Correction du partiel du cours d'intégration-probabilités

Le 25 Novembre 2013

Durée: 3 heures. Aucun document n'est autorisé.

Question de cours. Citer le lemme de Fatou et théorème de convergence dominée. Prouver le théorème de convergence dominée à partir du lemme de Fatou.

Exercice I. Les questions suivantes sont indépendantes.

1) Etudier la limite éventuelle de la suite $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$, donnée par

$$w_n = \int_{\mathbb{R}_+} \frac{\sin(\pi x)}{1+x^{n+2}}\, dx \; .$$

Solution

On pose $f_n(x) = \sin(\pi x)/(1+x^{n+2})$, $x \in \mathbb{R}_+$. On remarque que

$$\forall x \in \mathbb{R}_+,\ \forall n \in \mathbb{N}, \quad 0 \leq |f_n(x)| \leq \mathbf{1}_{[0,1]}(x) + \mathbf{1}_{]1,\infty[}(x)\frac{1}{1+x^2} =: g(x) \; .$$

On vérifie que g est intégrable par rapport à la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}_+$. De plus, pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, $\lim_n f_n(x) = f(x)$ où

$$f(x) = \sin(\pi x) \text{ si } x \in [0,1[\,, \quad f(1) = \tfrac{1}{2}\sin(\pi) \quad \text{et} \quad f(x) = 0 \text{ si } x > 1 \; .$$

Le théorème de convergence dominée implique alors que

$$\lim_{n\to\infty} w_n = \int_{[0,1[} \sin(\pi x)\, dx = \frac{2}{\pi} \; .$$

. . . .

2) Soient $a, b \in \,]0,\infty[$. Justifier l'égalité suivante:

$$\int_{]0,\infty[} \frac{xe^{-ax}}{1-e^{-bx}}\, dx = \sum_{n\geq 0} \frac{1}{(a+bn)^2} \; .$$

Solution

Pour tout $x \in \,]0,\infty[$ et tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $f_n(x) = xe^{-(a+bn)x}$. On a clairement

$$\forall x \in \,]0,\infty[\,, \quad \frac{xe^{-ax}}{1-e^{-bx}} = \sum_{n\in\mathbb{N}} f_n(x) \; .$$

Comme il s'agit de fonctions positives, mesurables car continues sur $]0,\infty[$; l'interversion série/intégrale positive implique que

$$\int_{]0,\infty[} \frac{xe^{-ax}}{1-e^{-bx}}\,dx = \sum_{n\in\mathbb{N}} \int_{]0,\infty[} f_n(x)\,dx\ .$$

Par un changement de variable linéaire,

$$\int_{]0,\infty[} f_n(x)\,dx = \frac{1}{(a+bn)^2}\int_{]0,\infty[} xe^{-x}\,dx\ .$$

Une intégration par partie implique que $\int_{]0,\infty[} xe^{-x}\,dx = 1$, ce qui permet de conclure.

. . . .

3) Soient $a, b \in]0,\infty[$ tels que $a < b$. Justifier l'existence de l'intégrale

$$\int_{]0,\infty[} \frac{e^{-at}-e^{-bt}}{t}\,dt$$

Représenter cette intégrale comme une intégrale double et la calculer explicitement en fonction de a et de b (justifier soigneusement sa réponse).

Solution

La fonction $t\in]0,\infty[\to t^{-1}\big(e^{-at}-e^{-bt}\big)$ est continue positive, donc mesurable positive et l'intégrale

$$I := \int_{]0,\infty[} \frac{e^{-at}-e^{-bt}}{t}\,dt$$

est donc bien définie. On remarque ensuite que

$$\forall t\in]0,\infty[,\qquad \frac{e^{-at}-e^{-bt}}{t} = \int_{[a,b]} e^{-tu}\,du\ .$$

On pose $f : (t,u)\in]0,\infty[\times[a,b]\longmapsto e^{-tu}$. C'est une fonction continue donc $\mathscr{B}\big(]0,\infty[\otimes[a,b]\big)$-mesurable. Le théorème de Fubini positif s'applique et on a

$$\begin{aligned} I &= \int_{]0,\infty[}\Big(\int_{[a,b]} e^{-tu}\,du\Big)\,dt = \int_{[a,b]}\Big(\int_{]0,\infty[} e^{-tu}\,dt\Big)\,du \\ &= \int_{[a,b]}\frac{du}{u} = \log a - \log b\ . \end{aligned}$$

Exercice II. On note ℓ la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}$. Soit $h\in\mathscr{L}^1(\mathbb{R},\mathscr{B}(R),\ell)$. On rappelle que pour tout $\epsilon>0$, il existe $\psi : \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ qui est C^∞ à support compact telle que $\int_{\mathbb{R}} |h-\psi|\,d\ell < \epsilon$.

1) Soit $f \in \mathscr{L}^1(\mathbb{R}, \mathscr{B}(R), \ell)$. Soit $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite réelle bornée et soit $(\omega_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle telle que $\lim_n \omega_n = \infty$. Montrer que

$$\lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}} f(x) \cos(\omega_n x + \varphi_n)\, \ell(dx) \; = \; 0.$$

Solution

Soit $\epsilon > 0$ et soit $\psi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, C^∞ à support compact telle que $\int_{\mathbb{R}} |f - \psi|\, d\ell < \epsilon$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose

$$I_n = \int_{\mathbb{R}} f(x) \cos(\omega_n x + \varphi_n)\, \ell(dx) \quad \text{et} \quad J_n = \int_{\mathbb{R}} \psi(x) \cos(\omega_n x + \varphi_n)\, \ell(dx) \; .$$

Alors

$$\big|I_n - J_n\big| \leq \int_{\mathbb{R}} \big|f(x) - \psi(x)\big| \, \big|\cos(\omega_n x + \varphi_n)\big| \ell(dx) \leq \int_{\mathbb{R}} |f - \psi|\, d\ell < \epsilon \; .$$

On observe ensuite que pour tout $x \in \mathbb{R}$ et tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\psi(x) \cos(\omega_n x + \varphi_n) + \frac{1}{\omega_n} \psi'(x) \sin(\omega_n x + \varphi_n) = \Big(\frac{1}{\omega_n} \psi(x) \sin(\omega_n x + \varphi_n) \Big)' \; .$$

On choisit $a > 0$ tel que le support de ψ soit contenu dans $]-a, a[$. On en déduit donc que

$$J_n = \int_{[-a,a]} \psi(x) \cos(\omega_n x + \varphi_n)\, \ell(dx) = -\frac{1}{\omega_n} \int_{[-a,a]} \psi'(x) \sin(\omega_n x + \varphi_n)\, \ell(dx) \; .$$

Donc $|J_n| \leq 2a \|\psi'\|_\infty / \omega_n$. On a donc

$$|I_n| \leq \epsilon + \frac{2a\|\psi'\|_\infty}{\omega_n}$$

Donc pour tout $\epsilon > 0$, $\limsup_n |I_n| \leq \epsilon$, ce qui implique que $\lim_n I_n = 0$.

....

2) Soient $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$, deux suites réelles. Pour tout $x \in \mathbb{R}$ et tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $f_n(x) = a_n \sin(2\pi n x) + b_n \cos(2\pi n x)$. On fait l'hypothèse suivante:

$$\exists A \in \mathscr{B}(\mathbb{R}) \; : \quad \ell(A) > 0 \quad \text{et} \quad \forall x \in A, \quad \lim_{n\to\infty} f_n(x) = 0 \; .$$

On pose $\rho_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2}$, $n \in \mathbb{N}$. Montrer qu'il existe $\varphi_n \in [0, 2\pi]$, tel que $f_n(x) = \rho_n \cos(2\pi n x + \varphi_n)$, pour tout $x \in \mathbb{R}$.

Solution

Si $\rho_n = 0$, cela est évident. On suppose $\rho_n > 0$. Comme

$$(-a_n/\rho_n)^2 + (b_n/\rho_n)^2 = 1 \ .$$

Le point $(b_n/\rho_n, -a_n/\rho_n)$ est sur le cercle unité du plan: il existe donc $\varphi_n \in [0, 2\pi]$ tel que $-a_n/\rho_n = \sin\varphi_n$ et $b_n/\rho_n = \cos\varphi_n$. Cela découle de la définition des fonctions trigonométriques. On a donc

$$\frac{1}{\rho_n} f_n(x) = \cos(2\pi n x)\cos(\varphi_n) - \sin(2\pi n x)\sin(\varphi_n) = \cos(2\pi n x + \varphi_n) \ .$$

. . . .

3) On pose $g = \sup_n |f_n|$. Pour tout $p \in \mathbb{N}$, on pose $A_p = [-p, p] \cap A \cap \{g \leq p\}$. Montrer qu'il existe $p_0 \geq 1$ tel que $0 < \ell(A_{p_0}) < \infty$. En déduire que $\lim_n \int_{A_{p_0}} f_n^2 \, d\ell = 0$.

Solution

Soit $x \in A$. Comme $\lim_n f(x) = 0$, on a $g(x) < \infty$. Donc pour tout $p \geq g(x) \vee |x|$, on a $x \in A_p$. On en déduit donc que $\bigcup_{p \in \mathbb{N}} A_p = A$. De plus $A_p \subset A_{p+1}$, donc

$$\ell(A) = \lim_{p \to \infty} \ell(A_p) \ .$$

Puisque $\ell(A) > 0$, il existe donc p_0 tel que $\ell(A_{p_0}) > 0$. On remarque ensuite que $A_{p_0} \subset [-p_0, p_0]$, donc $\ell(A_{p_0}) \leq 2p_0$ et on a bien $0 < \ell(A_{p_0}) < \infty$.

On remarque ensuite que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 \leq \mathbf{1}_{A_{p_0}} f_n^2 \leq p_0^2 \mathbf{1}_{A_{p_0}} =: h$. Comme h est Lebesgue intégrable (car $\int_{\mathbb{R}} |h| \, d\ell = \int_{\mathbb{R}} h \, d\ell = p_0^2 \ell(A_{p_0}) < \infty$), et comme $\lim_n \mathbf{1}_{A_{p_0}} f_n^2 = 0$, puisque $A_{p_0} \subset A$, le théorème de convergence dominée implique que

$$\lim_{n \to \infty} \int_{A_{p_0}} f_n^2 \, d\ell = \lim_{n \to \infty} \int_{\mathbb{R}} \mathbf{1}_{A_{p_0}} f_n^2 \, d\ell = 0 \ .$$

. . . .

4) Montrer que $\lim_n \int_{A_{p_0}} \big(1 + \cos(4\pi n x + 2\varphi_n)\big) \, \ell(dx) = \ell(A_{p_0})$.

Solution

On a

$$\int_{A_{p_0}} \big(1 + \cos(4\pi n x + 2\varphi_n)\big) \, \ell(dx) = \ell(A_{p_0}) + \int_{\mathbb{R}} \mathbf{1}_{A_{p_0}}(x) \cos(4\pi n x + 2\varphi_n) \, \ell(dx) \ .$$

On peut appliquer le **1**) à la fonction $f = \mathbf{1}_{A_{p_0}}$, car elle est Lebesgue intégrable et cela permet de conclure.

. . . .

5) On rappelle que $\cos(2\theta) = 2\cos^2(\theta) - 1$. Déduire du **3)** et du **4)** que $\lim_{n \to \infty} \rho_n^2 = 0$ et donc que $\lim_n a_n = \lim_n b_n = 0$.

Solution

On a
$$\int_{A_{p_0}} f_n^2\, d\ell = \tfrac{1}{2}\rho_n^2 \int_{A_{p_0}} \big(1+\cos(4\pi n x + 2\varphi_n)\big)\, \ell(dx)\ .$$
Le **4**) implique l'existence de $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq n_0$, on ait
$$\int_{A_{p_0}} f_n^2\, d\ell \geq \tfrac{1}{4}\rho_n^2 \ell(A_{p_0})\ .$$
Par le **3**), $\lim_n \int_{A_{p_0}} f_n^2\, d\ell = 0$, et puisque $\ell(A_{p_0}) > 0$, on en déduit que $\lim_n \rho_n^2 = 0$, ce qui implique évidemment $\lim_n a_n = \lim_n b_n = 0$, car $|a_n| \vee |b_n| \leq \rho_n$.

Exercice III. Soit (E,d), un espace métrique séparable. On note $\mathscr{B}(E)$ la tribu Borélienne. Pour tout $x \in E$ et tout réel $r > 0$, on note $B(x,r) = \{y \in E : d(x,y) < r\}$ la boule ouverte de centre x et de rayon r. Une mesure positive $\mu : \mathscr{B}(E) \to [0,\infty]$ est dite *uniformément répartie* si elle satisfait la condition suivante:
$$\forall x, y \in E,\ \forall r > 0, \qquad 0 < \mu\big(B(x,r)\big) = \mu\big(B(y,r)\big) < \infty\ .$$
On fixe μ et ν, deux mesures uniformément réparties. Pour tout $r > 0$, on pose $g(r) = \mu\big(B(x,r)\big)$ et $h(r) = \nu\big(B(x,r)\big)$. Dans ce qui suit U désigne un ouvert non-vide de E.

1) Montrer que $\big\{(x,y) \in E \times U : d(x,y) < r\big\} \in \mathscr{B}(E) \otimes \mathscr{B}(E)$. Expliquer pourquoi $x \in E \mapsto \nu\big(U \cap B(x,r)\big)$ est $\mathscr{B}(E)$-mesurable.

Solution

La fonctio distance $d : E \times E \to \mathbb{R}_+$ est continue pour la topologie produit sur $E \times E$. Donc $O := \big\{(x,y) \in E \times U : d(x,y) < r\big\}$ est un ouvert de la topologie produit sur $E \times E$. C'est donc un Borélien de cet espace. Comme (E,d) est un métrique séparable, un théorème du cours permet d'affirmer que $\mathscr{B}(E \times E) = \mathscr{B}(E) \otimes \mathscr{B}(E)$. On a donc $O \in \mathscr{B}(E) \otimes \mathscr{B}(E)$. On remarque que la première section en x de O est
$$O_x^1 = \{y \in E : (x,y) \in O\} = U \cap B(x,r)\ .$$
Le théorème d'existence de la mesure produit (ou Fubini positif appliqué à la fonction $\mathbf{1}_O$) permet d'affirmer d'une part que $O_x^1 \in \mathscr{B}(E)$ (mais c'est évident ici) et que $x \mapsto \nu\big(O_x^1\big)$ est $\mathscr{B}(E)$-mesurable, ce qui est bien le résultat désiré.

. . . .

2) Montrer $\int_U \nu(U \cap B(x,r))\, \mu(dx) = \int_U \mu(U \cap B(y,r))\, \nu(dy)$. *Indication: on peut montrer que ces intégrales valent $\mu \otimes \nu(V)$, pour un certain sous-ensemble V de $E \times E$, différent de celui du* **1**).

$\boxed{\textbf{Solution}}$

On pose $V := \big\{(x,y)\in U\times U : d(x,y) < r\big\}$ qui est un ouvert de topologie produit sur $E\times E$, donc dans $\mathscr{B}(E)\otimes\mathscr{B}(E)$ (on raisonne comme à la question précédente). Pour tous $x,y\in U$,

$$V_x^1 = \{y \in E : (x,y) \in V\} = U\cap B(x,r) \quad \text{et} \quad V_y^2 = \{x \in E : (x,y) \in V\} = U\cap B(y,r) .$$

Si $x \notin U$, $V_x^1 = \emptyset$ et si $y \notin U$, $V_y^2 = \emptyset$. Le théorème de Fubini implique alors que

$$\mu\otimes\nu(V) = \int_E \nu\big(V_x^1\big)\,\mu(dx) = \int_U \nu\big(U\cap B(x,r)\big)\,\mu(dx) .$$

De même

$$\mu\otimes\nu(V) = \int_E \mu\big(V_y^2\big)\,\nu(dy) = \int_U \mu\big(U\cap B(y,r)\big)\,\nu(dy) .$$

Finalement,

$$\int_U \nu\big(U\cap B(x,r)\big)\,\mu(dx) = \int_U \mu\big(U\cap B(y,r)\big)\,\nu(dy) .$$

. . . .

3) On suppose que $\nu(U)<\infty$. Montrer que $\mu(U)=\int_U \big(\lim_{r\to 0+}\frac{1}{h(r)}\nu(U\cap B(x,r))\big)\mu(dx)$. À l'aide du **2**), en déduire que

$$\mu(U) \leq \Big(\liminf_{r\to 0+}\frac{g(r)}{h(r)}\Big)\nu(U) .$$

$\boxed{\textbf{Solution}}$

Pour tout $x\in U$, il existe $r_0>0$ tel que pour tout $r<r_0$, $B(x,r)\subset U$ et donc

$$\frac{1}{h(r)}\nu\big(U\cap B(x,r)\big) = \frac{1}{h(r)}\nu\big(B(x,r)\big) = 1 .$$

On a donc bien $\mu(U) = \int_U \big(\lim_{r\to 0+}\frac{1}{h(r)}\nu(U\cap B(x,r))\big)\,\mu(dx)$. Par Fatou on en déduit

$$\mu(U) \leq \liminf_{r\to 0+}\frac{1}{h(r)}\int_U \nu\big(U\cap B(x,r)\big)\,\mu(dx) .$$

La question **2**) implique

$$\mu(U) \leq \liminf_{r\to 0+}\frac{1}{h(r)}\int_U \mu\big(U\cap B(y,r)\big)\,\nu(dy) .$$

Or

$$\int_U \mu\big(U\cap B(y,r)\big)\,\nu(dy) \leq \int_U \mu\big(B(y,r)\big)\,\nu(dy) = g(r)\nu(U) .$$

Comme $\nu(U) < \infty$, on a donc

$$\mu(U) \leq \Big(\liminf_{r\to 0+} \frac{g(r)}{h(r)} \Big) \nu(U) \ .$$

....

4) Montrer qu'il existe un réel $c>0$ tel que $\mu = c\nu$.

Solution

On suppose que $\mu(U)<\infty$ et que $\nu(U)<\infty$. On pose

$$c = \liminf_{r\to 0+} \frac{g(r)}{h(r)} \quad \text{et} \quad d = \limsup_{r\to 0+} \frac{g(r)}{h(r)} \ .$$

La question **3**) implique que $c > 0$ car U est non-vide et donc $\mu(U) > 0$ et car on a supposé que $\nu(U)<\infty$. En interchangeant le rôle de μ et de ν, le raisonnement de la question **3**) implique également que

$$\nu(U) \leq \Big(\liminf_{r\to 0+} \frac{h(r)}{g(r)} \Big) \mu(U) \ .$$

Or $1/d = \liminf_{0+} h/g$ et l'inégalité précédente entraîne que $1/d>0$, ce qui implique que $0<c\leq d<\infty$. On a donc montré que

$$\mu(U) \leq c\nu(U) \leq \frac{c}{d}\mu(U) \leq \mu(U) \ .$$

Comme on a supposé que $\mu(U)<\infty$, on a donc $\mu(U) = c\nu(U)$. Cette égalité est valable pour tout tout ouvert U tel que $\mu(U)<\infty$ et $\nu(U)<\infty$. Soit V, un ouvert quelconque de E. On fixe $x \in E$. Alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\mu\big(V \cap B(x,n)\big) \leq \mu\big(B(x,n)\big) < \infty \quad \text{et} \quad \nu\big(V \cap B(x,n)\big) \leq \nu\big(B(x,n)\big) < \infty \ .$$

Donc pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\mu\big(V \cap B(x,n)\big) = c\nu\big(V \cap B(x,n)\big) \ .$$

Or

$$\mu(V) = \lim_{n\to\infty} \mu\big(V \cap B(x,n)\big) \quad \text{et} \quad \nu(V) = \lim_{n\to\infty} \nu\big(V \cap B(x,n)\big) \ .$$

Donc $\mu(V) = c\nu(V)$. Les mesures μ et $c\nu$ coincident sur le pi-système des ouverts de E et le raisonnement précédent permet d'appliquer le théorème d'unicité du prolongement des mesures et de conclure que $\mu = c\nu$.

....

5) On munit $\mathbb{R}^n$ de la norme Euclidienne canonique $\|\cdot\|$. On note la sphère unité par $S = \big\{x\in\mathbb{R}^n : \|x\| = 1\big\}$. On note $\mathscr{B}(S)$ la tribu Borélienne de S. Soit $\mu : \mathscr{B}(S) \to \mathbb{R}_+$, une mesure positive finie telle que pour toute matrice orthogonale M et tout Borélien B de S, on ait $\mu(B) = \mu(M(B))$. Montrer que μ est un multiple de la mesure de surface de S.

Solution

Si μ est la mesure nulle, le résultat est évident. On suppose μ non-nulle. On munit S de la distance induite par la norme Euclidienne: pour tous $x, y \in S$, $d(x,y) = \|x - y\|$. Alors, (S,d) est un espace métrique compact, donc séparable.

Soient $x, y \in S$. Il existe une matrice orthogonale M telle que $M.x = y$. Il est clair que $M(B(x,r)) = B(y,r)$. Donc

$$\forall x, y \in S,\ \forall r > 0, \qquad \mu\big(B(x,r)\big) = \mu\big(B(y,r)\big) < \infty$$

Pour appliquer les questions précédentes, on montre ensuite que $\mu\big(B(x,r)\big) > 0$, pour tout $r > 0$ et tout $x \in S$: en effet, comme μ est supposée non-nulle, $\mu(S) > 0$; on fixe $r > 0$; S peut être recouvert par un nombre fini de boules ouvertes de rayon r: elles ne peuvent pas être toutes μ-négligeables.

On a donc montré que μ est uniformément répartie. Il est clair que c'est le cas de la mesure de surface. On applique les résultats des questions **1**) à **4**) pour conclure.

Exercice IV. Soit $\mu : \mathscr{B}(\mathbb{R}) \to [0,1]$, une mesure de probabilité, c'est-à-dire que $\mu(\mathbb{R}) = 1$. On note $\widehat{\mu}$ sa transformée de Fourier: pour tout $u \in \mathbb{R}$, $\widehat{\mu}(u) = \int_{\mathbb{R}} e^{iux}\, \mu(dx)$. On suppose qu'il existe $v \neq 0$ tel que $|\widehat{\mu}(v)| = 1$. Montrer qu'il existe $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $\mu(\mathbb{R}\backslash A) = 0$, où $A = \{ak + b\,;\, k \in \mathbb{Z}\}$.

Solution

Il existe $w \in \mathbb{R}$, tel que $\widehat{\mu}(v) = e^{iw}$. On donc

$$1 = \widehat{\mu}(v) e^{-iw} = \int_{\mathbb{R}} e^{i(vx-w)}\, \mu(dx) \quad \text{et} \quad 1 = \int_{\mathbb{R}} \mu(dx)\ .$$

En soustrayant ces deux égalités, on obtient $\int_{\mathbb{R}} \big(1 - e^{i(vx-w)}\big)\, \mu(dx) = 0$. En prenant la partie réelle, on voit que

$$\int_{\mathbb{R}} \big(1 - \cos(vx - w)\big)\, \mu(dx) = 0\ .$$

Or $1 – \cos(vx – w) \geq 0$, pour tout $x \in \mathbb{R}$. Donc, pour μ-presque tout $x \in \mathbb{R}$, $\cos(vx – w) = 1$. On pose $A = \big\{x \in \mathbb{R} : \cos(vx - w) = 1\big\}$, alors $\mu(\mathbb{R}\backslash A) = 0$. Or $x \in A$ ssi il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $vx - w = 2\pi k$. On pose $a = 2\pi/w$ et $b = w/v$ et on vérifie facilement que $A = \{ak + b\,;\, k \in \mathbb{Z}\}$, ce qui permet de conclure.

Exercice V. On note $\|\cdot\|$ la norme Euclidienne canonique de $\mathbb{R}^n$ et ℓ_n la mesure de Lebesgue.

1) On pose $D = \big\{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| \geq 1\big\}$. Pour quels $\alpha \in \mathbb{R}_+$ a-t-on $\int_D \|x\|^{-\alpha}\, \ell_n(dx) < \infty$?

Solution

Par changement de variable radial, il existe une constante c_n strictement positive dépendant uniquement de la dimension n telle que

$$\int_D \|x\|^{-\alpha}\, \ell_n(dx) = c_n \int_1^\infty r^{n-1-\alpha}\, dr\ .$$

On a donc $\int_D \|x\|^{-\alpha}\, \ell_n(dx) < \infty$ ssi $\alpha > n$.

....

2) Pour quels $\beta \in \mathbb{R}_+$ a-t-on $\sum_{p,q\geq 1} (p^2+q^2)^{-\beta} < \infty$?

Solution

On pose $C = [0,1[^2$ et $C_{p,q} = (p,q) + C$, pour tout $(p,q) \in \mathbb{N}^*$. On a

$$\forall x \in C_{p,q}, \quad \frac{1}{((p+1)^2+(q+1)^2)^\beta} \leq \|x\|^{-2\beta} \leq \frac{1}{(p^2+q^2)^\beta}\ .$$

Si on pose $S_\beta = \sum_{p,q\geq 1} \frac{1}{(p^2+q^2)^\beta}$, l'inégalité précédente montre que S_β est finie ssi $\int_{[1,\infty[^2} \|x\|^{-2\beta}\, \ell_2(dx) < \infty$. On pose $D_0 = \{x \in \mathbb{R}_+^2 : \|x\| \geq 1/\sqrt{2}\}$ et $D_1 = \{x \in \mathbb{R}_+^2 : \|x\| \geq 1\}$. On vérifie

$$\int_{D_0} \|x\|^{-2\beta}\, \ell_2(dx) \leq \int_{[1,\infty[^2} \|x\|^{-2\beta}\, \ell_2(dx) \leq \int_{D_1} \|x\|^{-2\beta}\, \ell_2(dx)$$

Or par changement de coordonnées polaires

$$\int_{D_0} \|x\|^{-2\beta}\, \ell_2(dx) = \frac{\pi}{2} \int_{1/\sqrt{2}}^\infty r^{1-2\beta}\, dr \quad \text{et} \quad \int_{D_1} \|x\|^{-2\beta}\, \ell_2(dx) = \frac{\pi}{2} \int_1^\infty r^{1-2\beta}\, dr\ .$$

Donc $S_\beta < \infty$ ssi $\beta > 1$.
