Corrigé de l'examen du cours d'intégration-probabilités

du 20 Janvier 2014

Durée: 3 heures. Aucun document n'est autorisé.

Question de cours: citer le théorème de J-P. Portemanteau.

Preuve de cours: énoncer et prouver le lemme de Borel (aussi connu sous le nom de lemme de Borel–Cantelli deuxième forme).

Exercice I. Soit $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbf{P})$, un espace de probabilité. Soient $X_n : \Omega \to \mathbb{N}$, $n \geq 1$, une suite de v.a. $\mathscr{F}$-mesurables supposées indépendantes. On suppose que $q_n := \mathbf{P}(X_n = n) = 1 - \mathbf{P}(X_n = 0)$, pour tout $n \geq 1$. Trouver une condition nécessaire et suffisante sur $(q_n)_{n\geq 1}$ pour que la suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge en probabilité vers une v.a. réelle que l'on précisera. Même question pour une convergence en norme L^1. Même question pour une convergence presque sûre.

Solution

Soit $\varepsilon > 0$. Pour tout $n > \varepsilon$, $\mathbf{P}(X_n > \varepsilon) = q_n$. On voit donc que $\lim_n X_n = 0$ en probabilité ssi $\lim_n q_n = 0$. Par ailleurs la v.a. nulle est la seule v.a. limite en probabilité possible: supposons que $\lim_n X_n = X$, avec $X : \Omega \to \mathbb{R}_+$, $\mathscr{F}$-mesurable. En sous-extrayant une suite qui converge p.s. vers X, on voit que p.s. $X = 0$ nécessairement.

Si X_n converge pour la norme L^1 vers une variable réelle, elle converge en probabilité et c'est nécessairement vers 0. Or $\|X_n\|_1 = \mathbf{E}[X_n] = nq_n$. Donc si (X_n) converge dans L^1, c'est vers 0 et on a $\lim_n nq_n = 0$. La réciproque est immédiate.

Si X_n converge p.s. vers une variable réelle, elle converge en probabilité et c'est nécessairement vers 0. Supposons $\sum_{n\in\mathbb{N}} q_n < \infty$. Donc $\sum_{n\in\mathbb{N}} \mathbf{P}(X_n \neq 0) < \infty$. Le lemme de Borel-Cantelli implique que p.s. pour tout n assez grand $X_n = 0$ et donc $\lim_n X_n = 0$ presque surement. Supposons que $\sum_{n\in\mathbb{N}} q_n = \infty$. Le lemme de Borel implique que p.s. $X_n = n$ pour une infinité de n; par conséquent p.s. $\limsup_n X_n = \infty$ et donc (X_n) ne converge pas vers une variable réelle.

Exercice II. Soit $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbf{P})$, un espace de probabilité. Soit $X : \Omega \to \mathbb{R}_+$, une v.a. $\mathscr{F}$-mesurable. On note μ sa loi. Soit $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$, une fonction croissante C^1 telle que $f(0) = 0$.

1) Calculer $\int_0^\infty f'(x)\mu(]x,\infty[)dx$.

Solution

Par Fubini positif,

$$\int_0^\infty f'(x)\mu(]x,\infty[)dx \;=\; \int_0^\infty dx\, f'(x) \int_{\mathbb{R}_+} \mu(dy)\, \mathbf{1}_{\{y>x\}} = \int_{\mathbb{R}_+} \mu(dy) \int_0^\infty dx\, f'(x) \mathbf{1}_{\{y>x\}}$$

$$= \int_{\mathbb{R}_+} \mu(dy)\, f(y) = \mathbf{E}[f(X)] \; .$$

. . . .

2) Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de v.a. réelles positives $\mathscr{F}$-mesurables qui converge en loi vers X. Montrer que $\mathbf{E}[f(X)] \leq \liminf_n \mathbf{E}[f(X_n)]$.

Solution

On note μ_n la loi de X_n. La question précédente appliquée à X_n et μ_n, et Fatou impliquent que

$$\liminf_{n\to\infty} \mathbf{E}[f(X_n)] = \liminf_{n\to\infty} \int_0^\infty f'(x)\mu_n(]x,\infty[)dx \geq \int_0^\infty f'(x) \liminf_{n\to\infty} \mu_n(]x,\infty[)dx \; .$$

Le théorème de Portemanteau implique ensuite que $\liminf_{n\to\infty} \mu_n(]x,\infty[) \geq \mu(]x,\infty[)$. Par conséquent,

$$\liminf_{n\to\infty} \mathbf{E}[f(X_n)] \geq \int_0^\infty f'(x) \liminf_{n\to\infty} \mu_n(]x,\infty[)dx \geq \int_0^\infty f'(x)\mu(]x,\infty[)dx = \mathbf{E}[f(X)] \; .$$

Exercice III. Soit $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbf{P})$, un espace de probabilité. Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de v.a. réelles $\mathscr{F}$-mesurables convergeant en loi vers une v.a. uniforme sur $[0,1]$. Soit $(Y_n)_{n\geq 1}$ une suite de v.a. réelles $\mathscr{F}$-mesurables convergeant en probabilité vers 0. Montrer que $\lim_n \mathbf{P}(X_n < Y_n) = 0$.

Solution

Soit $\varepsilon \in]0,1]$. On observe que

$$\mathbf{P}(X_n < Y_n) = \mathbf{P}(\varepsilon < X_n < Y_n) + \mathbf{P}(X_n \leq \varepsilon; X_n < Y_n) \leq \mathbf{P}(|Y_n| > \varepsilon) + \mathbf{P}(X_n \leq \varepsilon) \; .$$

La convergence en loi des X_n vers une variable uniforme X sur $[0,1]$ (de loi diffuse) entraîne que $\lim_n \mathbf{P}(X_n \leq \varepsilon) = \mathbf{P}(X \leq \varepsilon) = \varepsilon$. La convergence en probabilité des Y_n vers 0 implique que $\lim_n \mathbf{P}(|Y_n| > \varepsilon) = 0$. Donc $\limsup_n \mathbf{P}(X_n < Y_n) \leq \varepsilon$, ce qui implique le résultat voulu car ε peut-être arbitrairement petit.

Exercice IV. Soit $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbf{P})$, un espace de probabilité. Soit X, une v.a. réelle $\mathscr{F}$-mesurable telle que $\mathbf{E}[X] = 0$ et de variance 1. Soit Y, v.a. réelle $\mathscr{F}$-mesurable indépendante de X et de même loi. On suppose que $\frac{1}{\sqrt{2}}(X+Y)$ a même loi que X. Trouver explicitement la loi de X (*Indication: se donner $X_1, \ldots, X_{2^n}$, v.a. indépendantes et de même loi que X, et penser au théorème central-limite*).

Solution

On montre par récurrence sur n que si $X_1, \dots, X_{2^n}$ sont v.a. indépendantes et de même loi que X, alors

$$\frac{X_1 + \dots + X_{2^n}}{\sqrt{2^n}} \stackrel{\text{(loi)}}{=} X \, . \tag{(*)}$$

Cette propriété est vraie pour $n = 1$: c'est l'hypothèse. On la suppose vraie pour n. Soient $Y_1, \dots, Y_{2^{n+1}}$, v.a. indépendantes et de même loi que X. Pour tout $k \in \{1, \dots, 2^n\}$, on pose $X_k = \frac{1}{\sqrt{2}}(Y_{2k-1} + Y_{2k})$. L'hypothèse de l'exercice implique que X_k a même loi que X. Par ailleurs, on note $\mathscr{F}_k = \sigma(Y_{2k-1}, Y_{2k})$. Par indépendance par paquets, les tribus $\mathscr{F}_1, \dots, \mathscr{F}_{2^n}$ sont indépendantes. Comme X_k est $\mathscr{F}_k$-mesurable, $\sigma(X_k) \subset \mathscr{F}_k$ et on en déduit que les tribus $\sigma(X_1), \dots, \sigma(X_{2^n})$ sont également indépendantes, c'est-à-dire que $X_1, \dots, X_{2^n}$ sont indépendantes. On applique l'hypothèse de récurrence et

$$\frac{Y_1 + \dots + Y_{2^{n+1}}}{\sqrt{2^{n+1}}} = \frac{X_1 + \dots + X_{2^n}}{\sqrt{2^n}} \stackrel{\text{(loi)}}{=} X \, ,$$

ce qui montre la propriété (*)

On se donne une suite $(X_n)_{n \geq 1}$ de v.a. indépendantes de même loi que X. Le théorème central-limite implique que $\frac{1}{\sqrt{n}}(X_1 + \dots + X_n) \to \mathcal{N}(0,1)$ en loi et donc $2^{-n/2}(X_1 + \dots + X_{2^n}) \to \mathcal{N}(0,1)$ en loi. Or par $(*)$ la loi de $2^{-n/2}(X_1 + \dots + X_{2^n})$ est constante: c'est la loi de X. Par conséquent $X \sim \mathcal{N}(0,1)$.

Exercice V. Les v.a. de l'exercice sont définies sur l'espace de probabilité $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbf{P})$.
1) Soit $(E, \mathscr{E})$, un espace mesurable tel que la diagonale $\Delta = \{(x,x); x \in E\}$ appartienne à $\mathscr{E} \otimes \mathscr{E}$. Soient X et $Y : \Omega \to E$, deux v.a. $(\mathscr{F}, \mathscr{E})$-mesurables de lois respectives μ et ν.
1–a) Montrer que $\{X = Y\} \in \mathscr{F}$.

Solution

Soient $A, B \in \mathscr{E}$. On remarque que $\{(X,Y) \in A \times B\} = \{X \in A\} \cap \{Y \in B\} \in \mathscr{F}$. Comme $\mathscr{E} \otimes \mathscr{E}$ est engendré par les ensembles produits $A \times B$, $A, B \in \mathscr{E}$, on en déduit que $(X,Y) : \Omega \to E \times E$ est $(\mathscr{F}, \mathscr{E} \otimes \mathscr{E})$-mesurable. On remarque alors que

$$\{X = Y\} = \{(X,Y) \in \Delta\} \in \mathscr{F} \, .$$

....

1–b) On suppose X et Y indépendantes et μ diffuse. Montrer que $\mathbf{P}(X = Y) = 0$.

Solution

La loi de (X,Y) est $\mu \otimes \nu$ car X et Y sont indépendantes; par le théorème de transfert et la question précédente.

$$\mathbf{P}(X = Y) = \mathbf{P}\big((X,Y) \in \Delta\big) = \mu \otimes \nu(\Delta) \, .$$

On note $\Delta^2_y = \{x \in E : (x,y) \in \Delta\}$ la seconde section de Δ en $y \in E$. Clairement $\Delta^2_y = \{y\}$. Par Fubini,

$$\mu \otimes \nu(\Delta) = \int_E \nu(dy)\, \mu(\Delta^2_y) = \int_E \nu(dy)\, \mu(\{y\}) = 0 \ ,$$

car μ est supposée diffuse, ce qui permet de conclure.

. . . .

2) Soit $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$; on note $x^{(n)}_1 \leq \ldots \leq x^{(n)}_n$ le réarrangement croissant des réels $x_1, \ldots, x_n$ et on pose $\Lambda_{n,k}(\mathbf{x}) = x^{(n)}_k$. On fixe $y \in \mathbb{R}$ et on pose $f(\mathbf{x}) = \sum_{1 \leq k \leq n} \mathbf{1}_{]-\infty,y]}(x_k)$. Montrer que $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ est mesurable. Exprimer $\{\Lambda_{n,k} \leq y\}$ à l'aide de f. En déduire que $\Lambda_{n,k} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ est mesurable.

Solution

La fonction $\mathbf{1}_{]-\infty,y]} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est $(\mathscr{B}(\mathbb{R}), \mathscr{B}(\mathbb{R}))$-mesurable car c'est la fonction indicatrice d'un Borélien. La k-ième projection canonique $\pi_k : (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n \to x_k$ est continue donc $(\mathscr{B}(\mathbb{R}^n), \mathscr{B}(\mathbb{R}))$-mesurable. Par composition d'applications mesurables, $\mathbf{1}_{]-\infty,y]} \circ \pi_k$ est $(\mathscr{B}(\mathbb{R}^n), \mathscr{B}(\mathbb{R}))$-mesurable et donc

$$f = \sum_{1 \leq k \leq n} \mathbf{1}_{]-\infty,y]} \circ \pi_k$$

est $(\mathscr{B}(\mathbb{R}^n), \mathscr{B}(\mathbb{R}))$-mesurable, car somme de fonctions mesurables. On vérifie que $\Lambda_{n,k}(\mathbf{x}) \leq y$ ssi $f(\mathbf{x}) \geq k$. Donc $\{\Lambda_{n,k} \leq y\} = \{f \geq k\} \in \mathscr{B}(\mathbb{R}^n)$. Donc pour tout $y \in \mathbb{R}$, $\{\Lambda_{n,k} \leq y\} \in \mathscr{B}(\mathbb{R}^n)$, ce qui montre la mesurabilité de $\Lambda_{n,k}$.

. . . .

3) Soit $(U_n)_{n \geq 1}$, une suite de v.a. réelles $\mathscr{F}$-mesurables indépendantes et de même loi uniforme sur $[0,1]$. Pour tous $1 \leq k \leq n$, on pose $U^{(n)}_k = \Lambda_{n,k}((U_1, \ldots, U_n))$. Pour tout $y \in]0,1[$, on pose $N_n(y) = \sum_{1 \leq k \leq n} \mathbf{1}_{[0,y]}(U_k)$.

3–a) Justifier que $U^{(n)}_k$ est une v.a. $\mathscr{F}$-mesurable ainsi que la v.a. $N_n(y)$. Quelle est la loi de $N_n(y)$. Calculer $\mathbf{E}[N_n(y)]$ et $\mathbf{var}(N_n(y))$ en fonction de n et y. Justifier que la suite $(\frac{1}{n} N_n(y))_{n \geq 1}$ converge p.s. vers une v.a. limite que l'on précisera.

Solution

Il est clair que $(U_1, \ldots, U_n) : \Omega \to \mathbb{R}^n$ est $(\mathscr{F}, \mathscr{B}(\mathbb{R}^n))$-mesurable (cours, ou on raisonne comme au **1–a)**). Par la question précédente $U^{(n)}_k$ est donc $\mathscr{F}$-mesurable ainsi que $N_n(y) = f((U_1, \ldots, U_n))$. On pose $\xi_k = \mathbf{1}_{[0,y]}(U_k)$. Les $(\xi_k)_{k \geq 1}$ sont des v.a. de Bernoulli indépendantes de paramètres y et $N_n(y) = \xi_1 + \ldots + \xi_n$ suit donc une loi binomiale (n, y). On a donc $\mathbf{E}[N_n(y)] = ny$ et $\mathbf{var}(N_n(y)) = ny(1-y)$ (des détails des calculs sont attendus). La loi des grands nombres implique que p.s. $\lim_n \frac{1}{n} N_n(y) = y$.

. . . .

3–b) Soit $x\in]0,1[$ et soit $(k_n)_{n\geq 1}$, une suite d'entiers tels $\lim_n k_n/n = x$. Montrer que p.s. $\lim_n U^{(n)}_{k_n} = x$. (*Indication penser à exprimer un événement du type* $\{U^{(n)}_k \leq y\}$ *à l'aide de* $N_n(y)$.)

Solution

Soit $y > x$. Comme p.s. $\lim_n \frac{1}{n} N_n(y) = y$, on a p.s. $N_n(y) \geq k_n$ pour tout n assez grand et donc p.s. $U^{(n)}_{k_n} \leq y$ pour tout n assez grand. On en déduit que pour tout $y \in]x,1[$, p.s. $\limsup_n U^{(n)}_{k_n} \leq y$. Soit $0 < z < x$. Comme p.s. $\lim_n \frac{1}{n} N_n(z) = z$, on a p.s. $N_n(z) < k_n$ pour tout n assez grand et donc p.s. $U^{(n)}_{k_n} > z$ pour tout n assez grand. On en déduit que pour tout $z\in]0,x[$, p.s. $\liminf_n U^{(n)}_{k_n} \geq z$. Pour tout $p \in \mathbb{N}$, on pose

$$A_p = \left\{ x - 2^{-p} \leq \liminf_{n\to\infty} U^{(n)}_{k_n} \leq \limsup_{n\to\infty} U^{(n)}_{k_n} \leq x + 2^{-p} \right\} .$$

On a montré que $\mathbf{P}(A_p) = 1$. On pose $A = \bigcap_{p\in\mathbb{N}} A_p$. Alors $\mathbf{P}(A) = 1$ et sur A, on a bien $\lim_n U^{(n)}_{k_n} = x$.

. . . .

4) On fixe $n \geq 1$. On note $\mathbb{S}_n$ le groupe des permutations de $\{1,\ldots,n\}$. Pour tout $\gamma\in\mathbb{S}_n$, on pose $O_\gamma = \{(x_1,\ldots,x_n)\in\mathbb{R}^n : x_{\gamma(1)} < \ldots < x_{\gamma(n)}\}$; on pose aussi $O = \bigcup_{\gamma\in\mathbb{S}_n} O_\gamma$.
4–a) Montrer que p.s. $(U_1,\ldots,U_n) \in O$ et calculer $\mathbf{P}((U_1,\ldots U_n) \in O_\gamma)$, pour tout $\gamma\in\mathbb{S}_n$.

Solution

Par la question **1–b)**, $\mathbf{P}(U_k = U_\ell) = 0$. Donc

$$\mathbf{P}\big((U_1,\ldots,U_n)\notin O\big) = \mathbf{P}(\exists 1 \leq k < \ell \leq n : U_k = U_\ell) \leq \sum_{1\leq k<\ell\leq n} \mathbf{P}(U_k = U_\ell) = 0 .$$

Donc p.s. $(U_1,\ldots,U_n)\in O$. Soit $\gamma\in\mathbb{S}_n$. On remarque que $U_{\gamma^{-1}(1)},\ldots,U_{\gamma^{-1}(n)}$ sont des v.a. indépendantes uniformes sur $[0,1]$ et donc

$$(U_{\gamma^{-1}(1)},\ldots,U_{\gamma^{-1}(n)}) \overset{\text{loi}}{=} (U_1,\ldots,U_n) .$$

Donc

$$\mathbf{P}((U_1,\ldots U_n)\in O_\gamma) = \mathbf{P}((U_{\gamma^{-1}(1)},\ldots,U_{\gamma^{-1}(n)})\in O_\gamma) .$$

Par ailleurs $\{U_{\gamma^{-1}(1)},\ldots,U_{\gamma^{-1}(n)})\} \in O_\gamma\} = \{U_1 < \ldots < U_n\}$, donc $\mathbf{P}((U_1,\ldots U_n) \in O_\gamma) = \mathbf{P}(U_1<\ldots<U_n)$, qui ne dépend pas de γ. On a donc

$$1 = \mathbf{P}((U_1,\ldots,U_n) \in O) = \sum_{\gamma\in\mathbb{S}_n} \mathbf{P}((U_1,\ldots U_n)\in O_\gamma) = n!\mathbf{P}(U_1<\ldots<U_n) .$$

On en déduit

$$\forall \gamma \in \mathbb{S}_n, \quad \mathbf{P}((U_1, \dots U_n) \in O_\gamma) = \mathbf{P}(U_1 < \dots < U_n) = 1/n! \ .$$

. . . .

4–b) Montrer qu'il existe une permutation aléatoire $\boldsymbol{\sigma} : \Omega \to \mathbb{S}_n$ $\mathscr{F}$-mesurable telle que p.s. $U_{\boldsymbol{\sigma}(k)} = U_k^{(n)}$, pour tout $k \in \{1, \dots, n\}$. Montrer que pour tout $\gamma \in \mathbb{S}_n$, $\mathbf{P}(\boldsymbol{\sigma} = \gamma) = 1/n!$ et que $\boldsymbol{\sigma}$ est indépendante de $(U_k^{(n)})_{1 \le k \le n}$. Montrer de plus que pour toute fonction mesurable $h : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}_+$

$$\mathbf{E}\big[h\big(U_1^{(n)}, \dots, U_n^{(n)}\big)\big] = n! \int_{\{0 \le x_1 < \dots < x_n \le 1\}} h(x_1, \dots, x_n)\, dx_1 \dots dx_n \ .$$

Solution

Pour tout $\gamma \in \mathbb{S}_\gamma$, on pose $A_\gamma = \{(U_1, \dots, U_n) \in O_\gamma\}$ et $N = \{(U_1 \dots, U_n) \notin O\}$. On a $\mathbf{P}(N) = 0$ et $\Omega = N \cup \bigcup_{\gamma \in \mathbb{S}_n} A_\gamma$. Pour tout $\omega \in A_\gamma$, on pose $\boldsymbol{\sigma}(\omega) = \gamma$ et pour tout $\omega \in N$, on pose $\boldsymbol{\sigma}(\omega) = \mathrm{Id}$. On vérifie que $\boldsymbol{\sigma} : \Omega \to \mathbb{S}_n$ est une permutation aléatoire $\mathscr{F}$-mesurable et que sur $\Omega \backslash N$, on a $U_{\boldsymbol{\sigma}(1)} < \dots < U_{\boldsymbol{\sigma}(n)}$, ce qui montre que p.s. pour tout $k \in \{1, \dots, n\}$, $U_k^{(n)} = U_{\boldsymbol{\sigma}(k)}$. De plus p.s. $\mathbf{1}_{\{\boldsymbol{\sigma} = \gamma\}} = \mathbf{1}_{A_\gamma}$ et donc

$$\forall \gamma \in \mathbb{S}_n, \quad \mathbf{P}(\boldsymbol{\sigma} = \gamma) = \mathbf{P}(A_\gamma) = \mathbf{P}((U_1, \dots, U_n) \in O_\gamma) = 1/n! \ ,$$

par la question précédente.

Soit $h : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}_+$, une fonction mesurable, soit $g : \mathbb{S}_n \to \mathbb{R}_+$. On a

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}\big[h(U_1^{(n)}, \dots, U_n^{(n)}) g(\boldsymbol{\sigma})\big] &= \sum_{\gamma \in \mathbb{S}_n} \mathbf{E}\big[h(U_1^{(n)}, \dots, U_n^{(n)}) g(\boldsymbol{\sigma}) \mathbf{1}_{A_\gamma}\big] \\
&= \sum_{\gamma \in \mathbb{S}_n} g(\gamma) \mathbf{E}\big[h(U_1^{(n)}, \dots, U_n^{(n)}) \mathbf{1}_{A_\gamma}\big] \\
&= \sum_{\gamma \in \mathbb{S}_n} g(\gamma) \mathbf{E}\big[h(U_{\gamma(1)}, \dots, U_{\gamma(n)}) \mathbf{1}_{\{U_{\gamma(1)} < \dots < U_{\gamma(n)}\}}\big] \\
&= \sum_{\gamma \in \mathbb{S}_n} g(\gamma) \mathbf{E}\big[h(U_1, \dots, U_n) \mathbf{1}_{\{U_1 < \dots < U_n\}}\big] \ ,
\end{aligned}$$

car le vecteur $(U_{\gamma(1)}, \dots, U_{\gamma(n)})$ a même loi que $(U_1, \dots, U_n)$. On en déduit

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}\big[h(U_1^{(n)}, \dots, U_n^{(n)}) g(\boldsymbol{\sigma})\big] &= n! \mathbf{E}\big[h(U_1, \dots, U_n) \mathbf{1}_{\{U_1 < \dots < U_n\}}\big] \sum_{\gamma \in \mathbb{S}_n} \frac{1}{n!} g(\gamma) \\
&= n! \mathbf{E}\big[h(U_1, \dots, U_n) \mathbf{1}_{\{U_1 < \dots < U_n\}}\big] \mathbf{E}[g(\boldsymbol{\sigma})].
\end{aligned}$$

En prenant g constante à 1, cela montre par le théorème de transfert que

$$\mathbf{E}\big[h\big(U_1^{(n)}, \dots, U_n^{(n)}\big)\big] = n! \mathbf{E}\big[h(U_1, \dots, U_n) \mathbf{1}_{\{U_1 < \dots < U_n\}}\big]$$

$$= \quad n! \int_{\{0\le x_1<\ldots<x_n\le 1\}} h(x_1,\ldots,x_n)\, dx_1\ldots dx_n\ .$$

Cela montre aussi que

$$\mathbf{E}\big[h(U_1^{(n)},\ldots,U_n^{(n)})g(\boldsymbol{\sigma})\big] = \mathbf{E}\big[h(U_1^{(n)},\ldots,U_n^{(n)})\big]\mathbf{E}\big[g(\boldsymbol{\sigma})\big]\ ,$$

ce qui implique que $\boldsymbol{\sigma}$ est indépendante de $(U_k^{(n)})_{1\le k\le n}$.

....

5) Montrer que $U_k^{(n)}$ admet une densité notée $g_{n,k}$ que l'on calculera explicitement.

Solution

Soit $h:\mathbb{R}_+\to\mathbb{R}_+$, une fonction mesurable. Par Fubini et la question précédente, on a

$$\mathbf{E}\big[h\big(U_k^{(n)}\big)\big] = n!\int_{[0,1]} dy\, h(y)\Big(\int_{\{0\le x_1<\ldots<x_{k-1}\le y\}} dx_1\ldots dx_{k-1}\Big)\Big(\int_{\{y<x_{k+1}<\ldots<x_n\le 1\}} dx_{k+1}\ldots dx_n\Big)\ .$$

Par un changement de variable linéaire et par ce qui précède

$$\begin{aligned}\int_{\{0\le x_1<\ldots<x_{k-1}\le y\}} dx_1\ldots dx_{k-1} &= y^{k-1}\int_{\{0\le z_1<\ldots<z_{k-1}\le 1\}} dz_1\ldots dz_{k-1}\\ &= y^{k-1}\mathbf{P}(U_1<\ldots<U_{k-1}) = \frac{y^{k-1}}{(k-1)!}\ .\end{aligned}$$

En posant $y_\ell = x_{k+\ell}-y$ et en faisant un changement de variable linéaire on a aussi

$$\begin{aligned}\int_{\{y<x_{k+1}<\ldots<x_n\le 1\}} dx_{k+1}\ldots dx_n &= \int_{\{0<y_1<\ldots<y_{n-k}\le 1-y\}} dy_1\ldots dy_{n-k}\\ &= (1-y)^{n-k}\int_{\{0<z_1<\ldots<z_{n-k}\le 1\}} dz_1\ldots dz_{n-k}\\ &= (1-y)^{n-k}\mathbf{P}(U_1<\ldots<U_{n-k}) = \frac{(1-y)^{n-k}}{(n-k)!}\ .\end{aligned}$$

Donc finalement,

$$\mathbf{E}\big[h\big(U_k^{(n)}\big)\big] = \frac{n!}{(k-1)!(n-k)!}\int_{[0,1]} h(y)y^{k-1}(1-y)^{n-k}\,dy = \int_{[0,1]} h(y)k\binom{n}{k}y^{k-1}(1-y)^{n-k}\,dy\ .$$

La v.a. $U_k^{(n)}$ admet donc la densité

$$g_{n,k}(y) = \mathbf{1}_{[0,1]}(y)k\binom{n}{k}y^{k-1}(1-y)^{n-k}\ .$$

....

6) On pose $X_n = \sqrt{n}\big(U_{n+1}^{(2n+1)}-\frac{1}{2}\big)$. Montrer que la suite $(X_n)_{n\ge1}$ converge en loi vers une limite que l'on précisera. (*Rappel de la formule de Stirling:* $n!\sim\sqrt{2\pi n}(n/e)^n$)

Solution

Par la question précédente

$$\mathbf{E}[h(X_n)] = \int_0^1 h(n^{1/2}(y-1/2))g_{2n+1,n+1}(y)dy = n^{-1/2}\int_{-\sqrt{n}/2}^{\sqrt{n}/2} h(x)g_{2n+1,n+1}\big(\tfrac{1}{2}+n^{-1/2}x\big)\,dx\ .$$

On pose

$$\begin{aligned} q_n(x) &= n^{-1/2}g_{2n+1,n+1}\big(\tfrac{1}{2}+n^{-1/2}x\big) = n^{-1/2}(n+1)\binom{2n+1}{n+1}\big(\tfrac{1}{2}+n^{-1/2}x\big)^n\big(\tfrac{1}{2}-n^{-1/2}x\big)^n \\ &= n^{-1/2}(n+1)\frac{(2n+1)}{n!(n+1)!}2^{-2n}\big(1-n^{-1}4x^2\big)^n = n^{-1/2}(2n+1)\frac{(2n)!}{(n!)^2}2^{-2n}\big(1-n^{-1}4x^2\big)^n\ . \end{aligned}$$

Par Stirling

$$\lim_{n\to\infty} n^{-1/2}(2n+1)\frac{(2n)!}{(n!)^2}2^{-2n} = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\ .$$

De plus $\log(1-y) \leq -y$, on en déduit que $\big(1-n^{-1}4x^2\big)^n \leq \exp(-4x^2)$. De plus $\lim_n \big(1-n^{-1}4x^2\big)^n = \exp(-4x^2)$. Soit $h : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$, mesurable bornée. On pose

$$C = \sup_{n\in\mathbb{N}} n^{-1/2}(2n+1)\frac{(2n)!}{(n!)^2}2^{-2n} < \infty \quad \text{et} \quad g_n(x) = \mathbf{1}_{[-\sqrt{n}/2,\sqrt{n}/2]}(x)h(x)q_n(x)\ .$$

On a

$$\forall x\in\mathbb{R},\quad \lim_{n\to\infty} g_n(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\exp(-4x^2)h(x) \quad \text{et} \quad |g_n(x)| \leq C\|h\|_\infty \exp(-4x^2)\ .$$

Comme $x \mapsto \exp(-4x^2)$ est Lebesgue intégrable sur $\mathbb{R}$, le théorème de convergence dominée implique

$$\lim_{n\to\infty}\mathbf{E}[h(X_n)] = \lim_{n\to\infty}\int_{\mathbb{R}} g_n(x)\,dx = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_{\mathbb{R}} h(x)\exp(-4x^2)\,dx\ .$$

et donc $X_n \Longrightarrow \mathcal{N}(0,\frac{1}{8})$ en loi.

Exercice VI. Soit $\varphi : [0,1[\to [0,1[$, donnée par $\varphi(x) = 2x$ modulo 1. On note ℓ la mesure de Lebesgue restreinte à $[0,1[$.
1) Montrer que ℓ est φ-invariante.

Solution

Soit $x\in[0,1[$. On pose $A = [0,x[$ et $\varphi^{-1}(A) = B\cup C$ où

$$B = \{y\in[0,1[\,: 0\leq 2y < x\} = [0,x/2[\quad \text{et} \quad C = \{y\in[0,1[\,:\ 0\leq 2y-1 < x\} = \big[\tfrac{1}{2},\tfrac{1}{2}(1+x)\big[\ .$$

Les intervalles B et C sont disjoints et $\ell(B)+\ell(C)=x$. Donc $\ell(\varphi^{-1}([0,x[))=\ell([0,x[)$, $x\in[0,1[$. On pose $\mathcal{P}=\{[0,x[\,;\,x\in[0,1[\}$. Il est clair que $\mathcal{P}$ est un pi-système générant $\mathscr{B}([0,1[)$; puisque ℓ et $\ell\circ\varphi^{-1}$ coïncident sur $\mathcal{P}$, le théorème d'unicité du prolongement des mesures (dans le cas fini) implique que $\ell=\ell\circ\varphi^{-1}$.

....

2) Soit $A\in\mathscr{B}([0,1[)$ tel que $A=\varphi^{-1}(A)$. On note $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, l'unique fonction 1-périodique telle que $f=\mathbf{1}_A$ sur $[0,1[$. Pour tout $n\in\mathbb{Z}$, on note $c_n(f)$ son coefficient de Fourier. Montrer que $c_{2n}(f)=c_n(f)$. En déduire que $\ell(A)=0$ ou 1. (*Indication: on pourra utiliser l'injectivité des coefficients de Fourier sur* $\mathrm{L}^1([0,1[,\mathscr{B}([0,1[),\ell)$.)

Solution

Comme $A=\varphi^{-1}(A)$, et puisque f est 1-périodique

$$\forall x\in\mathbb{R},\quad f(x)=f(\varphi(x))=f(2x)\ .$$

Soit $n\in\mathbb{Z}$,

$$\begin{aligned}
c_{2n}(f) &= \int_0^1 e^{-2i\pi 2nx}f(x)dx=\int_0^1 e^{-2i\pi 2nx}f(2x)dx\\
&= \frac{1}{2}\int_0^2 e^{-2i\pi ny}f(y)dy=\frac{1}{2}\Big(c_n(f)+\int_1^2 e^{-2i\pi ny}f(y)dy\Big)\\
&= \frac{1}{2}\Big(c_n(f)+c_n(f)\Big)=c_n(f)\ .
\end{aligned}$$

On en déduit que pour tout $k\in\mathbb{N}$, $c_n(f)=c_{n2^k}(f)$. Si $n\neq 0$, Riemann-Lebesgue implique que $\lim_k c_{n2^k}(f)=0$. On en déduit que $c_n(f)=0$ si $n\neq 0$. Par ailleurs $c_0(f)=\ell(A)$. On voit donc que f est ℓ-p.p. une fonction constante à $\ell(A)$, par injectivité L^1 des coefficients de Fourier. Donc, ℓ-p.p. $\mathbf{1}_A=\ell(A)$, ce qui implique que $\ell(A)=0$ ou 1.

....

3) Pour tout $n\in\mathbb{N}$, on note $\varphi^{\circ n}$ la n-ième itérée de φ. On note E l'ensemble des $x\in[0,1[$ tel que la suite $(\varphi^{\circ n}(x))_{n\geq 1}$ n'est pas dense dans $[0,1]$. Montrer que $\ell(E)=0$ mais que l'adhérence de E est $[0,1]$.

Solution

La question précédente montre que φ est ℓ-ergodique. Le théorème ergodique de Birkhoff implique que pour toute fonction $f\in\mathrm{L}^1([0,1[,\mathscr{B}([0,1[),\ell)$,

$$\text{pour } \ell\text{-presque tout } x\in[0,1[,\quad \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{0\leq k<n} f\big(\varphi^{\circ k}(x)\big)=\int_{[0,1[} f\,d\ell\ .$$

On en déduit que pour ℓ-presque tout $x \in [0,1[$,

$$\forall a, b \in \mathbb{Q} \cap [0,1[\,:\ a < b, \quad \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \#\big\{k \in \{0,\dots,n-1\} : \varphi^{\circ k}(x) \in [a,b]\ \big\} = b - a\ .$$

On en déduit qu'il existe $A \in \mathscr{B}([0,1[)$ tel que $\ell(A) = 1$ et pour tout $x \in A$ la suite est $(\varphi^{\circ n}(x))_{n\geq 1}$ est dense dans $[0,1]$, ce qui montre que $E \subset [0,1[\backslash A$, ce qui montre que E est ℓ-négligeable.

On peut également raisonner en utilisant le théorème de récurrence de Poincaré pour tout intervalle $]a,b[$.

Il existe ensuite des points d'orbite périodique: supposons que $\varphi^{\circ n}(x) = x$. Il existe donc $k \in \mathbb{N}$ tel que $2^n x = k + x$ et donc $x = k/(2^n - 1)$. Réciproquement, soit $k \in \{0,\dots,2^n-2\}$, on pose $x = k/(2^n-1) \in [0,1[$. On a $2^n x = k + x$, et donc $\varphi^{\circ n}(x) = x$. On note P l'ensemble des points d'orbites périodiques. On a montré que l'adhérence de P est $[0,1]$, d'autre part $P \subset E$, ce qui montre que l'adhérence de E est $[0,1]$.

On peut également voir que les points diadiques sont d'orbite finie.

Exercice VI. Soit $p \in]1,\infty[$. On note q l'exposant conjugué de p. Pour simplifier, on note L^p l'espace vectoriel réel $\mathrm{L}^p(]0,\infty[, \mathscr{B}(]0,\infty[), \ell)$ qui est muni de la norme usuelle $\|\cdot\|_p$.

1) Soit $f \in \mathrm{L}^p$. Pour tout $x \in]0,\infty[$, on pose $Tf(x) = \frac{1}{x}\int_{[0,x]} f(y)\ell(dy)$. Montrer que $Tf(x)$ est bien définie. Montrer que $x \mapsto Tf(x)$ est mesurable.

Solution

On montre d'abord que pour tout $x > 0$, $\int_{[0,x]} f\, d\ell$ est bien définie. Pour cela on remarque que $\|\mathbf{1}_{[0,x]}\|_q = x^{1/q} < \infty$. Par Hölder, $\mathbf{1}_{[0,x]} f$ est intégrable, ce qui montre que $Tf(x)$ est bien définie pour tout $x > 0$. On note f_+ et f_- les parties positive et négative de f; $Tf_+(x)$ et bien définie et $x \mapsto \int_{[0,x]} f_+\, d\ell$ est croissante, donc c'est une fonction Borel-mesurable. De même pour $x \mapsto \int_{[0,x]} f_-\, d\ell$. On en déduit que $x \mapsto \int_{[0,x]} f\, d\ell$ est la différence de deux fonctions Borel-mesurables, donc elle-même Borel-mesurable, ce qui implique que $x \mapsto Tf(x)$ est Borel-mesurable, comme produit que deux applications Borel-mesurables (en effet $x \mapsto 1/x$ est Borel-mesurable sur $]0,\infty[$, car continue).

. . . .

2) Soit $f \in \mathrm{L}^p$. Soit $0 < \alpha < 1/q$. En remarquant que $xTf(x) = \int_{[0,x]} f(y) y^{\alpha} y^{-\alpha}\, \ell(dy)$, montrer que $\|Tf\|_p^p \leq \frac{1}{(1-\alpha q)^{p-1}\alpha p} \|f\|_p^p$. Montrer que T est un endomorphisme continu de L^p dont la norme est inférieure à $p/(p-1)$.

Solution

Par Hölder on a

$$|Tf(x)| \ \leq\ x^{-1}\Big(\int_{[0,x]} |f(y)|^p y^{\alpha p} dy\Big)^{1/p} \Big(\int_{[0,x]} y^{-\alpha q}\Big)^{1/q}$$

$$
\begin{aligned}
&= x^{-1}\Big(\int_{[0,x]}|f(y)|^p y^{\alpha p}dy\Big)^{1/p}\frac{x^{1/q-\alpha}}{(1-\alpha q)^{1/q}}\\
&= \frac{x^{-1/p-\alpha}}{(1-\alpha q)^{1-1/p}}\Big(\int_{[0,x]}|f(y)|^p y^{\alpha p}dy\Big)^{1/p}.
\end{aligned}
$$

On a utilisé le fait que $\alpha q < 1$, qui implique que $y^{-\alpha q}$ est Lebesgue intégrable au voisinage de 0. On a également utilisé le fait que $1/p = 1 - 1/q$. on a donc

$$
|Tf(x)|^p \leq \frac{x^{-1-\alpha p}}{(1-\alpha q)^{p-1}}\int_{[0,x]}|f(y)|^p y^{\alpha p}dy
$$

En utilisant Fubini, on en déduit que

$$
\begin{aligned}
\|Tf\|_p^p = \int_{\mathbb{R}}|Tf|^p\,d\ell &\leq \int_{\mathbb{R}} dx\frac{x^{-1-\alpha p}}{(1-\alpha q)^{p-1}}\int_{[0,x]}|f(y)|^p y^{\alpha p}dy\\
&= \frac{1}{(1-\alpha q)^{p-1}}\int_{\mathbb{R}} dy|f(y)|^p y^{\alpha p}\int_{\mathbb{R}} x^{-1-\alpha p}\mathbf{1}_{\{y\leq x\}}\\
&= \frac{1}{(1-\alpha q)^{p-1}}\int_{\mathbb{R}} dy|f(y)|^p y^{\alpha p}\frac{y^{-\alpha p}}{\alpha p}\\
&= \frac{1}{(1-\alpha q)^{p-1}\alpha p}\|f\|_p^p\,.
\end{aligned}
$$

On pose $\phi(\alpha) = (\alpha p)^{-1}(1-\alpha p)^{-(p-1)}$, pour tout $\alpha \in]0, 1/q[$ et on pose $\psi = -\log\phi$. On cherche à minimiser ϕ et donc à maximiser ψ. On remarque que

$$
\psi(\alpha) = \log\alpha + (p-1)\log(1-\alpha q) + \log p\,.
$$

Donc

$$
\psi'(\alpha) = \frac{1}{\alpha} - \frac{q(p-1)}{(1-\alpha q)} = \frac{1}{\alpha} - \frac{p}{(1-\alpha q)}\,,
$$

car $p = q(p-1)$. De plus $\lim_{0+}\psi' = \infty$, $\lim_{1/q-}\psi' = -\infty$ et ψ' n'a qu'un seul zéro sur $]0, 1/q[$ qui est $\alpha_0 = 1/(p+q)$. On en déduit que

$$
\min_{]0,1/q[}\phi = \phi(\alpha_0) = \Big(\frac{p+q}{p}\Big)^p = \Big(\frac{p}{p-1}\Big)^p\,.
$$

Donc

$$
\|Tf\|_p \leq \frac{p}{p-1}\|f\|_p
$$

et l'opérateur $T : \mathrm{L}^p \to \mathrm{L}^p$ est continu de norme inférieure ou égale à $\frac{p}{p-1}$.