l) \in \mathbb{C}^l$, on associe $x^{(k)} = w_k x$ où les w_k décrivent W, avec $1 \leq k \leq n$ et $w_1 = id$. On substitue à y_i les $y_i(x) = (x_i^{(1)}, \cdots, x_i^{(m)})$ où $x_i^{(k)}$ est la $i^{ème}$ coordonnée de $x^{(k)}$.

Comme $x_i^{(1)} = x_i$, il vient de $(**)$:

$$[\tilde{f} \circ (id \times y)]^r_{(id\times y)^{-1}(\tilde{\Gamma})} = \left[\sum_{\gamma}(\Phi_\gamma \circ y)[X^\gamma]_{\tilde{\Gamma}}\right]^r_{(id\times y)^{-1}(\tilde{\Gamma})}.$$

L'application $id \times y$ est linéaire injective de $\mathbb{C}^l$ dans $\mathbb{C}^l \times (\mathbb{C}^m)^l$ et définie sur les réels : l'image réciproque $\Lambda = (id \times y)^{-1}(\tilde{\Gamma})$ est donc une réunion finie de formes réelles de $\mathbb{C}^l$.

On remarque alors que l'ensemble Λ est W-invariant. En effet, soit $x \in \Lambda$, $w_k \in W$, il suffit de montrer que $(w_k x, y(w_k x)) \in \tilde{\Gamma}$, et, par définition de $\tilde{\Gamma}$, il suffit de voir que $\tau_k(w_k x, y(w_k x)) \in \Gamma$. Mais ceci est vérifié car les l premières coordonnées sont nulles et que $y_i(w_k x) = \pi(y_i(x))$ pour une certaine permutation π, si bien que $y_i(w_k x)$ et $y_i(x)$ sont simultanément dans $(\sigma^{-1}(\mathbb{R}^m))^l$. Ceci finit de montrer la W-invariance de Λ.

En moyennant sur W, on obtient alors un prolongement de f à Λ, W-invariant.

Reste à voir que Λ contient $u^{-1}(\mathbb{R}^l)$.

Mais comme Φ_γ est symétrique en les y_i, par le résultat usuel, on peut écrire $\Phi_\gamma = \psi_\gamma \circ \tilde{\sigma}$ où $\tilde{\sigma} = (\sigma^1, \cdots, \sigma^l)$ est le produit de l applications de Newton. $(**)$ devient alors :

$$[\tilde{f} \circ (id \times y)]^r_\Lambda = \left[\sum_{\gamma}(\psi_\gamma \circ \tilde{\sigma} \circ y)[X^\gamma]_{\tilde{\Gamma}}\right]^r_\Lambda,$$

et par construction $\tilde{\sigma} \circ y$ est W-invariante donc les $\sigma_i(y_i)$ s'expriment comme des polynômes définis sur $\mathbb{R}$, en $u(x) = (p_i(x))$ par le résultat 64 rappelé. Si $x_0 \in u^{-1}(\mathbb{R}^l)$, ces polynômes prennent des valeurs réelles donc $y(x_0) \in (\sigma^{-1}(\mathbb{R}^m))^l$ et $x_0 \in \Lambda$. ■

Lemme 3.74: Soit Φ un champ Taylorien d'ordre r, formellement holomorphe, W-invariant sur un fermé Γ (W-invariant) contenu dans une réunion W-invariante de formes réelles de $\mathbb{C}^l$. Il existe un champ G formellement invariant sur $u(\Gamma)$ qui vérifie $\Phi = [G \circ u]^r$.

En particulier, si Φ est défini sur $u^{-1}(\mathbb{R}^l)$, G est défini sur $\mathbb{R}^l$.

Preuve : On rappelle que R est l'ensemble des réflexions de W, et non H_τ^C l'hyperplan noyau d'une réflexion τ. L'application u est un isomorphisme analytique local sur le complémentaire dans Γ de la réunion des hyperplans $(H_\tau^C)_{\tau\in\mathbb{R}}$. La construction de G est donc sans ambiguïté sur cet ensemble car Φ et u sont W-invariants.

Soient $x \in \Gamma \cap (\cup_{\tau\in R} H_\tau^C)$ et W_x le stabilisateur de x pour l'action usuelle de W. Alors Φ_x est évidemment W-invariant, puisque pour $w_0 \in W_x \subset W$ et sachant que le champ Φ est W-invariant et que $w_0 x = x$, on a :

$$\Phi_x(X) = \Phi_{w_0 x}(w_0 X) = \Phi_x(w_0 X).$$

Ainsi Φ_x peut s'écrire comme polynôme en les W_x-invariant élémentaires $v = (v_1, \cdots, v_l)$ qui engendrent S^{W_x}, disons donc que $\Phi_x = Q^x \circ v$.

Il faut montrer que cette construction n'est pas ambiguë, c'est à dire que Q ne dépend que de $u(x)$ et pas de x. Or si $y \in u^{-1}(u(x))$, il existe $w \in W$ tel que $y = wx$ et les stabilisateurs W_x et W_y soient conjugués par w. Notons $v' = (v'_1, \cdots, v'_l)$ les W_y-invariants élémentaires, et admettons un instant que l'on peut les choisir tels que $v' \circ w = v$. On a alors :

$$\Phi_{wx} = Q^{wx} \circ v',$$

puis

$$\Phi_{wx}(wX) = Q^{wx} \circ v' \circ w = Q^{wx} \circ v.$$

Enfin, puisque $\Phi = \Phi \circ w$, on trouve $Q^{wx} \circ v = Q^x \circ v$, d'où l'égalité de Q^x et Q^{wx} car v est surjective.

Revenons brièvement à notre choix d'invariants élémentaires tel que $v' \circ w = v$. Pour $y \in \mathbb{C}^l$ et $w_1 \in W_{wx}$ quelconques, on a l'identité suivante : $v'(w_1 y) = v'(y)$ et il existe $w_0 \in W_x$ avec $w_1 = w w_0 w^{-1}$ et donc si on pose $t = w^{-1} y$, cela implique $v' \circ w(w_0 t) = v' \circ w(t)$. Donc $v' \circ w$ s'exprime comme polynôme en v, et comme l'inverse est aussi vrai, on a ce qu'on voulait.

Pour conclure la démonstration, rappelons qu'il existe un voisinage de x dans $\mathbb{C}^l$ ne rencontrant aucun autre hyperplan noyau de réflexions que ceux contenant x. Dans ce voisinage, on peut écrire $u = q \circ v$ car u est W_x-invariant. Or, par dérivation des composées et multiplicativité du déterminant, le jacobien de q est à une constante numérique près le produit $\prod_{\lambda_s(x)\neq 0} \lambda_s$. Au voisinage de $v(x)$, q est donc un isomorphisme analytique. Le champ recherché s'obtient alors en posant $G_{u(x)} = Q^{v(x)} \circ q^{-1}$. ■

Preuve (du Théorème des invariants) : Soit f une fonction de classe C^r sur $\mathbb{R}^l$, W-invariante. Les deux lemmes précédents montrent qu'il existe un champ de polynômes F sur $\mathbb{R}^l$ vérifiant $f = F \circ u$ résolvant le problème ponctuel.

De plus, le lemme 73 fournit un prolongement de f à Λ, réunion W-invariante de formes réelles de $\mathbb{C}^l$, contenant $u^{-1}(\mathbb{R}^l)$, par un champ $\tilde{f}$, formellement holomorphe et r-régulier. Le lemme 74 montre alors que F est la restriction d'un champ $\tilde{F}$ sur $u(\Lambda)$, que nous allons étudier.

Sur le complémentaire dans Γ de l'union des hyperplans fixés par les réflexions du groupe W, $\tilde{F}$ s'obtient par inversion locale de u, et est donc r-régulier sur le complémentaire dans $u(\Lambda)$ de la surface algébrique :

$$\Delta(u) = 0, \qquad avec \qquad \Delta(u(x)) = \prod_{\tau \in R} \lambda_\tau^2(x).$$

Par le lemme 68, la r-régularité de $\tilde{f}$ se ramène donc à sa r-continuité.

Avec les notations du début de cette partie, on a maintenant :

$$u : (t, x) \in V_0 \times V_1 \mapsto (t, p).$$

Sa matrice jacobienne s'écrit par bloc et son déterminant est toujours $c \prod_{\tau \in R} \lambda_\tau$. En dérivant par rapport aux indéterminées $\tilde{f} = \tilde{F} \circ u$, on obtient :

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial \tilde{f}}{\partial T} \\ \frac{\partial \tilde{f}}{\partial X} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} [id_a] & 0 \\ 0 & \left[\left(\frac{\partial p_i}{\partial x_j}\right)\right] \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial \tilde{F}}{\partial T} \circ u \\ \frac{\partial \tilde{F}}{\partial P} \circ u \end{pmatrix}.$$

Ce système se résout par la méthode de Cramer :

$$\begin{cases} \frac{\partial \tilde{F}}{\partial T_i} \circ u = \frac{\partial \tilde{f}}{\partial T_i}, & i = 1, 2, \cdots, a \\ \frac{\partial \tilde{F}}{\partial P_j} \circ u = \frac{1}{c \prod_{\tau \in R} \lambda_\tau} \sum_{i=1}^n \frac{\partial \tilde{f}}{\partial X_i} [M_{i,j}], & j = 1, 2, \cdots, n \end{cases}$$

avec la notation $[M_{i,j}]$ pour le cofacteur de $[\partial p_j / \partial x_i]$.

Nous prenons maintenant pour $i^{ème}$ vecteur de base dans V_1 une base du sous-espace des points fixes de W_i (sous-groupe de W introduit au début de la partie). Comme les p_j sont des W_i-invariants, on peut les écrire comme des polynômes en les W_i-invariants élémentaires $(x_i, q_1, \cdots, q_{n-1})$. On trouve alors :

$$M_{i,j} = \det \left(\frac{\partial p_l}{\partial x_k} \right)_{l \neq j, k \neq i} = det \left(\frac{\partial q_i}{\partial x_k} \right) Q_{i,j}(q, x_i).$$

Alors, $M_{i,j}$ est W_i-anti-invariant : c'est un multiple polynomial de $\prod_{R_i} \lambda_{\tau,i}$. On obtient ainsi :

$$\frac{\partial \tilde{F}}{\partial P_j} \circ u = \frac{1}{c \prod_{\tau \in R} \lambda_\tau} \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \tilde{f}}{\partial X_i} Q_{i,j} \circ q \prod_{R_i} \lambda_{\tau,i}.$$

Soit comme dans l'énoncé du théorème, $d = card(R)$ et $s = inf(card(R_i))$, par le lemme 71, on sait que $\frac{\partial \tilde{F}}{\partial P_j} \circ u$ est $(r-1-d+s)$-régulier. Mais il est de plus W-invariant, et on peut donc itérer l'opération de telle sorte que $D^k \tilde{F} \circ u$ est $(r-|k|(1+d-s))$-régulier. Puisque u est propre comme rappelé au théorème 64, on obtient donc la continuité de $D^k \tilde{f}$ pour $|k| \leq r/(1+d-s)$

Ainsi, $\tilde{F}$ est $|k|$-régulier pour $|k| \leq [r/(1+d-s)]$ et on a donc la régularité au même ordre pour sa restriction F à $\mathbb{R}^l$. ■

3.4 Théorème de restriction de Chevalley en classe C^r

Soit $\mathfrak{g}_0$ une algèbre de Lie semi-simple réelle, G son groupe adjoint, soit $\mathfrak{g}_0 = \mathfrak{k}_0 \oplus \mathfrak{p}_0$ une décomposition de Cartan, à laquelle on associe le sous-groupe compact maximal K de G, qui opère sur $\mathfrak{p}_0$ comme d'habitude.

Nous admettrons une légère généralisation du théorème de Chevalley démontré dans la partie précédente. Soit $\mathfrak{a}_0$ un sous-espace de Cartan de $\mathfrak{p}_0$ et W le groupe de Weyl associé. Nous admettrons l'existence d'un isomorphisme dans le cas réel entre les algèbres $S(\mathfrak{p}_0)^K$ et $S(\mathfrak{a}_0)^W$.

Nous commençons par énoncer le résultat de prolongement qui découle directement de la partie précédente :

Proposition 3.75: Toute fonction de classe C^r sur $\mathfrak{a}_0$, W-invariante, se prolonge en une fonction K-invariante sur $\mathfrak{p}_0$ qui s'écrit comme une fonction de classe C^q des K-invariants élémentaires de $\mathfrak{p}_0$ déduit du théorème de Chevalley polynomial, avec comme précédemment $q = [r/(1+d-s)]$, s et d déterminés comme dans la partie précédente.

Preuve : Soit $\phi \in C^r(\mathfrak{a}_0)^W$, le théorème de prolongement donne une écriture $\phi = \Phi \circ u$ avec $\Phi \in C^q(\mathbb{R}^l)$. En remplaçant u par l'application $\tilde{u}$ de K-invariants élémentaires donnés par l'isomorphisme de Chevalley, on obtient l'extension voulue. ■

Le théorème de Chevalley ne va par contre pas contenir de perte de dérivabilité.

Théorème 3.76: La restriction induit un isomorphisme d'espace de Fréchet entre $C^r(\mathfrak{p}_0)^K$ et $C^r(\mathfrak{a}_0)^W$.

PREUVE : La restriction à $\mathfrak{a}_0$ induit une application linéaire continue de $C^r(\mathfrak{p}_0)^K$ dans $C^r(\mathfrak{a}_0)^W$, qui est injective car toute K-orbite rencontre $\mathfrak{a}$ comme vue au lemme 57.

Il faut donc montrer que $f \in C^r(\mathfrak{a}_0)^W$ est la restriction à $\mathfrak{a}$, d'une fonction $F \in C^r(\mathfrak{p}_0)^K$.

Or, on sait de plus que W permute les chambres de Weyl par le lemme 62 (c'est à dire, comme dans la première partie, les composantes connexes de $\mathfrak{a}_0$ privée des hyperplans fixés par les réflexions de W).

Un élément régulier de $\mathfrak{p}_0$ est d'abord par le lemme 57, associé par K à un élément de $\mathfrak{a}_0$, qui est nécessairement régulier, donc inclus dans une chambre de Weyl.

Ensuite, fixons une chambre de Weyl $C \subset \mathfrak{a}_0$, et soit x un élément régulier de $\mathfrak{a}_0$, qui est donc conjugué par W à un élément de C unique (deux éléments d'une même chambre de Weyl ne peuvent être conjugués par W), que l'on note $\theta(x)$.

Si H_1 et H_2 sont dans deux chambres de Weyl distinctes, et si wH_1 est dans la même chambre que H_2, on a clairement :

$$|H_1 - H_2| > |wH_1 - H_2|.$$

(car en écrivant w comme produit minimal de réflexions, il suffit de le montrer de proche en proche pour w réflexion de W, et ceci découle d'une inégalité triangulaire) (on a pris sur $\mathfrak{a}_0$ une norme rendant les réflexions de W orthogonales.)

Ainsi, on trouve que :

$$|\theta(x_1) - \theta(x_2)| \leq |x_1 - x_2|,$$

pour $x_1, x_2 \in \mathfrak{a}_0$. Donc θ est lipschitzienne sur $\mathfrak{a}_0$ (car les éléments réguliers de $\mathfrak{a}_0$ forment un ensemble dense de $\mathfrak{a}_0$, si bien qu'on peut d'abord prolonger θ à $\mathfrak{a}_0$ de manière lipschitzienne), et de plus analytique sur chaque chambre de Weyl (qui contient des éléments réguliers), de la même manière que l'action des éléments de W avec lesquelles elle coïncide sur ces chambres (l'élément de W avec lequel elle coïncide dépend bien sûr de la chambre).

De plus, θ a un unique prolongement à $\mathfrak{p}_0$, d'après la propriété du lemme 57.(iii) déjà citée.

Reste à montrer que ce prolongement est lipschitzien sur $\mathfrak{p}_0$ et analytique en tout point régulier de $\mathfrak{p}_0$.

En effet, pour le premier point, remarquons d'abord que, comme tous les sous-espaces abéliens maximaux de $\mathfrak{p}_0$ sont conjugués par K, et comme notre prolongement est K-invariant, il est clair que ce prolongement est lipschitzien sur chacun des sous-espaces abéliens maximaux avec la même constante de lipschitzianité.

Ensuite, soit $X, Y \in \mathfrak{p}_0$, soit $Ad(k_0)Y$ le point de l'orbite compacte $Ad(K)Y$ qui minimise la distance $G(k) = |X - Ad(k)Y|^2$. La relation

$$\left\{ \frac{d}{dt} G((\exp\ tT)k_0) \right\}_{t=0} = 0, \qquad \forall T \in \mathfrak{k}_0 ,$$

conduit, par un calcul simple, à l'identité : $[X, Ad(k_0)Y] = 0$. Ainsi X et $Ad(k_0)Y$ se trouve dans un même sous-espace abélien et :

$$|\theta(X) - \theta(Y)| = |\theta(X) - \theta(Ad(k_0))Y)| \leq |X - Ad(k_0)Y| \leq |X - Y|$$

(en désignant aussi par θ le prolongement).

Passons à l'analycité. On démontre que si une fonction ϕ est W-invariante, holomorphe sur $\mathfrak{a}$, son extension à $\mathfrak{p}$ l'est aussi, ce qui se généralisera aux cas de l'analycité réelle sur des ouverts en passant d'abord au complexifié.

Soit $l = dim\mathfrak{a}_0$ et u l'application usuelle décrivant les invariants élémentaires de $\mathfrak{a}$. On a l'extension de Taylor pour ϕ :

$$\phi(H) = \sum_{(\alpha)} a_{\alpha_1, \cdots, \alpha_n} h_1^{\alpha_1} \cdots h_l^{\alpha_l} = \sum_{m=0}^{\infty} A_m(H), \qquad H = (h_1, \cdots, h_l) \in \mathfrak{a}_0 ,$$

avec

$$A_m(H) = \sum_{\alpha_1 + \cdots + \alpha_l = m} a_{\alpha_1, \cdots, \alpha_n} h_1^{\alpha_1} \cdots h_l^{\alpha_l}.$$

Chaque A_m est W-invariant, et peut donc être exprimé sous la forme :

$$A_m = \sum b_{\beta_1, \cdots, \beta_l} u_1^{\beta_1} \cdots u_l^{\beta_l},$$

avec $\sum_{i=1}^{l} \beta_i (deg\ u_i) = m$. On sait que de u envoie $\mathfrak{a}_0$ sur $\mathbb{C}^l$. En fait, pour $(\xi_1, \cdots, \xi_l) \in \mathbb{C}^l$, l'application $p_i \mapsto \xi_i, (1 \leq i \leq l)$ donne, par l'indépendance algébrique des p_i, un homomorphisme de $S(\mathfrak{a})^W$ sur $\mathbb{C}$, qui, comme $S(\mathfrak{a})$ est entier sur $S(a)^W$ par l'étape 4 de la démonstration de 63, est donnée par l'évaluation ponctuelle.

Ainsi, la série :

$$\phi^*(\xi) = \sum_{m=0}^{\infty} B_m(\xi),$$

avec $\xi = (\xi_1, \cdots, \xi_l)$ et :

$$B_m(\xi) = \sum_{\beta} b_{\beta_1, \cdots, \beta_l} \xi_1^{\beta^1} \cdots \xi_l^{\beta_l}, (\sum_{i=1}^{l} \beta_i (deg(p_i)) = m)$$

converge absolument. En effet, pour voir que la dernière série converge sur les compacts, soit $C \subset \mathbb{C}^l$ un compact. Comme u est non seulement surjective mais propre, il existe un compact $\tilde{C} \subset \mathfrak{a}$ tel que $u(\tilde{C}) \subset C$. Les deux premières séries définissant ϕ convergent absolument sur $\tilde{C}$. Et puisque $B_m(u(H)) = A_m(H)$, on en déduit que la série définissant ϕ^* est uniformément convergente sur C, et donc que ϕ^* est holomorphe. Par le théorème de Chevalley, u_i s'étend en une application K-invariante sur $\mathfrak{p}$, qui doit coïncider avec le prolongement déjà connu par invariance. Ceci conclut le lemme annoncé.

Pour analyser le comportement des dérivées de θ, on montre que pour $x \in \mathfrak{p}_0$, régulier, $\tilde{E}$ le complémentaire des points réguliers semi-simples dans $\mathfrak{p}$, si on pose $\epsilon = d(x, \tilde{E})$, alors pour tout $k = (k_1, \cdots, k_s) \in \mathbb{N}^n$, et si $s = dim_{\mathbb{R}}(\mathfrak{p}_0)$, on a :

$$\left|\frac{\partial^{|k|}}{\partial x^k}\theta(x)\right| \leq C_{|k|}\frac{1}{\epsilon^{k-1}}.$$

En effet, θ admet un prolongement holomorphe au voisinage des points réguliers de $\mathfrak{p}_0$. Soit alors $\epsilon' < \epsilon$, on obtient :

$$\frac{\partial^{|k|}}{\partial x^k}\theta(x) = \frac{k!}{(2i\pi)^s}\int_{|\zeta_i - x_i| = \epsilon'/a\sqrt{s}, 1\leq i\leq s}\frac{\theta(\zeta)}{(\zeta - x)^k(\zeta - x)}d\zeta$$

$$\frac{\partial^{|k|}}{\partial x^k}\theta(x) = \frac{k!}{(2i\pi)^s}\int_{|\zeta_i - x_i| = \epsilon'/a\sqrt{s}, 1\leq i\leq s}\frac{\theta(\zeta) - \theta(x)}{(\zeta - x)^k(\zeta - x)}d\zeta,$$

soit

$$\left|\frac{\partial^{|k|}}{\partial x^k}\theta(x)\right| \leq \frac{k!}{(2\pi)^s}\frac{(2\pi\frac{\epsilon'}{4\sqrt{s}})^s}{(\frac{\epsilon'}{4\sqrt{s}})^{|k|+s}}\epsilon' = C_{|k|}\frac{1}{\epsilon'^{|k|-1}},$$

pour tout $0 < \epsilon' < \epsilon$.

Revenons à la construction de F, elle se fait par $F = f \circ \theta$ pour les points réguliers de $\mathfrak{p}_0$, et ainsi F est C^r sur cet ensemble.

Définissons alors F sur $\mathfrak{p}_0$ en x tel que $\theta(x) \in \bar{C} - C$ comme champs de Whitney.

Le polynôme du champ associé à f en $\theta(x)$ est invariant par le stabilisateur $W_{\theta(x)}$ de ce point dans W.

Comme pour le lemme 74, $f_{\theta(x)} = Q \circ v$ est un polynôme Q en les invariants élémentaires $v = (v_1, \cdots, v_l)$ de $W_{\theta(x)}$. Et comme u est aussi $W_{\theta(x)}$-invariant, il s'écrit aussi, $u = q \circ v$, sachant que q est localement inversible sur un voisinage de $v(\theta(x))$ comme précédemment en calculant le jacobien en terme de produit de formes linéaires associées aux réflexions n'annulant pas x. Ainsi, on peut écrire $f_{\theta(x)} = Q \circ q^{-1} \circ u$ et donc ceci définit $F_x = Q \circ q^{-1} \circ \tilde{u}$ en utilisant l'isomorphisme de Chevalley pour les polynômes.

Et, alors on remarque que pour des raisons d'invariance de $\tilde{u}$, $F_x(y) = f_{\theta(x)}(\theta(y))$.

Comme d'habitude, grâce au lemme 68, il suffit de montrer que F ainsi défini est r-continu pour avoir sa r-régularité au regard de sa r-régularité sur l'ouvert de Zariski des points réguliers de $\mathfrak{p}_0$.

Soient donc x_0 et x_1 deux éléments de $\mathfrak{p}_0$ avec $\theta(x_0) \in \bar{C}$ et $\theta(x_1) \in C$, on trouve par r-régularité de f :

$$F_{x_1}x_1 - F_{x_0}(x_1) = f_{\theta(x_1)}\theta(x_1) - f_{\theta(x_0)}(\theta(x_1)) \in o(|\theta(x_1) - \theta(x_0)|^r)$$

$$(R^r_{\theta(x_0)f})^p(\theta(x_1)) \in o(|\theta(x_1) - \theta(x_0)|^{r-|p|}),$$

pour $0 \leq |p| \leq r$.

On utilise alors la formule de Faà di Bruno de la dérivée multiple d'une fonction composée (cf. en annexe, la proposition 77) à plusieurs variables pour avoir la majoration suivante pour $|k| \leq r$:

$$\left|(R^r_{x_0}F)^k(x_1)\right| \leq \sum_{\substack{\mu_1 + \cdots + \mu_q = |p| \\ 1\mu_1 + \cdots + q\mu_q = |k|}} C_{p,\mu} \left|(R^r_{\theta(x_0)}f)^p(\theta(x_1))\right| \times |D^1\theta(x_1)|^{\mu_1} \cdots |D^q\theta(x_1)|^{\mu_q}.$$

En utilisant la condition de r-régularité de f rappelée ci-dessus, et le résultat de majoration des dérivées de θ, on trouve :

$$\begin{aligned}\left|(R^r_{x_0}F)^k(x_1)\right| &\leq \sum \tfrac{C'_{p,\mu}}{(\epsilon(x_1))^{|k|-|p|}} o(|\theta(x_1) - \theta(x_0)|^{r-|p|}) \\ &\leq \sum \tfrac{C'_{p,\mu}}{(\epsilon(x_1))^{|k|-|p|} o(|x_1 - x_0|^{r-|p|})}.\end{aligned}$$

Le résultat de r-continuité est ainsi obtenu si $|x_1 - x_0| \leq \epsilon(x_1)$. Mais sinon, de toute façon, il existe $x_2 \in \mathfrak{p}_0$ avec $|x_1 - x_2| \leq \epsilon(x_1) \leq |x_1 - x_0|$, si bien que, en décomposant sous la forme :

$$\left|(R^r_{x_0}F)^k(x_1)\right| \leq \left|(R^r_{x_2}F)^k(x_1)\right| + \left|(R^r_{x_2}F - R^r_{x_0}F)^k(x_1)\right|,$$

le premier terme se majore par $o(|x_1 - x_2|^{r-|k|})$ et pour le deuxième, on obtient, en oubliant les troncatures, et en dérivant :

$$\begin{aligned}F_{x_2}x_1 - F_{x_0}(x_1) &= f_{\theta(x_2)}\theta(x_1) - f_{\theta(x_0)}(\theta(x_1)) \\ &= \textstyle\sum_{|h| \leq r} \frac{(\theta(x_1) - \theta(x_2))}{h!} (R^r_{\theta(x_0)}f)^h(\theta(x_2)).\end{aligned}$$

On utilise alors de nouveau la condition de r-régularité de f énoncée ci-dessus ainsi que les majorations sur les dérivées de θ, sachant que $|x_1 - x_2| \leq \epsilon(x_1)$ pour trouver :

$$\left|(R^r_{x_2}F - R^r_{x_0}F)^k(x_1)\right| \in o(|x_1 - x_2|^{r-|k|} + |x_0 - x_2|^{r-|k|}).$$

Ainsi, comme $|x_0 - x_2| \leq 2|x_0 - x_1|$ on obtient à la fois $(R^r_{x_2}F - R^r_{x_0}F)^k(x_1)$ puis $(R^r_{x_0}F)^k(x_1)$ dans $o(|x_1 - x_0|^{r-|k|})$. Une récurrence conclut ensuite à la continuité sur $\mathfrak{p}_0$ de F pour les ordres inférieurs ou égaux à r.

Enfin, sur un compact L de $\mathfrak{p}_0$, dont l'image $\theta(L) \subset \mathfrak{a}_0$ est compacte, la formule de Faà di Bruno donne :

$$||F||_{r,L} \leq C'_L ||f||_{r,\theta(L)},$$

montrant l'isomorphisme d'espaces de Fréchet. ∎

Annexe : La formule de Faà di Bruno

Proposition 3.77: Soit $f : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}$ and $x = (x_1, \cdots, x_n) : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}^n$, tels que toutes les dérivées nécessaires sont définies, alors :

$$D^n f(x(t)) = \sum_0 \cdots \sum_n \frac{n!}{\prod_{i=1}^n (i!)^{k_i} \prod_{i=1}^n \prod_{j=1}^r q_{i,j}!} \frac{\partial^{|p|} f}{\partial x^p} \times \prod_{i=1}^n (x_1^{(i)})^{q_{i,1}} \cdots (x_r^{(i)})^{q_{i,r}},$$

où les sommes respective sont prises sur tous les indices entier positif des solutions des équations diophantienne :

$$\begin{aligned}
\sum_0 &\rightarrow k_1 + 2k_2 + \cdots + nk_n = n \\
\sum_1 &\rightarrow q_{1,1} + q_{1,2} + \cdots + q_{1,r} = k_1 \\
\sum_2 &\rightarrow q_{2,1} + q_{2,2} + \cdots + q_{2,r} = k_2 \\
&\vdots \\
\sum_n &\rightarrow q_{n,1} + q_{n,2} + \cdots + q_{n,r} = k_n
\end{aligned}$$

et avec l'opérateur différentiel $D = d/dt$,p_j l'ordre des dérivations partielles par rapport aux x_j avec :

$$p_j = q_{1,j} + q_{2,j} + \cdots + q_{n,j}, \qquad j = 1, 2, \cdots, r$$

$$|p| = k_1 + \cdots + k_n.$$

Les majorations de la dernière partie s'obtiennent – comme on a une fonction θ de plusieurs variables, au lieu de x – en dérivant partiellement par rapport à chaque variable par une récurrence. De plus, on prend dans les majorations, chaque coordonnée d'un vecteur dérivé inférieure à son module pour limiter le nombre de sommes.

Références

[1] G. Barbançon. Théorème de Newton pour les fonctions en classe C^r. *Annales scientifiques de l'École Normale Supèrieure*, 4(5), 1972.

[2] G. Barbançon. Invariants de classe C^r des groupes finis engendrés par des réflexions et théorème de Chevalley en classe C^r. *Duke Mathematical Journal*, 53(3), September 1986.

[3] Jacques Dixmier. *Algèbres enveloppantes.* Gauthier Villard, 1974.

[4] Sigurdur Helgalson. *Differential Geometry and Symmetric Spaces.* Academic Press, 1962.

[5] James E. Humpreys. *Introduction to Lie Algebras and Representation Theory* . Springer, 1972.