

Théorie des matrices aléatoires

Calcul de polynômes caractéristiques
avec application en
chromodynamique quantique

J.-L. CORNOU et A. POTTIER

Exposé de maîtrise du MMFAI
École Normale Supérieure

juin 2004

Résumé

L'exposé présente les origines physiques de la théorie des matrices aléatoires, en particulier le lien avec les symétries des systèmes étudiés. Des résultats généraux sur les modèles de matrices aléatoires sont donnés avant de présenter des calculs nouveaux de polynômes caractéristiques.

Le sujet de ce mémoire nous a été proposé par Gernot Akemann que nous tenons à remercier pour son aide attentive. Nous remercions également Philippe Biane pour ses conseils avisés.

Table des matières

1	Introduction	3
2	Symétries, Ensembles gaussiens, non gaussiens	3
2.1	Symétries et ensembles gaussiens	3
2.1.1	Ensemble Gaussien Orthogonal (GOE)	4
2.1.2	Ensemble Symplectique Gaussien (GSE)	4
2.1.3	Ensemble Gaussien Unitaire (GUE)	5
2.2	Ensembles non gaussiens, ensembles chiraux	5
3	Résultats généraux	6
3.1	Changement de variables	6
3.2	Définitions	7
3.3	Calcul des fonctions de corrélation	8
3.4	Représentation des polynômes orthogonaux	9
4	Moyenne de polynômes caractéristiques	10
4.1	Produit – Formule de Brézin et Hikami	10
4.2	Quotient – Formule de Fyodorov et Strahov	11
4.3	Produits et quotients mêlés	12
4.4	Produits et quotients en fonction du noyau – Cas réel	12
5	Limites asymptotiques	13
5.1	Les différentes types de limites	13
5.2	Le cas unitaire gaussien : $w(x) = e^{-x^2}$	13
6	Appendice	15
6.1	Notation du chapitre 4.	15
6.2	Formule de Christoffel	15
6.3	Formule d’Uvarov	16
6.4	Produits et quotients mêlés	17
6.5	Produits et quotients – cas réel	18
6.6	Complément : une autre façon de voir, les ensembles circulaires	20

1 Introduction

Cet exposé traite des matrices aléatoires, i.e. des matrices dont les éléments sont des variables aléatoires, munies de certaines lois. L'étude porte ici sur les valeurs propres de tels objets. Ce travail trouve de nombreuses applications dans des domaines très divers des mathématiques et de la physique : physique nucléaire, physique statistique, zéros de la fonction ζ de Riemann pour nommer quelques exemples [1].

Précisons le lien entre matrices aléatoires et physique quantique. D'après cette théorie, les niveaux d'énergie d'un système sont donnés par les valeurs propres d'un opérateur appelé *hamiltonien*. Pour des systèmes physiques tels que des noyaux, le hamiltonien microscopique est d'une très grande complexité. Les degrés de liberté sont très nombreux et leurs interactions rendent le modèle insoluble analytiquement. Ainsi, on ne peut décrire que les propriétés statistiques du système. L'utilisation de modèles de matrices aléatoires paraît alors pertinente.

Les seules contraintes imposées sur les matrices aléatoires proviennent des symétries globales, i.e. indépendantes de la dynamique, du système physique sous-jacent. Ceci sera précisé dans la première partie de cet exposé. Ensuite, nous exposerons les techniques nécessaires pour connaître les fonctions de corrélation des niveaux d'énergie. Ceci fera intervenir le calcul d'un jacobien, ainsi que l'introduction de polynômes orthogonaux. Enfin, nous décrirons l'utilisation des polynômes caractéristiques afin de calculer les fonctions de partition de la chromodynamique quantique dans une certaine limite.

En *chromodynamique quantique* (l'étude de l'interaction forte entre quarks et gluons), on approche l'opérateur de Dirac par une matrice aléatoire dans les régimes de basse énergie. Il est défini par $\mathcal{D} = \gamma_\mu (\partial^\mu + iA^\mu)$ où les matrices γ_μ jouent un rôle central dans la formulation de l'équation du mouvement relativiste avec spin. Les A_μ représentent le champ de jauge, i.e. les gluons. En posant $\gamma_5 = \gamma_1\gamma_2\gamma_3\gamma_4$, on peut vérifier que $\mathcal{D}\gamma_5 + \gamma_5\mathcal{D} = 0$. Ainsi, on trouve une symétrie supplémentaire en QCD, la *symétrie chirale*. Elle correspond aux projecteurs $\frac{1}{2}(1 \pm \gamma_5)$ qui ont pour images respectives les états d'hélicité gauche et droite. Mais, pour des systèmes possédant une masse non nulle, la symétrie est explicitement brisée car les deux états d'hélicité deviennent couplés. L'opérateur de symétrie U , qui comporte deux composantes U_L et U_R , se réduit à un unique opérateur ($U_R = U_L$) lorsque la symétrie est brisée de façon explicite ou spontanée. On passe ainsi du groupe de symétrie $U(N_f) \times U(N_f)$ à $U(N_f)$ [2].

Prenons un autre exemple simple : un système de spins avec deux degrés de liberté de rotation. Le hamiltonien de ce système est invariant par rotation. Cependant, un phénomène de magnétisation spontanée brise cette symétrie et le système est invariant uniquement par les rotations d'axe parallèle à la magnétisation. De plus, le théorème de Goldstone affirme que cette brisure spontanée de symétrie produit des quasi-particules de masse nulle en l'absence de champ : les modes de Goldstone.

L'analogie consiste à considérer un système de spins ferromagnétiques invariant par rotation, l'état fondamental brise la symétrie car la valeur moyenne du spin est non nulle. Mais les états de haute énergie la respectent sous l'effet de l'agitation thermique. Les modes de Goldstone correspondant sont des ondes de spins se propageant perpendiculairement à la magnétisation spontanée.

2 Symétries, Ensembles gaussiens, non gaussiens

2.1 Symétries et ensembles gaussiens

D'après un théorème de Wigner cité dans [1], toute symétrie en mécanique quantique est soit unitaire, soit antiunitaire (i.e. antilinéaire et unitaire). D'après certaines considérations, l'opérateur de renversement du temps T est antiunitaire. Notons C l'opérateur de conjugaison complexe. Alors, il existe K unitaire tel que $T = KC$.

Définition 2.1. Un opérateur A se transforme en $A^R = K A^T K^{-1}$ par renversement du temps. Un opérateur H est dit invariant par renversement du temps si $H = H^R$.

Proposition 2.1. K est soit symétrique soit antisymétrique. Donc $T^2 = \pm I$

2.1.1 Ensemble Gaussien Orthogonal (GOE)

Plaçons nous dans le cas où K est symétrique. Alors il existe U unitaire tel que $K = U U^T$. Ainsi, la transformation $\psi \mapsto U^{-1} \psi$ transforme K en I . Dans ce cas, on choisit une base où $K = I$. Dès lors, une transformation unitaire fixe K si et seulement si la transformation est symétrique réelle. Un système invariant par renversement du temps peut donc être représenté par un hamiltonien symétrique réel.

Considérons à présent les rotations spatiales. L'opérateur fondamental associé est le moment cinétique \mathbf{J} du système. On peut utiliser une représentation usuelle dans laquelle J_2 est imaginaire pure. Ainsi, le choix de $K = e^{i\pi J_2}$ pour l'opérateur de rotation implique $H^R = H^T$. Ainsi, un système invariant par rotation peut être représenté par un hamiltonien symétrique réel. Ceci correspond au cas d'un système avec spin pair.

On introduit alors l'ensemble gaussien orthogonal E_{1G} comme idéalisation mathématique. En effet, la définition inclut l'indépendance des éléments de matrices, ce qui constitue une hypothèse non physique car les états sont liés en général.

Définition 2.2. E_{1G} est un espace mesuré. C'est l'ensemble des matrices symétriques réelles munie d'une mesure invariante sous $H \mapsto W^T H W$ pour tout $W \in O(\mathbb{R})$ et de la forme $\bigotimes_{k \leq j} P_{kj}(H_{kj})$

2.1.2 Ensemble Symplectique Gaussien (GSE)

On se place maintenant dans le cas d'un système invariant par renversement du temps, mais non par rotation (C'est le cas lorsque le spin du système est demi-entier). K est alors antisymétrique et la diagonalisation effectuée sur GOE n'est plus valide.

Proposition 2.2. *Tout opérateur unitaire antisymétrique est conjugué dans $U(\mathbb{C})$ à la matrice Z suivante*

$$\begin{pmatrix} e & 0 & 0 & \dots \\ 0 & e & 0 & \dots \\ 0 & 0 & e & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}$$

où e désigne la matrice $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$

Dans cette base, une transformation unitaire $\psi \mapsto B\psi$ respecte Z si et seulement si $Z = B Z B^T$. C'est l'ensemble symplectique $Sp(N)$. Reformulons ceci en termes de quaternions. Nous introduisons les trois matrices de Pauli.

$$\sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Ainsi, $Z = \sigma_x I$.

À ce stade de l'exposé, il convient de rappeler quelques définitions sur les quaternions.

Définition 2.3. Soit $q = q^{(0)} + \mathbf{q} \cdot \sigma$ un quaternion

- le conjugué de q est $\bar{q} = q^{(0)} - \mathbf{q} \cdot \sigma$
- le conjugué complexe de q est $q^* = q^{(0)*} + \mathbf{q}^* \cdot \sigma$

– le conjugué hermitien de q est $q^\dagger = \bar{q}^*$

Définition 2.4. Soit Q une matrice quaternionique. On définit la matrice Q^R par $(Q^R)_{kj} = \sigma_x(Q^T)_{kj}\sigma_x = \overline{Q_{jk}}$. Une matrice quaternionique est dite autoduale si $Q^R = Q$.

Définition 2.5. L'ensemble gaussien symplectique E_{4G} est un espace mesuré. C'est l'ensemble des matrices quaternioniques autoduales muni d'une mesure invariante sous $H \mapsto W^R H W$ pour tout

$$W \in Sp(N) \text{ et de la forme } \bigotimes_{k \leq j} P_{kj}^{(0)}(H_{kj}^{(0)}) \otimes \bigotimes_{\lambda=1}^3 \bigotimes_{k < j} P_{kj}^{(\lambda)}(H_{kj}^{(\lambda)})$$

2.1.3 Ensemble Gaussien Unitaire (GUE)

Nous considérons à présent des systèmes non invariants par renversement du temps. Il convient à cet effet d'introduire la définition suivante :

Définition 2.6. L'ensemble gaussien unitaire E_{2G} est un espace mesuré. C'est l'ensemble des matrices hermitiennes muni d'une mesure invariante sous $H \mapsto W^{-1} H W$ pour tout $W \in U(\mathbb{C})$ et de la forme $\bigotimes_{k \leq j} P_{kj}^{(0)}(H_{kj}^{(0)}) \otimes \bigotimes_{k < j} P_{kj}^{(1)}(H_{kj}^{(1)})$

Nous verrons plus tard que cet ensemble est le plus facile à traiter des trois.

Théorème 2.3. Pour H dans l'un des trois ensembles gaussiens, la loi de H est de la forme $P_N(H)dH$ où $dH = \bigotimes dH_{kj}^{(\lambda)}$ (le produit parcourt l'ensemble adéquat d'indices selon l'ensemble auquel appartient H) et $P_N(H) = \exp(-a \text{Tr}(H^2) + b \text{Tr}(H) + c)$ avec a, b, c réels et $a > 0$.

La preuve de ce théorème se trouve dans [1].

Il faut noter que l'hypothèse d'indépendance des éléments n'a pas de justification physique. En effet les niveaux d'énergie proche sont corrélés en général.

2.2 Ensembles non gaussiens, ensembles chiraux

Comme nous l'avons mentionné, en QCD, une symétrie supplémentaire apparaît : la symétrie chirale. La définition de l'opérateur de Dirac fait intervenir les matrices euclidiennes γ^μ . La matrice γ_5 vaut $\text{diag}(1, 1, -1, -1)$. Or nous avons vu que $\{\mathcal{D}, \gamma_5\} = 0$. De plus, \mathcal{D} est anti-hermitien dans le cadre euclidien. Le spectre de \mathcal{D} est donc imaginaire pur et symétrique par rapport à 0.

Ainsi, \mathcal{D} peut se mettre sous la forme $\begin{pmatrix} 0 & i\Phi \\ i\Phi^\dagger & 0 \end{pmatrix}$ où Φ est une matrice complexe non hermitienne, réelle ou symplectique.

Par ailleurs, la fonction de partition du modèle de matrices ne s'écrit plus simplement

$$Z_N = \int P_N(H) dH$$

avec $P_N(H)$ du type gaussien comme précédemment.

La fonction de partition de la QCD peut s'écrire comme une intégrale de chemin sur les quarks et les gluons. Après intégration sur les quarks, on obtient une espérance du déterminant fermionique. Notant N_f le nombre de quarks,

$$Z_N = \left\langle \prod_{f=1}^{N_f} \det(\mathcal{D} + m_f) \right\rangle$$

Ainsi, après approximation par un modèle de matrices, la nouvelle forme est :

$$Z_N = \int d\Phi d\Phi^\dagger \prod_{f=1}^{N_f} \det \begin{pmatrix} m_f & i\Phi \\ i\Phi^\dagger & m_f \end{pmatrix} e^{-\text{Tr}\Phi\Phi^\dagger}$$

Les ensembles non gaussiens sont une généralisation des ensembles gaussiens, on ne leur impose pas d'indépendance des éléments de matrice. Ainsi, la densité de probabilité $P_N(H)$ peut être plus générale tout en respectant les symétries. Ce sera le cadre d'étude général dans la suite de l'exposé. On prendra par exemple une densité du type $P_N(H) = e^{-N\text{Tr}V(HH^\dagger)}$.

3 Résultats généraux

3.1 Changement de variables

Jusqu'à présent, la loi de H est de la forme $P_N(H) dH$ où dH est une mesure produit de mesures de Lebesgue portant sur les éléments indépendants de H . Cette forme est peu pratique pour conduire des calculs, il convient de réduire le nombre de variables indépendantes. Comme les éléments des ensembles E_β sont diagonalisables, on envisage la transformation $H \mapsto (\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ où les λ_i désignent les valeurs propres de H . Cette transformation est valide si la loi de H ne dépend que des valeurs propres. Bien entendu, il faut rajouter des variables dans cette transformation, celles qui proviennent du changement de base. Pour effectuer le changement de variables, il faut connaître le jacobien de la transformation.

Théorème 3.1. *Soit $H \in E_{\beta G}$. Alors le jacobien de la transformation*

$$\Phi : H \mapsto (\lambda_1, \dots, \lambda_N)$$

vaut $|\Delta(\lambda)|^\beta$ où $\Delta(\lambda)$ désigne le Vandermonde du vecteur λ

Démonstration. Nous reprenons ici la preuve citée dans [3] valable dans le cas réel. Elle s'étend dans les autres cadres, mais les preuves requièrent beaucoup plus de travail.

On note U_β la matrice de changement de base et Λ la matrice diagonale des valeurs propres de H . On peut donc écrire

$$H = U_\beta^{-1} \Lambda U_\beta$$

Ici, nous identifions les matrices et les fonctions dépendant de H . Différentions cette relation :

$$dH = U_\beta^{-1} [U_\beta (dU_\beta^{-1}) \Lambda + d\Lambda + \Lambda (dU_\beta) U_\beta^{-1}] U_\beta$$

Posons alors

$$ds = i (dU_\beta) U_\beta^{-1}$$

Il vient :

$$dH = U_\beta^{-1} (d\Lambda - i [\Lambda, ds]) U_\beta$$

$$\begin{aligned} \|dH\|^2 &= \text{Tr}(dH^2) = \text{Tr}(d\Lambda^2) - 2i \text{Tr}([\Lambda, ds] d\Lambda) - \text{Tr}([\Lambda, ds]^2) \\ &= \text{Tr}(d\Lambda^2) - 2 \text{Tr}(ds \Lambda ds \Lambda - (ds)^2 \Lambda^2) \end{aligned}$$

Un calcul explicite donne alors

$$\|dH\|^2 = \sum_{i=1}^N d\lambda_i^2 + \sum_{i,j=1, i \neq j}^N (\lambda_i - \lambda_j)^2 |ds_{ij}|^2$$

Posons alors $G = \begin{pmatrix} I_N & 0 \\ 0 & A \end{pmatrix}$ avec A une matrice diagonale composée d'éléments du type $(\lambda_i - \lambda_j)^2$ ($i \neq j$).

De plus, chaque terme est répété β fois car $|ds_{ij}|^2 = \sum_{\lambda=1}^{\beta} \|ds_{ij}^{(\lambda)}\|^2$.

$$\text{Ainsi, } \det(G) = \prod_{i,j=1, i \neq j}^N |\lambda_i - \lambda_j|^\beta$$

Or $\sqrt{\det(G)}$ est le Jacobien de la transformation d'après la forme de $\|dH\|^2 = ds^\lambda G ds^\lambda$

$$\text{Donc le Jacobien final est } \prod_{i < j} |\lambda_i - \lambda_j|^\beta = |\Delta(\lambda)|^\beta$$

□

Pour un système physique dont la fonction de partition s'écrit $\tilde{Z}_N = \int P_N(H) dH$ la valeur moyenne d'une observable O est

$$\langle O \rangle = \frac{1}{\tilde{Z}_N} \int P_N(H) O(H) dH$$

Ainsi, si l'observable ne dépend que des valeurs propres du hamiltonien, on peut effectuer le changement de variables envisagé. Après intégration sur les $ds_{i,j}$ la moyenne de l'observable O devient :

$$\langle O \rangle = \frac{1}{Z_N} \int d\lambda_1 \dots d\lambda_N p(\lambda_1, \dots, \lambda_N) O(\lambda_1, \dots, \lambda_N) |\Delta(\lambda_1, \dots, \lambda_N)|^\beta$$

Maintenant, on a une fonction de partition effective qui ne fait intervenir que des intégrales sur les valeurs propres

$$Z_N = \int d\lambda_1 \dots d\lambda_N p(\lambda_1, \dots, \lambda_N) |\Delta(\lambda_1, \dots, \lambda_N)|^\beta$$

Finalement, on s'est ramené à un modèle à N variables indépendantes, beaucoup plus simple que celui de départ. C'est naturel puisque dans un système physique seules les valeurs propres sont pertinentes.

Le modèle ainsi simplifié autorise des calculs effectifs. Dans toute la suite nous nous restreignons au cas de l'ensemble unitaire et nous supposons que la densité se factorise en fonction des valeurs propres : $p(\lambda_1, \dots, \lambda_N) = \prod_{i=1}^N w(\lambda_i)$. La densité du théorème 2.3 donne un exemple d'une telle factorisation. Toutefois les résultats ci-dessous concernent aussi l'ensemble unitaire complexe. En effet le changement de variables ci-dessus conduit à la même forme pour la distribution des valeurs propres à ceci près qu'elles sont maintenant complexes.

3.2 Définitions

Définition 3.1. La fonction de corrélation (correlation function) à n points est définie par :

$$R_n(x_1, \dots, x_n) \equiv \frac{N!}{(N-n)!} \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} P_N(x_1, \dots, x_N) dx_{n+1} \dots dx_N$$

R_n représente la densité de niveaux d'énergie autour des points x_1, \dots, x_n sans tenir compte de l'ordre, quelque soient les autres niveaux. On rappelle que $P_N(x_1, \dots, x_N) = \frac{|\Delta(x_1, \dots, x_N)|^2}{Z_N} \prod_{i=1}^N w(x_i)$

Définition 3.2. La fonction de connexion (cluster function) à n points est définie par :

$$T_n(x_1, \dots, x_n) = \sum_G (-1)^{n-m} (m-1)! \prod_{j=1}^m R_{G_j}(x_k, k \in G_j)$$

où G est une partition de $[[1, n]]$ en m parties, $G = (G_1, \dots, G_m)$. T_n est la partie la moins factorisée de R_n , donc c'est elle qui contient vraiment les informations sur les corrélations dues aux n niveaux.

Le calcul des fonctions de corrélation repose sur le théorème suivant. Souhaitant englober dans un même traitement les résultats des ensembles unitaires complexe et réel, nous énonçons le **Théorème de Mehta** [1] dans toute sa généralité.

Théorème 3.2. Soit $J_N = (J_{ij})$ une matrice hermitienne telle que :

- $J_{ij} = f(x_i, \bar{x}_j)$,
- $\int f(x, \bar{x}) dw(x) = c$,
- $\int f(x, \bar{y}) f(y, \bar{z}) dw(y) = f(x, \bar{z})$,

où $dw(x)$ est une mesure (en général : $w(x)dx$ ou $w(z, \bar{z})dzd\bar{z}$). Alors :

$$\int \det J_N dw(x_N) = (c - N + 1) \det J_{N-1}$$

où J_{N-1} est la matrice extraite de J_N obtenue en supprimant la dernière ligne et la dernière colonne.

Démonstration. Par définition, le déterminant s'écrit :

$$\det J_N = \sum_{\sigma} \epsilon_{\sigma} \prod_1^{\ell} (J_{\xi\eta} J_{\eta\zeta} \dots J_{\theta\xi}) = \sum_{\sigma} \epsilon_{\sigma} \prod_1^{\ell} [f(\xi, \eta) \dots f(\theta, \xi)]$$

où la permutation σ est décomposée en produit de ℓ cycles.

L'indice N apparaît dans un des cycles de cette décomposition.

- (i). Soit N est un point fixe, c'est-à-dire que N constitue à lui seul un cycle. L'intégration sur la variable x_N donne la constante c .
- (ii). Soit N apparaît dans un cycle plus long, et l'intégration sur x_N réduit la longueur du cycle. Le cycle ainsi obtenu a une parité opposée. Chaque permutation de $\{1, \dots, n-1\}$ est ainsi obtenue $N-1$ fois.

L'addition des deux contributions fournit le résultat désiré. □

3.3 Calcul des fonctions de corrélation

Pour calculer la fonction de corrélation, nous allons maintenant réécrire la densité de probabilité sous une forme appropriée de manière à utiliser le théorème précédent.

D'abord $\Delta(x_1, \dots, x_N) = \det(x_i^{j-1}) = \det(r_{j-1} p_{j-1}(x_i))$ où p_j est le polynôme orthonormal de degré j associé au poids w . Par définition, la famille de polynômes $(p_i)_{i \in \mathbb{N}}$ vérifie les relations d'orthonormalité : $\int \bar{p}_j p_k dw \equiv \delta_{jk}$. Le coefficient dominant de p_j est $\frac{1}{r_j}$. r_j est la norme du polynôme unitaire orthogonal π_j de degré j .

Ensuite, posant $(A)_{ij} = r_{j-1} p_{j-1}(x_i)$, la densité de probabilité devient

$$P_N = \frac{|\Delta(x_1, \dots, x_N)|^2}{Z_N} \prod_{i=1}^N w(x_i) = \frac{\det(A) \det(\bar{A}^T)}{Z_N} \prod_{i=1}^N w(x_i) = \frac{\prod_{k=1}^N r_k^2}{Z_N} \det(K_N(x_i, \bar{x}_j))_{1 \leq j, k \leq N}$$

avec K_N noyau complet d'ordre N associé à la famille $(p_i)_{i \in \mathbb{N}}$:

$$K_N(x, \bar{y}) \equiv (w(x)w(y))^{\frac{1}{2}} \sum_{i=0}^{N-1} p_i(x) \overline{p_i(y)}$$

Le théorème 3.2 s'applique à $J_n \equiv (K_N(x_i, \bar{x}_j))_{1 \leq j, k \leq n}$ avec $c = N$ et fournit la relation : $\int \det J_n dx_n = (N - n + 1) \det J_{n-1}$. Il est alors aisé de trouver une formule pour R_n , le cas $n = 0$ conduit en particulier au calcul de la fonction de partition.

Théorème 3.3. *Les fonctions de corrélation s'expriment facilement en fonction des polynômes orthonormaux associés au poids w par l'intermédiaire du noyau complet, de même pour la fonction de partition :*

$$R_n(x_1, \dots, x_n) = \det(K_N(x_i, \bar{x}_j))_{1 \leq j, k \leq n}, \quad Z_N = N! \prod_{k=1}^N r_k^2$$

Dans le cas de l'ensemble unitaire réel ($x = \bar{x}$), ces expressions peuvent être simplifiées grâce à la **formule de Christoffel-Darboux**.

Proposition 3.4. *Le noyau réduit d'ordre n s'exprime de la façon suivante :*

$$\kappa_n(x, y) \equiv \sum_{i=0}^{n-1} p_i(x)p_i(y) = \frac{r_n}{r_{n-1}} \frac{p_n(x)p_{n-1}(y) - p_n(y)p_{n-1}(x)}{x - y}, \quad x, y \in \mathbb{R}$$

3.4 Représentation des polynômes orthogonaux

Nous présentons maintenant une première série de résultats classiques concernant l'expression des moyennes de polynômes caractéristiques en fonction des polynômes orthogonaux qui sont valables dans les cas réel et complexe.

Théorème 3.5. *Les polynômes orthogonaux unitaires associés au poids w s'expriment de la manière suivante :*

$$\pi_N(x) = \langle D_N[x] \rangle \equiv \int \dots \int \prod_{i=1}^N (x - x_i) P_N(x_1, \dots, x_N) dx_1 \dots dx_N$$

Démonstration. Il suffit de voir que $\langle D_N[x] \rangle$ est unitaire de degré N (évident) et orthogonal à x^0, \dots, x^{N-1} . Or, en posant $x \equiv x_{N+1}$:

$$\begin{aligned} \prod_{i=1}^N (x - x_i) P_N(x_1, \dots, x_N) &= \Delta(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_N) \Delta(x_1, \dots, x_{N+1}) \\ &= \det(\overline{\pi_{j-1}(x_i)})_{1 \leq i, j \leq N} \det(\pi_{j-1}(x_i))_{1 \leq i, j \leq N+1} = \sum_{i=1}^{N+1} \det(\overline{\pi_{j-1}(x_i)}) b_i \pi_N(x_i) \end{aligned}$$

La dernière égalité est obtenue en développant le deuxième déterminant par rapport à la dernière colonne, avec b_i cofacteur qui ne contient plus la variable x_i . En conséquence, pour $0 \leq j \leq N-1$, $\int \bar{x}^j \langle D_N[x] \rangle dw = 0$. En effet, en intégrant sur la variable x_i le i -ième terme de la somme disparaît. Finalement : $\pi_N(x) = \langle D_N[x] \rangle$ \square

Le noyau réduit se représente de manière analogue d'après [4] pour le cas réel et [5] pour la généralisation à l'ensemble complexe :

Théorème 3.6.

$$\begin{aligned} \kappa_N(x, \bar{y}) &= r_{N-1}^2 \langle D_{N-1}[x] D_{N-1}^\dagger[\bar{y}] \rangle \\ &\equiv r_{N-1}^2 \int \dots \int \prod_{i=1}^{N-1} (x - x_i)(\bar{y} - \bar{x}_i) P_{N-1}(x_1, \dots, x_{N-1}) dx_1 \dots dx_{N-1} \end{aligned}$$

Démonstration. La preuve utilise les idées du théorème 3.3. \square

Ces résultats nous encouragent à poursuivre l'étude des moyennes de polynômes caractéristiques. Ceux-ci ont une importance – par exemple – pour le calcul des fonctions de partition en chromodynamique quantique. En effet elles s'expriment comme de telles moyennes dans l'ensemble unitaire réel.

Toutefois l'étude de l'ensemble unitaire complexe n'est pas vaine puisque des valeurs propres complexes apparaissent en QCD lorsque le potentiel chimique des quarks est pris en compte [6].

Enfin, à un niveau moins élaboré mais au moins aussi important, les moyennes de polynômes caractéristiques interviennent dans le calcul de la résolvante

$$G_N(\lambda) \equiv \int \frac{R_1(\eta)}{\lambda - \eta} d\eta$$

via $\partial_x \langle D_N[x]/D_N[y] \rangle|_{y=x} = G_N(x)$

La résolvante est reliée à la densité R_1 de valeur propre par la formule

$$R_1(\lambda) = \frac{1}{-2\pi i} \lim_{t \rightarrow 0} [G_N(\lambda + it) - G_N(\lambda - it)]$$

Des résolvantes plus compliquées (par exemple $G(x, y) = \frac{1}{N} \langle Tr \frac{1}{H-X} Tr \frac{1}{H-Y} \rangle$) génèrent les autres fonctions de corrélation.

Le paragraphe suivant présente quelques résultats concernant les polynômes caractéristiques inspirés par les travaux de Baik, Deift et Strahov [7]. Ces résultats connus auparavant dans le cas réel ont été étendus au cas complexe [8].

4 Moyenne de polynômes caractéristiques

Nous noterons dw la mesure de probabilité pour placer dans le même formalisme les cas réel et complexe. A partir de ce poids, on définit aussi $dw^{[\ell, m]}(z) \equiv \frac{\prod_{j=1}^{\ell} (\mu_j - z)}{\prod_{j=1}^m (\epsilon_j - \bar{z})} dw(z)$, $\ell, m \geq 0$. Les autres notations utilisées dans ce paragraphe sont définies dans l'appendice 6.1 pour ne pas alourdir l'exposé. Nous y précisons aussi les différentes hypothèses à faire pour rendre les manipulations qui suivent légitimes.

La méthode générale de démonstration consiste à partir de :

$$\langle D_N[\mu] \rangle_{w^{[\ell, m]}} = \pi_N^{[\ell, m]}(\mu) \quad (4.1)$$

Par conséquent $\left\langle \frac{\prod_{j=1}^L D_N[\mu_j]}{\prod_{j=1}^M D_N^\dagger[\epsilon_j]} \right\rangle_w$ est proportionnel à $\pi_N^{[L-1, M]}(\mu_L)$. Tout se ramène au calcul des polynômes $\pi_j^{[\ell, m]}$.

4.1 Produit – Formule de Brézin et Hikami

Le théorème suivant est du à Brézin et Hikami [9]. Le cas complexe a été démontré ensuite dans [5].

Théorème 4.1. *La formule de Brézin et Hikami donne l'expression d'un produit de polynômes caractéristiques.*

$$\left\langle \prod_{j=1}^L D_N[\mu_j] \right\rangle_w = \frac{1}{\Delta(\mu)} \begin{vmatrix} \pi_N(\mu_1) & \dots & \pi_{N+L-1}(\mu_1) \\ \vdots & & \vdots \\ \pi_N(\mu_L) & \dots & \pi_{N+L-1}(\mu_L) \end{vmatrix} \quad (4.2)$$

Démonstration. Pour prouver la formule (4.2), on combine l'expression rappelée en (4.1) et le lemme 6.1(cf l'appendice 6). D'une part, d'après la formule (4.1), on a : $\pi_N^{[j,0]}(\mu_{j+1}) = \langle D_N[\mu_{j+1}] \rangle_{w^{[j,0]}} = Z_N^{[j+1,0]}/Z_N^{[j,0]}$ et d'autre part, en réécrivant les définitions :

$$\left\langle \prod_{j=1}^L D_N[\mu_j] \right\rangle_w = \frac{Z_N^{[L,0]}}{Z_N} = \frac{Z_N^{[L,0]}}{Z_N^{[L-1,0]}} \frac{Z_N^{[L-1,0]}}{Z_N^{[L-2,0]}} \cdots \frac{Z_N^{[1,0]}}{Z_N} \quad (4.3)$$

Par conséquent :

$$\left\langle \prod_{j=1}^L D_N[\mu_j] \right\rangle_w = \prod_{j=1}^L \langle D_N[\mu_j] \rangle_{w^{[j-1,0]}} = \prod_{j=0}^{L-1} \pi_N^{[j,0]}(\mu_{j+1}) \quad (4.4)$$

Le lemme 6.1 permet alors de conclure. \square

4.2 Quotient – Formule de Fyodorov et Strahov

La formule – due à Uvarov, Fyodorov et Strahov [10] dans le cas réel– exprimant le quotient de polynômes caractéristiques a été généralisée au cas complexe par nos soins. Sa preuve nécessite l'utilisation des lemmes 6.2 et 6.4 dont le lecteur trouvera l'énoncé en 6.3

Théorème 4.2. *Soit $1 \leq M \leq N$ et $\gamma_n = -\frac{2\pi i}{r_n^2}$. Alors :*

$$\left\langle \prod_{j=1}^M D_N^{\dagger-1}[\epsilon_j] \right\rangle_w = (-1)^{\frac{M(M-1)}{2}} \frac{\prod_{j=N-M}^{N-1} \gamma_j}{\Delta(\epsilon)} \begin{vmatrix} h_{N-M}(\epsilon_1) & \cdots & h_{N-1}(\epsilon_1) \\ \vdots & & \vdots \\ h_{N-M}(\epsilon_M) & \cdots & h_{N-1}(\epsilon_M) \end{vmatrix} \quad (4.5)$$

où $h_k(\epsilon) = \frac{1}{2\pi i} \int \frac{\pi_k(z)dw(z)}{z-\epsilon}$. Par conjugaison complexe, $\langle \prod_{j=1}^M D_N^{-1}[\epsilon_j] \rangle_w$ s'exprime de manière analogue.

Démonstration. Le théorème de Mehta 3.2 permet de prouver la relation suivante : $\gamma_{n-1} = -2\pi i n Z_{n-1}/Z_n$. Alors :

$$\langle D_N^{\dagger-1}[\epsilon] \rangle_w = \frac{1}{Z_N} \int \frac{|\Delta(z)|^2}{(\epsilon - \bar{z}_1) \cdots (\epsilon - \bar{z}_N)} dW_N(z) = \sum_{j=1}^N \frac{1}{Z_N} \int \frac{|\Delta_N(z)|^2}{\prod_{k \neq j} \bar{z}_j - \bar{z}_k} \frac{dW_N(z)}{\epsilon - \bar{z}_j}$$

La dernière égalité est obtenue en décomposant en éléments simples. Remarquant $\frac{|\Delta_N(z)|^2}{\prod_{k < N} \bar{z}_N - \bar{z}_k} = |\Delta_{N-1}(z)|^2 \prod_{k < N} z_N - z_k$, (4.1) et la symétrie en les z_i fournissent une représentation du transformé de Cauchy généralisant (4.1) :

$$\langle D_N^{\dagger-1}[\epsilon] \rangle_w = N \frac{Z_{N-1}}{Z_N} \int \frac{\pi_{N-1}(z)}{\epsilon - \bar{z}} dw(z) = \gamma_{N-1} h_{N-1}(\epsilon) \quad (4.6)$$

La définition de la moyenne du (4.5) peut se réécrire :

$$\left\langle \prod_{j=1}^M D_N^{\dagger-1}[\epsilon_j] \right\rangle_w = \frac{Z_N^{[0,M]}}{Z_{N-1}^{[0,M-1]}} \frac{Z_{N-1}^{[0,M-1]}}{Z_{N-2}^{[0,M-2]}} \cdots \frac{Z_{N-M}^{[0,0]}}{Z_N^{[0,0]}} \quad (4.7)$$

De plus, d'après (4.6) :

$$\frac{Z_{N-K}^{[0,m]}}{Z_{N-K}^{[0,m-1]}} = \langle D_{N-K}^{\dagger-1}[\epsilon_m] \rangle_{w^{[0,m-1]}} = -2\pi i (N-K) \frac{Z_{N-K-1}^{[0,m-1]}}{Z_{N-K}^{[0,m-1]}} h_{N-K-1}^{[0,m-1]}(\epsilon_m)$$

Finalement : $\frac{Z_{N-K}^{[0,m]}}{Z_{N-K-1}^{[0,m-1]}} = -2\pi i(N-K) h_{N-K-1}^{[0,m-1]}(\epsilon_m)$. Reportant cette relation dans (4.7), il vient :

$\left\langle \prod_{j=1}^M D_N^{\dagger-1}[\epsilon_j] \right\rangle_w = \prod_{j=1}^M \gamma_{N-j} h_{N-j}^{[0,M-j]}(\epsilon_{M-j+1})$. Le résultat (4.5) est une conséquence immédiate de cette égalité et du corollaire 6.4. \square

4.3 Produits et quotients mêlés

Reportant les lemmes techniques 6.5 et 6.6 en appendice 6.4, nous pouvons alors énoncer la généralisation au cas complexe d'une formule de Fyodorov et Strahov [10].

Théorème 4.3. *Soit $0 \leq M \leq N$. Alors :*

$$\left\langle \frac{\prod_{j=1}^L D_N[\mu_j]}{\prod_{j=1}^M D_N^{\dagger}[\epsilon_j]} \right\rangle_w = \frac{(-1)^{\frac{M(M-1)}{2}} \prod_{j=N-M}^{N-1} \gamma_j}{\Delta(\mu)\Delta(\epsilon)} \begin{vmatrix} h_{N-M}(\epsilon_1) & \dots & h_{N+L-1}(\epsilon_1) \\ \vdots & & \vdots \\ h_{N-M}(\epsilon_M) & \dots & h_{N+L-1}(\epsilon_M) \\ \pi_{N-M}(\mu_1) & \dots & \pi_{N+L-1}(\mu_1) \\ \vdots & & \vdots \\ \pi_{N-M}(\mu_L) & \dots & \pi_{N+L-1}(\mu_L) \end{vmatrix} \quad (4.8)$$

Démonstration. On a : $\left\langle \frac{\prod_{j=1}^L D_N[\mu_j]}{\prod_{j=1}^M D_N^{\dagger}[\epsilon_j]} \right\rangle_w = \frac{Z_N^{[L,M]}}{Z_N^{[0,0]}} = \frac{Z_N^{[L,M]}}{Z_N^{[0,M]}} \frac{Z_N^{[0,M]}}{Z_N^{[0,0]}}$ c'est-à-dire

$$\left\langle \frac{\prod_{j=1}^K D_N[\mu_j]}{\prod_{j=1}^M D_N^{\dagger}[\epsilon_j]} \right\rangle_w = \left\langle \prod_{j=1}^K D_N[\mu_j] \right\rangle_{w^{[0,M]}} \left\langle \prod_{j=1}^M D_N^{\dagger-1}[\epsilon_j] \right\rangle_w$$

L'utilisation du corollaire 6.6 et du théorème 4.2 donne immédiatement la formule (4.8). \square

4.4 Produits et quotients en fonction du noyau – Cas réel

Nous nous restreignons maintenant au cas réel. En effet, dans ce cas, la formule de Christoffel-Darboux, qui donne une expression particulièrement simple du noyau, permet de poursuivre les calculs qui fournissent des résultats alternatifs concernant les moyennes de produits et quotients de polynômes caractéristiques. Le lecteur intéressé par l'extension au cas complexe pourra consulter [5]. Nous admettons le

Théorème 4.4. *Soit $K \geq 1$. Alors :*

$$\left\langle \prod_{j=1}^K D_N[\lambda_j] D_N[\mu_j] \right\rangle_w = \frac{C_{N,K}}{\Delta(\lambda)\Delta(\mu)} \det(\kappa_{N+K}^I(\lambda_i, \mu_j))_{1 \leq i, j \leq K} \quad (4.9)$$

avec

$$\kappa_{N+K}^I(x, y) = \frac{\pi_{N+K}(x)\pi_{N+K-1}(y) - \pi_{N+K}(y)\pi_{N+K-1}(x)}{x - y}$$

et $C_{N,K} = \prod_{k=N}^{N+K-1} r_k^2 / r_{N+K-1}^2$

La démonstration du résultat suivant due à Fyodorov et Strahov est donnée en appendice 6.5. Le lecteur prendra garde au fait que $\kappa_n^I = r_{n-1}^2 \kappa_n$

Théorème 4.5. *Soit $1 \leq K \leq N$. Alors :*

$$\left\langle \prod_{j=1}^K \frac{D_N[\mu_j]}{D_N[\epsilon_j]} \right\rangle_w = (-1)^{K(K-1)/2} \gamma_{N-1}^K \frac{\Delta(\epsilon, \mu)}{\Delta^2(\epsilon)\Delta^2(\mu)} \det(\kappa_N^{II}(\epsilon_i, \mu_j))_{1 \leq i, j \leq K} \quad (4.10)$$

avec

$$\kappa_N^{II}(x, y) = \frac{h_N(x)\pi_{N-1}(y) - h_{N-1}(x)\pi_N(y)}{x - y}$$

Le résultat présenté ci-après se trouve dans [10]. La démonstration proposée ici est nouvelle et s'inspire de [7].

Théorème 4.6. *Soit $1 \leq 2K \leq N$. Alors :*

$$\left\langle \prod_{j=1}^K D_N^{-1}[\mu_j] D_N^{-1}[\epsilon_j] \right\rangle_w = (-\gamma_{N-2K})^K \frac{\prod_{j=N-K}^{N-1} \gamma_j}{\Delta(\epsilon)\Delta(\mu)} \det(\kappa_{N-K}^{III}(\epsilon_i, \mu_j))_{1 \leq i, j \leq K} \quad (4.11)$$

avec

$$\kappa_N^{III}(x, y) = \frac{h_N(x)h_{N-1}(y) - h_{N-1}(x)h_N(y)}{x - y}$$

5 Limites asymptotiques

Etudier un système physique avec un hamiltonien de taille N est une approximation de la réalité. En revanche, si la taille de la matrice croit vers l'infini, il est tentant d'espérer que les propriétés de la matrice reproduiront celle du système. C'est pourquoi dans les modèles de matrices aléatoires, c'est souvent la limite à N grand qui est étudiée. De plus la limite à N grand fournit une expression effective et en général universelle. Nous présentons ici quelques idées, sans prétendre à l'exhaustivité sur un sujet aussi vaste (cf [3]).

5.1 Les différentes types de limites

Il est possible d'étudier le spectre à différentes échelles. Il faut pour cela renormaliser les variables avant de prendre la limite. Si les états sont étudiés sur une échelle grande devant l'écart moyen, on obtient la limite globale. Si les états sont étudiés sur une échelle de l'ordre de l'écart moyen, on obtient la limite locale.

Une des questions intéressantes qui se pose ensuite est de savoir si la limite ainsi obtenue est universelle, c'est-à-dire si elle dépend du potentiel choisi. Comme phénomène général, nous pouvons signaler que si le noyau (qui n'est rien d'autre que la fonction de connexion à 2 points) est en général universel, la densité d'état dans la limite globale dépend fortement du potentiel.

Avant d'étudier la limite locale dans le cadre unitaire gaussien, mentionnons le cas particulier des ensembles complexes. Ces modèles sont souvent utilisés pour retrouver ou découvrir des résultats sur les ensembles réels ou pour étudier les effets de brisure de l'hermiticité. C'est ainsi qu'existent les limites hermitienne, non-hermitienne faible et non-hermitienne forte. [6] donne des applications de ces limites à la QCD.

5.2 Le cas unitaire gaussien : $w(x) = e^{-x^2}$

La densité d'états est $\sigma_N(x) = K_N(x, x) = \sum_{j=0}^{N-1} \phi_j^2(x)$ où $\phi_j(x) = H_j(x)/\|H_j\|e^{-x^2/2}$ avec H_j j -ième polynôme d'Hermite. Avec $N \rightarrow \infty$, on obtient la loi semi-circulaire : $\sigma_N(x) \simeq \frac{1}{\pi}(2N - x^2)^{1/2}$, $|x|^2 < 2N$; 0 , $|x|^2 > 2N$.

Mais en renormalisant en fonction de la densité moyenne à l'origine (pour la limite locale les énergies sont comptées en espacement moyen) $\xi \equiv \sqrt{2N}x/\pi$, $\rho(\xi) \equiv \lim \sigma(x)/\sigma(0) : \rho(\xi) = 1$.

La fonction de connexion à 2 points est donnée par : $T_2 = [K_N(x_1, x_2)]^2$ La formule de Christoffel-Darboux s'applique et donne en explicitant les normes des polynômes de Hermite :

$$K_N(x_1, x_2) = \sqrt{\frac{N}{2}} \frac{\phi_n(x_1)\phi_{n-1}(x_2) - \phi_n(x_2)\phi_{n-1}(x_1)}{x_1 - x_2}$$

Renormalisons les variables comme précédemment (limite locale) : $\xi \equiv \sqrt{2N}x/\pi$, $\zeta \equiv \sqrt{2N}y/\pi$ et $Y_2(\xi, \zeta) = \lim \frac{T_2(x, y)}{\sigma^2(0)}$. Or les limites des fonctions ϕ sont connues et données par les formules suivantes, en posant $N = 2m$:

$$\lim(-1)^m m^{1/4} \phi_{2m}(x) = \pi^{-1/2} \cos \pi \xi, \quad \lim(-1)^m m^{1/4} \phi_{2m+1}(x) = \pi^{-1/2} \sin \pi \xi$$

D'où, finalement : $Y_2(\xi, \zeta) = \left(\frac{\sin(\pi(\xi-\eta))}{\pi(\xi-\eta)} \right)^2$

En conclusion, le noyau suit la loi des sinus qui est universelle dans cette limite (*bulk scaling limit*). [3] présente d'autres limites universelles : la loi de Bessel pour un potentiel avec une singularité à l'origine (*origin scaling limit*), la loi d'Airy pour une étude près des bords du spectre (*soft-edge scaling limit*).

Le travail conduit ici nous a montré que les modèles de matrices aléatoires permettent d'obtenir des résultats analytiques sur les fonctions de corrélation, les fonctions de partition par l'intermédiaire des moyennes de produits et de quotients de polynômes caractéristiques. Ces calculs n'ont malheureusement été menés que dans le cas unitaire. Des expressions simples sont encore recherchées dans les cas orthogonaux et symplectiques.

La théorie des matrices aléatoires donne jusqu'à présent des résultats qui concordent très bien avec les mesures expérimentales des physiciens et les simulations numériques de la QCD sur réseau. Elle fournit également un moyen supplémentaire de vérifier les symétries des systèmes physiques étudiés.

Nous tenons à remercier tout particulièrement Gernot Akemann pour l'aide et le soutien dont il nous a gratifiés tout au long de ce travail.

6 Appendice

6.1 Notation du chapitre 4.

Nous rassemblons ici les principales notations utilisées au chapitre 4 et éclaircissons les hypothèses concernant les points suivants :

- **les mesures** Nous supposons que la mesure dw est strictement positive. Elle définit alors un produit scalaire. Dans le cas réel, on a $dw(x) = \omega(x)dx$ et dans le cas complexe $dw = w(z, \bar{z})dxdy$.

A partir de ce poids, on définit aussi $dw^{[\ell, m]}(z) \equiv \frac{\prod_{j=1}^{\ell} (\mu_j - z)}{\prod_{j=1}^m (\epsilon_j - \bar{z})} dw(z)$, $\ell, m \geq 0$. Dans le cas réel, on a bien sûr, $\bar{x} = x$.

Pour que ces mesures soient bien définies nous supposons la mesure initiale dw à support compact K et on choisira les familles (μ_i) (resp. (ϵ_j)) en dehors de K (resp. \bar{K}). Pour N variables, les mesures sont notées avec des majuscules : $dW_N^{[\ell, m]}(z) = \prod_{i=1}^N dw^{[\ell, m]}(z_i)$.

- **les polynômes**. Nous notons $\pi_j^{[\ell, m]}(z)$ le polynôme unitaire de degré j construit par le procédé d'orthogonalisation de Gram-Schmidt appliqué à z^k pour la mesure $dw^{[\ell, m]}$: $\int \pi_j^{[\ell, m]}(z) \bar{z}^k dw^{[\ell, m]}(z) = 0$, $j > k \geq 0$. Pour les mesures $\omega(x)dx$ et $w(z, \bar{z})dxdy$, les polynômes $\pi_j \equiv \pi_j^{[0, 0]}$ forment une famille orthogonale et on pose alors $\int \pi_j(z) \overline{\pi_j(z)} dw(z) = r_j^2 > 0$. Pour les mesures $dw^{[\ell, m]}$, ce n'est plus le cas en général.
- **les déterminants**. Nous posons $D_N[\mu] = \prod_{i=1}^N (\mu - z_i)$ et $D_N^\dagger[\epsilon] = \prod_{i=1}^N (\epsilon - \bar{z}_i)$. Cela représente le polynôme caractéristique évalué en μ (resp. ϵ) d'une matrice de valeurs propres z_i (resp. son adjoint).

- **les moyennes**. Les polynômes caractéristiques considérés précédemment seront moyennés avec la mesure $dw(z)$. Pour l'ensemble unitaire, la fonction de distribution des valeurs propres s'écrit $|\Delta(z)|^2$. La moyenne d'une fonction $O(z) = O(z_1, \dots, z_N)$ symétrique en les z_i est alors :

$$\langle O \rangle_{w^{[\ell, m]}} = \frac{1}{Z_N^{[\ell, m]}} \int \cdots \int O(z) |\Delta(z)|^2 dW_N^{[\ell, m]}(z)$$

$Z_N^{[\ell, m]}$ est la fonction de partition $Z_N^{[\ell, m]} = \int \cdots \int |\Delta(z)|^2 dW_N^{[\ell, m]}(z)$.

6.2 Formule de Christoffel

Lemme 6.1. Soit $\ell \geq 1$. Alors $\pi_n^{[\ell, 0]}(z)$ s'exprime de la manière suivante :

$$\pi_n^{[\ell, 0]}(z) = \frac{1}{(z - \mu_1) \cdots (z - \mu_\ell)} \frac{\begin{vmatrix} \pi_n(\mu_1) & \cdots & \pi_{n+\ell}(\mu_1) \\ \vdots & & \vdots \\ \pi_n(\mu_\ell) & \cdots & \pi_{n+\ell}(\mu_\ell) \\ \pi_n(z) & \cdots & \pi_{n+\ell}(z) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \pi_n(\mu_1) & \cdots & \pi_{n+\ell-1}(\mu_1) \\ \vdots & & \vdots \\ \pi_n(\mu_\ell) & \cdots & \pi_{n+\ell-1}(\mu_\ell) \end{vmatrix}} \quad (6.1)$$

Démonstration. Posons : $q_n^{[\ell, 0]}(z) = \begin{vmatrix} \pi_n(\mu_1) & \cdots & \pi_{n+\ell}(\mu_1) \\ \vdots & & \vdots \\ \pi_n(\mu_\ell) & \cdots & \pi_{n+\ell}(\mu_\ell) \\ \pi_n(z) & \cdots & \pi_{n+\ell}(z) \end{vmatrix}$. Tout d'abord : $\int q_n^{[\ell, 0]}(z) \bar{z}^j dw(z) =$

0 , $0 \leq j \leq n-1$. Ensuite, $q_n^{[\ell, 0]}(\mu_j) = 0$, $j = 1, \dots, \ell$, donc $\frac{q_n^{[\ell, 0]}(z)}{(\mu_1 - z) \cdots (\mu_\ell - z)}$ est un polynôme de

degré au plus n . Enfin,

$$\int \left[\frac{q_n^{[\ell,0]}(z)}{(\mu_1 - z) \dots (\mu_\ell - z)} \right] \bar{z}^j dw^{[\ell,0]}(z) = 0, \quad 0 \leq j < n$$

Montrons par récurrence sur ℓ que le coefficient dominant est non nul, ce qui achèvera la preuve.

Pour $\ell = 0$ c'est évident. Supposons le résultat vrai pour $\ell - 1$. Si le coefficient dominant est nul, alors $q_n^{[\ell-1,0]}$ s'annule en μ_ℓ . Donc $\frac{q_n^{[\ell-1,0]}(z)}{(\mu_1 - z) \dots (\mu_\ell - z)}$ est un polynôme de degré $n - 1$ orthogonal à z^j , $0 \leq j < n$. Il est donc nul, ce qui contredit l'hypothèse de récurrence. La formule (6.1) est ainsi établie. \square

6.3 Formule d'Uvarov

Nous prouvons ici une formule exprimant $\pi_n^{[0,m]}(z)$ due à Uvarov citée dans [7].

Lemme 6.2. *Soit $0 \leq m \leq n$. $\pi_n^{[0,m]}(z)$ s'exprime comme un quotient de déterminants :*

$$\pi_n^{[0,m]}(z) = \frac{\begin{vmatrix} h_{n-m}(\epsilon_1) & \dots & h_n(\epsilon_1) \\ \vdots & & \vdots \\ h_{n-m}(\epsilon_m) & \dots & h_n(\epsilon_m) \\ \pi_{n-m}(z) & \dots & \pi_n(z) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} h_{n-m}(\epsilon_1) & \dots & h_{n-1}(\epsilon_1) \\ \vdots & & \vdots \\ h_{n-m}(\epsilon_m) & \dots & h_{n-1}(\epsilon_m) \end{vmatrix}} \quad (6.2)$$

où $h_k(\epsilon)$ est un transformé de Cauchy de $\pi_k(z)$ en ϵ : $h_k(\epsilon) = \frac{1}{2\pi i} \int \frac{\pi_k(z) dw(z)}{\bar{z} - \epsilon}$.

Démonstration. Posons : $q_n^{[0,m]}(z) = \begin{vmatrix} h_{n-m}(\epsilon_1) & \dots & h_n(\epsilon_1) \\ \vdots & & \vdots \\ h_{n-m}(\epsilon_m) & \dots & h_n(\epsilon_m) \\ \pi_{n-m}(z) & \dots & \pi_n(z) \end{vmatrix}$. Tout d'abord, on remarque que :

$\int \frac{q_n^{[0,m]}(z)}{\bar{z} - \epsilon_j} dw(z) = 0, j = 1, \dots, m$. Il s'ensuit pour $0 \leq j < n$, en décomposant en éléments simples :

$$\frac{\bar{z}^j}{\prod_{k=1}^m (\epsilon_k - \bar{z})} = \sum_{k=1}^m \frac{a_k}{\epsilon_k - \bar{z}} + p(\bar{z}) \text{ avec } p(\bar{z}) \text{ polynôme de degré } < n - m :$$

$$\int \bar{z}^j q_n^{[0,m]}(z) dw^{[0,m]}(z) = \sum_{k=1}^m a_k \int \frac{q_n^{[0,m]}(z)}{\epsilon_k - \bar{z}} dw(z) + \int p(\bar{z}) q_n^{[0,m]}(z) dw(z)$$

Les termes de la somme sont nuls d'après la remarque et l'intégrale est aussi nulle par construction. Une récurrence analogue à celle du lemme 6.1 montre que le coefficient dominant de $q_n^{[0,m]}(z)$ est non nul. Le lemme 6.2 est ainsi démontré. \square

Corollaire 6.3. *Soit $0 \leq m \leq n$. Le transformé de Cauchy $h_n^{[0,m]}(\epsilon) = \frac{1}{2\pi i} \int \frac{\pi_n^{[0,m]}(z)}{\bar{z} - \epsilon} dw^{[0,m]}(z)$ de $\pi_k^{[0,m]}(z)$ pour la mesure $dw^{[0,m]}(z)$ s'écrit :*

$$h_n^{[0,m]}(\epsilon) = \frac{(-1)^m}{(\epsilon - \epsilon_m) \dots (\epsilon - \epsilon_1)} \frac{\begin{vmatrix} h_{n-m}(\epsilon_1) & \dots & h_n(\epsilon_1) \\ \vdots & & \vdots \\ h_{n-m}(\epsilon_m) & \dots & h_n(\epsilon_m) \\ h_{n-m}(\epsilon) & \dots & h_n(\epsilon) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} h_{n-m}(\epsilon_1) & \dots & h_{n-1}(\epsilon_1) \\ \vdots & & \vdots \\ h_{n-m}(\epsilon_m) & \dots & h_{n-1}(\epsilon_m) \end{vmatrix}} \quad (6.3)$$

Démonstration.

$$\begin{aligned} h_n^{[0,m]}(\epsilon) &= \frac{1}{2\pi i} \int \frac{\pi_n^{[0,m]}(z)}{\bar{z} - \epsilon} dw^{[0,m]}(z) = \frac{1}{2\pi i} \int \frac{(-1)^m \pi_n^{[0,m]}(z) dw(z)}{(\bar{z} - \epsilon)(\bar{z} - \epsilon_m) \cdots (\bar{z} - \epsilon_1)} \\ &= \sum_{j=1}^{m+1} \frac{1}{2\pi i} \prod_{k \neq j} \frac{(-1)^m}{\epsilon_j - \epsilon_k} \int \frac{\pi_n^{[0,m]}(z)}{\bar{z} - \epsilon_j} dw(z) \end{aligned}$$

On conclut alors en remarquant que seul le terme en $\epsilon \equiv \epsilon_{m+1}$ est non nul. \square

Le corollaire suivant s'en déduit aisément.

Corollaire 6.4. *Soit $0 \leq m \leq n$. Le produit des transformés de Cauchy est égal à :*

$$\prod_{j=0}^m h_{n-m+j}^{[0,j]}(\epsilon_{j+1}) = \frac{(-1)^{\frac{m(m+1)}{2}}}{\Delta(\epsilon)} \begin{vmatrix} h_{n-m}(\epsilon_1) & \cdots & h_n(\epsilon_1) \\ \vdots & & \vdots \\ h_{n-m}(\epsilon_{m+1}) & \cdots & h_n(\epsilon_{m+1}) \end{vmatrix} \quad (6.4)$$

6.4 Produits et quotients mêlés

Lemme 6.5. *Soit $0 \leq m \leq n$. Alors on a la formule suivante :*

$$\pi_n^{[\ell,m]}(z) = \frac{1}{(z - \mu_\ell) \cdots (z - \mu_1)} \begin{vmatrix} h_{n-m}(\epsilon_1) & \cdots & h_{n+\ell}(\epsilon_1) \\ \vdots & & \vdots \\ h_{n-m}(\epsilon_m) & \cdots & h_{n+\ell}(\epsilon_m) \\ \pi_{n-m}(\mu_1) & \cdots & \pi_{n+\ell}(\mu_1) \\ \vdots & & \vdots \\ \pi_{n-m}(\mu_\ell) & \cdots & \pi_{n+\ell}(\mu_\ell) \\ \pi_{n-m}(z) & \cdots & \pi_{n+\ell}(z) \end{vmatrix} \begin{vmatrix} h_{n-m}(\epsilon_1) & \cdots & h_{n+\ell-1}(\epsilon_1) \\ \vdots & & \vdots \\ h_{n-m}(\epsilon_m) & \cdots & h_{n+\ell-1}(\epsilon_m) \\ \pi_{n-m}(\mu_1) & \cdots & \pi_{n+\ell-1}(\mu_1) \\ \vdots & & \vdots \\ \pi_{n-m}(\mu_\ell) & \cdots & \pi_{n+\ell-1}(\mu_\ell) \end{vmatrix} \quad (6.5)$$

Démonstration. Comme dans les cas précédents, $q_n^{[\ell,m]}(z)$ est défini comme le déterminant dans le numérateur de (6.5). On observe ensuite que $q_n^{[\ell,m]}(\mu_1) = \cdots = q_n^{[\ell,m]}(\mu_\ell) = 0$ et que $\int \frac{q_n^{[\ell,m]}(z) dw(z)}{\epsilon_1 - \bar{z}} = \cdots = \int \frac{q_n^{[\ell,m]}(z) dw(z)}{\epsilon_m - \bar{z}} = 0$. La mécanique de la preuve se déroule de la même façon qu'aux lemmes 6.1 et 6.2. \square

Corollaire 6.6.

$$\left\langle \prod_{j=1}^L D_N[\mu_j] \right\rangle_{w^{[0,M]}} = \frac{1}{\Delta(\mu)} \begin{vmatrix} h_{N-M}(\epsilon_1) & \cdots & h_{N+L-1}(\epsilon_1) \\ \vdots & & \vdots \\ h_{N-M}(\epsilon_M) & \cdots & h_{N+L-1}(\epsilon_M) \\ \pi_{N-M}(\mu_1) & \cdots & \pi_{N+L-1}(\mu_1) \\ \vdots & & \vdots \\ \pi_{N-M}(\mu_L) & \cdots & \pi_{N+L-1}(\mu_L) \end{vmatrix} \begin{vmatrix} h_{N-M}(\epsilon_1) & \cdots & h_N(\epsilon_1) \\ \vdots & & \vdots \\ h_{N-M}(\epsilon_M) & \cdots & h_N(\epsilon_M) \end{vmatrix} \quad (6.6)$$

Démonstration. $\left\langle \prod_{j=1}^L D_N[\mu_j] \right\rangle_{w^{[0,M]}} = \prod_{j=0}^{L-1} \pi_N^{[j,M]}(\mu_{j+1})$ On conclut alors en exprimant les $\pi_N^{[j,M]}$ à l'aide de 6.5. \square

6.5 Produits et quotients – cas réel

Lemme 6.7. *Soit $1 \leq M \leq N$. Alors :*

$$\begin{aligned} & \left\langle \frac{\prod_{j=1}^L D_N[\mu_j]}{\prod_{j=1}^M D_N[\epsilon_j]} \right\rangle_w = \frac{(-1)^{M(M-1)/2} \prod_{j=N-M}^{N-1} \gamma_j}{\Delta(\mu)\Delta(\epsilon)} \\ & \times \int \cdots \int \frac{dW_M(\lambda)}{(2\pi i)^M \prod_{j=1}^M (\lambda_j - \epsilon_j)} \Delta(\lambda, \mu) \left\langle \prod_{j=1}^M D_{N-M}[\lambda_j] \prod_{j=1}^L D_{N-M}[\mu_j] \right\rangle_w \end{aligned} \quad (6.7)$$

Démonstration. Tout d'abord, par multilinéarité du déterminant :

$$\begin{aligned} & \begin{vmatrix} h_{N-M}(\epsilon_1) & \cdots & h_{N+L-1}(\epsilon_1) \\ \vdots & & \\ h_{N-M}(\epsilon_M) & \cdots & h_{N+L-1}(\epsilon_M) \\ \pi_{N-M}(\mu_1) & \cdots & \pi_{N+L-1}(\mu_1) \\ \vdots & & \\ \pi_{N-M}(\mu_L) & \cdots & \pi_{N+L-1}(\mu_L) \end{vmatrix} = \int \cdots \int \frac{dW_M(\lambda)}{(2\pi i)^M \prod_{j=1}^M (\lambda_j - \epsilon_j)} \\ & \times \begin{vmatrix} \pi_{N-M}(\lambda_1) & \cdots & \pi_{N+L-1}(\lambda_1) \\ \vdots & & \\ \pi_{N-M}(\lambda_M) & \cdots & \pi_{N+L-1}(\lambda_M) \\ \pi_{N-M}(\mu_1) & \cdots & \pi_{N+L-1}(\mu_1) \\ \vdots & & \\ \pi_{N-M}(\mu_L) & \cdots & \pi_{N+L-1}(\mu_L) \end{vmatrix} \end{aligned} \quad (6.8)$$

On reporte alors dans l'équation (4.8) le membre de gauche de l'égalité. On exprime le membre de droite à l'aide de (4.2). \square

Ce lemme permet de donner la preuve du théorème 4.5 énoncé au 4.4.

Démonstration. (du théorème 4.5) Pour $K \leq N$, d'après (4.9) et (6.7), il vient :

$$\begin{aligned} & \frac{\Delta(\mu)\Delta(\epsilon)}{(-1)^{K(K-1)/2} \prod_{j=N-K}^{N-1} \gamma_j} \left\langle \prod_{j=1}^K \frac{D_N[\mu_j]}{D_N[\epsilon_j]} \right\rangle_w = \\ & \int \cdots \int \frac{dW_K(\lambda)}{(2\pi i)^K \prod_{j=1}^K (\lambda_j - \epsilon_j)} C_{N-K,K} \prod_{i,j=1}^K (\mu_j - \lambda_i) \det(\kappa_N^I(\lambda_i, \mu_j))_{1 \leq i,j \leq K} \end{aligned} \quad (6.9)$$

Le terme général du déterminant est

$$a_{ij} = \frac{1}{2\pi i} \int \frac{dw(\lambda_i)}{\lambda_i - \epsilon_i} \prod_{k=1}^K (\mu_k - \lambda_i) \frac{\pi_N(\lambda_i) \pi_{N-1}(\mu_j) - \pi_{N-1}(\lambda_i) \pi_N(\mu_j)}{\lambda_i - \mu_j}$$

On décompose en éléments simples la fraction rationnelle en λ_i , avec q polynôme de degré $K - 2$:

$$\frac{\prod_{k=1}^K (\mu_k - \lambda_i)}{(\lambda_i - \epsilon_i)(\lambda_i - \mu_j)} = -\frac{\prod_{k \neq j} (\mu_k - \lambda_i)}{\lambda_i - \epsilon_i} = q(\lambda_i) - \frac{\prod_{k \neq j} (\mu_k - \epsilon_i)}{\lambda_i - \epsilon_i}$$

Par conséquent, comme $\int \pi_{N-1}(\lambda) \lambda^j dw(\lambda) = \int \pi_N(\lambda) \lambda^j dw(\lambda) = 0$ pour $0 \leq j \leq K - 2 < N - 1$, ce terme se simplifie :

$$\begin{aligned} a_{ij} &= \frac{\prod_{k=1}^K (\mu_k - \epsilon_i)}{2\pi i} \int \frac{\pi_N(\lambda_i) \pi_{N-1}(\mu_j) - \pi_{N-1}(\lambda_i) \pi_N(\mu_j)}{(\lambda_i - \epsilon_i)(\epsilon_i - \mu_j)} dw(\lambda_i) \\ &= \kappa_N^{II}(\epsilon_i, \mu_j) \prod_{k=1}^K (\mu_k - \epsilon_i) \end{aligned} \quad (6.10)$$

Finalement,

$$\frac{\Delta(\mu)\Delta(\epsilon)}{(-1)^{K(K-1)/2} \prod_{j=N-K}^{N-1} \gamma_j} \left\langle \prod_{j=1}^K \frac{D_N[\mu_i]}{D_N[\epsilon_j]} \right\rangle_w = C_{N-K,K} \frac{\Delta(\epsilon, \mu)}{\Delta(\epsilon)\Delta(\mu)} \det(\kappa_N^{II}(\epsilon_i, \mu_j))_{1 \leq i, j \leq K} \quad (6.11)$$

et (4.10) s'ensuit. \square

Le passage au cas couvert par le théorème 4.6 se fait de la même manière comme le montre la preuve ci-dessous.

Démonstration. (du théorème 4.6) D'après le théorème 4.2, on a

$$\left\langle \prod_{j=1}^K D_N^{-1}[\mu_j] D_N^{-1}[\epsilon_j] \right\rangle_w = (-1)^K \frac{\prod_{j=N-2K}^{N-1} \gamma_j}{\Delta(\epsilon, \mu)} \begin{vmatrix} h_{N-2K}(\epsilon_1) & \dots & h_{N-1}(\epsilon_1) \\ \vdots & & \vdots \\ h_{N-2K}(\epsilon_K) & \dots & h_{N-1}(\epsilon_K) \\ h_{N-2K}(\mu_1) & \dots & h_{N-1}(\mu_1) \\ \vdots & & \vdots \\ h_{N-2K}(\mu_K) & \dots & h_{N-1}(\mu_K) \end{vmatrix}$$

Par multilinéarité du déterminant, on peut écrire

$$\begin{aligned} &\begin{vmatrix} h_{N-2K}(\epsilon_1) & \dots & h_{N-1}(\epsilon_1) \\ \vdots & & \vdots \\ h_{N-2K}(\epsilon_K) & \dots & h_{N-1}(\epsilon_K) \\ h_{N-2K}(\mu_1) & \dots & h_{N-1}(\mu_1) \\ \vdots & & \vdots \\ h_{N-2K}(\mu_K) & \dots & h_{N-1}(\mu_K) \end{vmatrix} = \int \dots \int \frac{dW_K(\lambda)}{(2\pi i)^K \prod_{j=1}^K (\lambda_j - \mu_j)} \\ &\times \begin{vmatrix} h_{N-2K}(\epsilon_1) & \dots & h_{N-1}(\epsilon_1) \\ \vdots & & \vdots \\ h_{N-2K}(\epsilon_K) & \dots & h_{N-1}(\epsilon_K) \\ \pi_{N-2K}(\lambda_1) & \dots & \pi_{N-1}(\lambda_1) \\ \vdots & & \vdots \\ \pi_{N-2K}(\lambda_K) & \dots & \pi_{N-1}(\lambda_K) \end{vmatrix} \end{aligned} \quad (6.12)$$

Donc, en exprimant le membre de droite grâce à (6.11) :

$$\begin{aligned}
(-1)^K \frac{\Delta(\epsilon, \mu)}{\prod_{j=N-2K}^{N-1} \gamma_j} \left\langle \prod_{j=1}^K D_N^{-1}[\mu_j] D_N^{-1}[\epsilon_j] \right\rangle_w &= \int \cdots \int \frac{dW_K(\lambda)}{(2\pi i)^K \prod_{j=1}^K (\lambda_j - \mu_j)} \\
&\times C_{N-2K, K} \prod_{i, j=1}^K (\lambda_j - \epsilon_i) \det(\kappa_{N-K}^{II}(\epsilon_i, \lambda_j))_{1 \leq i, j \leq K}
\end{aligned} \tag{6.13}$$

Le terme général est

$$\begin{aligned}
b_{ij} &= \frac{1}{2\pi i} \int \frac{dW(\lambda_j)}{\lambda_j - \mu_j} \prod_{k=1}^K (\lambda_j - \epsilon_k) \frac{h_{N-K}(\epsilon_i) \pi_{N-K-1}(\lambda_j) - h_{N-K-1}(\epsilon_i) \pi_{N-K}(\lambda_j)}{\epsilon_i - \lambda_j} \\
&= \kappa_{N-K}^{III}(\epsilon_i, \mu_j) \prod_{k=1}^K (\mu_j - \epsilon_k)
\end{aligned} \tag{6.14}$$

La dernière égalité s'obtient par une manipulation identique à celle du théorème 4.5. La formule (4.11) s'en déduit. \square

6.6 Complément : une autre façon de voir, les ensembles circulaires

Les calculs des limites asymptotiques sont assez compliqués, et nécessitent la spécification du poids et des connaissances précises sur les polynômes orthogonaux associés à ce poids.

L'introduction des ensembles circulaires permet d'éliminer certaines difficultés théoriques et pratiques des ensembles gaussiens. Les ensembles circulaires permettent aussi de donner une preuve particulièrement simple de la limite asymptotique dans le cas de la limite locale. C'est dans la perspective de ce résultat que nous introduisons maintenant les ensembles circulaires.

Au lieu d'être caractérisé par une matrice hermitienne H , un système est régi par une matrice unitaire U dont les éléments donnent les probabilités de transition. Une transformation de ce type existe en mécanique quantique, où l'hamiltonien est remplacé par l'opérateur d'évolution. Les valeurs propres de U sont de la forme $e^{i\theta_j}$. Pour relier cette matrice U aux propriétés physiques du système, nous faisons l'hypothèse méthodologique suivante : *Le comportement statistique de n niveaux d'un système réel, avec n petit devant le nombre de niveaux, est le même que celui de n angles $\theta_1, \dots, \theta_n$.*

Nous admettrons le théorème suivant, dont la preuve est assez semblable à celle du théorème analogue concernant les ensembles gaussiens.

Théorème 6.8. *La probabilité de trouver les valeurs propres $e^{i\theta_j}$ de U avec un angle dans chacun des intervalles $[\theta_j; \theta_j + d\theta_j]$ est :*

$$\frac{1}{\Xi_N} \prod_{1 \leq \ell < j \leq N} |e^{i\theta_\ell} - e^{i\theta_j}|^\beta d\theta_1 \dots d\theta_N$$

avec Ξ_N est fixé par normalisation à l'unité.

Dans la suite, nous ne nous occupons que du cas $\beta = 2$, c'est-à-dire de l'ensemble circulaire unitaire.

Pour calculer la fonction de corrélation, la même technique s'applique.

$$\prod_{1 \leq \ell < j \leq N} |e^{i\theta_\ell} - e^{i\theta_j}|^2 = \prod_{j < k} (e^{i\theta_j} - e^{i\theta_k}) \prod_{j < k} (e^{-i\theta_j} - e^{-i\theta_k}) = \det(e^{ip\theta_j}) \det(e^{-ip\theta_j})$$

où p varie de $-\frac{N-1}{2}$ à $\frac{N-1}{2}$.

Donc : $\prod_{1 \leq \ell < j \leq N} |e^{i\theta_\ell} - e^{i\theta_j}|^2 = (2\pi)^N \det[S_N(\theta_j - \theta_k)]_{j,k=1,\dots,N}$ avec $S_N(\theta) \equiv \frac{1}{2\pi} \sum_p e^{ip\theta} = \frac{1}{2\pi} \frac{\sin(N\theta/2)}{\sin(\theta/2)}$. Le théorème 3.2 s'applique et fournit les résultats suivants :

$$\Xi_N = N!(2\pi)^N, \quad R_n(\theta_1, \dots, \theta_n) = \det[S_N(\theta_j - \theta_k)]_{j,k=1,\dots,n}$$

La densité d'état $R_1(\theta) = \frac{N}{2\pi}$ était prévisible. La fonction de corrélation à deux points est : $R_2(\phi, \psi) = S_N^2(0) - S_N^2(\phi - \psi)$. Seule la limite $N \rightarrow \infty$ donne une prédiction universelle. Il faut renormaliser les variables : $N\phi = 2\pi\xi$, $N\psi = 2\pi\eta$:

$$Y_2(\phi, \psi) = \lim \frac{R_2(\phi, \psi)}{R_1^2(0)} = 1 - \left(\frac{\sin(\pi(\xi - \eta))}{\pi(\xi - \eta)} \right)^2$$

Le résultat est le même que dans le cas unitaire gaussien.

Références

- [1] M.L.Mehta, *Random matrices*, Seconde Édition, Academic press, 1991.
- [2] J.J.M. Verbaarschot et T. Wettig, *Random Matrix Theory and Chiral Symmetry in QCD*, Ann. Rev. Nucl. Part. Sci. **50** (2000) 343 [hep-ph/0003017].
- [3] E.Kanzieper et V.Freilikher, *Spectra of large random matrices : a method of study*, NATO ASI C (Math. and Phys. Sciences) **531** (1999) 165 [cond-mat/9809365].
- [4] P. Zinn-Justin, Commun. Math. Phys. **194** (1998) 631 [cond-mat/9705044].
- [5] G. Akemann et G. Vernizzi, *Characteristic Polynomials of Complex Random Matrix Models* Nucl. Phys. **B660** (2003) 532 [hep-th/0212051].
- [6] G. Akemann, *Microscopic correlation functions for the QCD Dirac operator with chemical potential*, Phys. Rev. Lett. **89** (2002) 072002 [hep-th /0204068].
- [7] J. Baik, P. Deift et E. Strahov, *Products and ratios of characteristic polynomials of random hermitian matrices*, J. Math. Phys. **44** (2003) 3657 [math-ph/0304016].
- [8] G. Akemann et A. Pottier, *Ratios of characteristic polynomials in complex matrix models*, à paraître dans J. Phys. **A** : Math. Gen. [math-ph/0404068].
- [9] E. Brézin et S. Hikami, *Characteristic polynomials of random matrices*, Commun. Math. Phys. **214** (2000) 111 [math-ph/9910005].
- [10] Y.V. Fyodorov et E. Strahov, *An exact formula dor general spectral correlation functions of random matrices*, J. Phys. **A** : Math. Gen. **36** (2003) 3203 [math-ph/0204051];
E. Strahov et Y.V. Fyodorov, *Universal result for correlations of characteristic polynomials* Commun. Math. Phys. **241** (2003) 343 [math-ph/0210010].