Corrigé du partiel de logique

2011/12

Exercice 1

1. On pose

$$\psi_n(x,y) = (\exists z_0,\ldots,z_n) z_0 = x \wedge z_n = y \wedge \bigwedge_{i<n} R(z_i, z_{i+1}).$$

2. Soient $\Gamma_1, \ldots, \Gamma_N$ une énumérations des tous les graphes connexes sur l'ensemble d'arêtes $\{1,\ldots,n\}$. On note $\Gamma_k = (\{1,\ldots,n\}, R_k)$. L'uplet $\bar{g}$ énumère une composante connexe si et seulement si le graphe induit par Γ sur $\{g_1,\ldots,g_n\}$ est isomorphe à l'un des Γ_k et si aucun autre élément de G n'est relié à un des g_i. Ceci est exprimable par la formule

$$\varphi_n(x_1,\ldots,x_n) = (\forall y)(\bigvee_{r\leq n} R(y,x_r) \to \bigvee_{r\leq n} y = x_r) \wedge \bigvee_{k\leq N} \bigwedge_{r,r'\leq n} R(x_r, x_{r'})^{t(k,r,r')},$$

où $t(k,r,r') = 1$ si $R_n(r,r')$ est vrai et 0 sinon, et où on note $R(x,y)^0 = \neg R(x,y)$ et $R(x,y)^1 = R(x,y)$.

3. L'énoncé suivant est vrai dans un graphe Γ si et seulement si ce graphe contient au moins k composantes connexes de cardinal n:

$$\theta_{k,n} = (\exists x_1^1,\ldots,x_n^1, x_1^2,\ldots,x_n^2, x_1^3,\ldots,x_n^k) \bigwedge_{(r,s)\neq(r',s')} x_r^s \neq x_{r'}^{s'} \wedge \bigwedge_{r\leq k} \varphi_n(x_r^1,\ldots,x_r^n).$$

Si Γ est élémentairement équivalent à Δ, alors soit ces deux graphes satisfont cette formule, soit aucun ne la satisfait. D'où le résultat.

Pour montrer la même chose en remplaçant "au moins" par "au plus", il suffit de remarque que Γ contient au plus k composantes de taille n si et seulement si $\Gamma \models \neg\theta_{k+1,n}$. Cette propriété est donc aussi préservée par élémentaire équivalence.

4. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note K_n le graphe complet sur n sommets. Soit Γ le graphe défini comme l'union disjointe des K_n pour $n \in \mathbb{N}^*$ (sans arêtes supplémentaires entre les différents K_n). Alors Γ n'a que des composantes connexes finies. Par théorème de Löwenheim-Skolem, il existe Γ' de cardinalité $\aleph_1$ tel que $\Gamma \preccurlyeq \Gamma'$. On sait par la question précédente, que Γ' contient exactement une composante connexe de taille n pour tout n, car ceci est vrai dans Γ. L'union de ces composantes connexes forme un graphe dénombrable (qui n'est autre que Γ bien sûr). Comme Γ' n'est pas dénombrable, il existe une composante connexe infinie dans Γ'.

5. Soit $g \in \Gamma'$ un sommet qui n'est pas un point de $\mathbb{Z}$ (qu'on voit comme sous-ensemble de l'univers de Γ'). Supposons que Γ' soit connexe. Il existe alors un chemin $(g_1, \ldots, g_n)$ de sommets de Γ' tel que $g_1 = g$ et $g_n \in \mathbb{Z}$. Prenons un tel chemin avec n minimal. Alors $g_{n-1} \notin \mathbb{Z}$ et (g_{n-1}, g_n) est une arête de Γ'. Soit $t = g_n - 1$ et $t' = g_n + 1$ (vus comme sommets de Γ'). Alors $\Gamma_{\mathbb{Z}} \models (\forall x) R(x, g_n) \to (x = t \vee x = t')$. Comme $\Gamma_{\mathbb{Z}} \prec \Gamma'$, Γ' satisfait ce même énoncé. Donc g_{n-1} est égal à t ou à t', ce qui contredit l'hypothèse que $g_{n-1} \notin \mathbb{Z}$.

6. Soit Γ un graphe de valence finie et Γ' une extension élémentaire propre de Γ. Soit g un sommet de Γ' qui n'est pas dans Γ. Comme dans la question précédente, si Γ' est connexe, on considère un chemin $(g_1, \ldots, g_n)$ de longueur minimale tel que $g_1 = g$ et g_n soit sommet de Γ. Notons $h_1, \ldots, h_m$ les voisins de g_n dans Γ. Alors

$$\Gamma \models (\forall x) R(x, g_n) \to \bigvee_{k \leq m} x = h_m.$$

Par élémentarité, Γ' satisfait cette même formule. Ceci implique que g_{n-1} est l'un des points $h_1, \ldots, h_m$, ce qui contredit l'hypothèse de minimalité du chemin.

7. Soit Γ et Γ' deux graphes comme dans la question précédente. Alors Γ et Γ' sont élémentairement équivalents. L'un est connexe et pas l'autre, donc ni la propriété d'être connexe ni celle de ne pas l'être ne sont axiomatisables.

8. Soit Γ une extension élémentaire de $\Gamma_{\mathbb{Z}}$ de cardinal κ. Le graphe Γ

satisfait l'énoncé

$$(\forall x)(\exists x_1, x_2)(\forall y) x_1 \neq x_2 \wedge R(x, x_1) \wedge R(x, x_2) \wedge (R(x, y) \rightarrow y = x_1 \vee y = x_2)$$

exprimant que tout sommet est de valence 2. Il en va donc de même pour le graphe Γ.

D'autre part, par la question 2, on sait que Γ' n'a aucune composante connexe finie. Soit H une composante connexe de Γ. On sait que tous les sommets de H sont de valence 2 et que H est infinie. Il n'est pas dur de voir que ceci implique que H est isomorphe à $\Gamma_{\mathbb{Z}}$ (construire un isomorphisme en envoyant 0 sur un sommet quelconque de H et en le prolongeant des deux côtés par récurrence). Ainsi Γ' est une union disjointe d'un certain nombre κ' de copies de $\Gamma_{\mathbb{Z}}$. Comme ce dernier graphe est dénombrable, le cardinal de Γ' est $\kappa' \cdot \aleph_0$. On a donc nécessairement $\kappa' = \kappa$ et Γ' est isomorphe à $\Gamma_{\mathbb{Z},\kappa}$.

9. Soit Γ' une extension élémentaire de $\Gamma_{\mathbb{Z},2}$ de cardinal $\aleph_1$. Alors on montre exactement comme dans la question précédente que toutes les composantes connexes de Γ' sont isomorphes à $\Gamma_{\mathbb{Z}}$ (les seules propriétés qu'on a utilisés sur $\Gamma_{\mathbb{Z}}$ sont que tous ses sommets sont de valence 2 et qu'il ne contient pas de composante connexe fini, et ceci est aussi vrai de $\Gamma_{\mathbb{Z},2}$). Ainsi Γ' est isomorphe à $\Gamma_{\mathbb{Z},\aleph_1}$. Par la question précédente avec $\kappa = \aleph_1$, ce dernier graphe est aussi extension élémentaire de $\Gamma_{\mathbb{Z}}$. On a donc $\Gamma_{\mathbb{Z},2} \equiv \Gamma_{\mathbb{Z},\aleph_1} \equiv \Gamma_{\mathbb{Z}}$.

10. Soit κ un cardinal quelconque et soit $\kappa' > \kappa$ un cardinal non dénombrable. Alors le même raisonnement qu'à la question 7, montre que toute extension élémentaire de $\Gamma_{\mathbb{Z},\kappa}$ de cardinal κ' est isomorphe à $\Gamma_{\mathbb{Z},\kappa'}$. Ceci implique que $\Gamma_{\mathbb{Z},\kappa} \equiv \Gamma_{\mathbb{Z},\kappa'} \equiv \Gamma_{\mathbb{Z}}$. Ainsi $\Gamma_{\mathbb{Z},\kappa}$ est modèle de $Th(\Gamma_{\mathbb{Z}})$.

Réciproquement, on a vu en 7. que tout modèle de $Th(\Gamma_{\mathbb{Z}})$ n'a que des composantes connexes infinies, toutes isomorphes à $\Gamma_{\mathbb{Z}}$. Donc les modèles de cette théorie sont exactement les graphes de la forme $\Gamma_{\mathbb{Z},\kappa}$ pour κ un cardinal non nul.

(*) On considère les énoncés suivants, portant sur une structure (G, R):

G la structure (G, R) est un graphe;

Val tout sommet est de valence 2;

$\mathbf{C}_n$, $n \in \mathbb{N}$ il n'existe pas de composante connexe de taille n;

Chacun de ces énoncés est exprimable par une formule du premier ordre. Soit T l'ensemble de ces formules. Il est clair que $\Gamma_{\mathbb{Z}}$ est modèle de T. D'autre part, si $\mathcal{M}$ est un modèle de T de cardinal $\aleph_1$, alors le même raisonnement qu'en 8 montre que $\mathcal{M}$ est isomorphe à $\Gamma_{\mathbb{Z},\aleph_1}$. Comme $\Gamma_{\mathbb{Z},\aleph_1} \equiv \Gamma_{\mathbb{Z}}$, on en conclut que T est une axiomatisation de $\mathrm{Th}(\Gamma_{\mathbb{Z}})$.

Supposons qu'il existe aussi une axiomatisation finie T_0. On a donc $T \vdash T_0$. Alors par compacité, il existe une partie finie $T' \subset T$ telle que $T' \vdash T_0$. Soit $n \in \mathbb{N}$ maximal tel que l'énoncé $\mathbf{C}_n$ soit dans T'. On considère le graphe G_n d'univers $\mathbb{Z}/(n+1)\mathbb{Z}$ où R est définie par $R(a,b)$ si et seulement si $a = b+1$ dans $\mathbb{Z}/(n+1)\mathbb{Z}$ (G_n est un cycle d'ordre $n+1$). Alors G_n satisfait les axiomes $\mathbf{G}$, $\mathbf{Val}$ et $\mathbf{C}_m$ pour $m \leq n$. Donc G_n est modèle de T'. Or on sait que G_n n'est pas modèle de $Th(\Gamma_{\mathbb{Z}})$. Contradiction.

Exercice 2

1. Il est clair que cette fonction est croissante au sens large. D'autre part, il découle immédiatement de la définition qu'on a $\alpha \oplus (\beta+1) = (\alpha \oplus \beta) + 1$. Il s'en suit que si $\beta < \beta'$, alors $\alpha \oplus \beta < \alpha \oplus (\beta + 1) \leq \alpha \oplus \beta'$.

Soit α un ordinal, on montre par récurrence sur β qu'on a $\alpha + \beta \leq \alpha \oplus \beta$. Pour $\beta = 0$, c'est clair. Si $\beta = \gamma + 1$, alors

$$\alpha \oplus (\gamma+1) = (\alpha \oplus \gamma) + 1 \geq (\alpha + \gamma) + 1 = \alpha + (\gamma + 1).$$

Enfin, si β est limite, on a par hypothèse de récurrence $\alpha + \gamma \leq \alpha \oplus \gamma$ pour tout $\gamma < \beta$. Or $\alpha + \beta = \lim_{\gamma<\beta} \alpha + \gamma \leq \lim_{\gamma<\beta} \alpha \oplus \gamma \leq \alpha \oplus \beta$ par croissance de la fonction $\beta \mapsto \alpha \oplus \beta$.

2. (i) $\Rightarrow$ (ii) : Soit $\alpha < \delta$. Il existe λ tel que $\delta = \alpha + \lambda$. On ne peut avoir $\lambda < \delta$ par hypothèse. Donc nécessairement, $\lambda = \delta$.

(ii) $\Rightarrow$ (iii) : Soit α l'ordinal maximal tel que $\omega^\alpha \leq \delta$. Effectuons la division euclidienne de δ par ω^α: $\delta = \omega^\alpha.n + \gamma$, avec $\gamma < \omega^\alpha$. On a aussi $n < \omega$ sinon on aurait $\alpha \geq \omega^{\alpha+1}$, contredisant le choix de α.

Si $\omega^\alpha < \delta$, on a $\omega^\alpha + \delta = \omega^\alpha.(n+1) + \gamma \neq \delta$ par unicité de la division euclidienne. Il s'en suit que $\omega^\alpha = \delta$.

(iii) $\Rightarrow$ (i) : Soient $\beta, \gamma < \delta = \omega^\alpha$.

Alors $\beta+\gamma \leq \beta\oplus\gamma < \omega^\alpha$ car tous les termes qui apparaissent dans les formes normales de Cantor de β et γ ont des exposant $< \alpha$. Donc δ est indécomposable.

3. (a) Supposons que $\delta = \gamma + 1$. Alors on a $\delta = 2^{\gamma+1} = 2^\gamma \cdot 2 \geq \gamma \cdot 2$. Donc $\gamma + 1 \geq \gamma + \gamma$, donc $\gamma \leq 1$. On vérifie que $\gamma \in \{0, 1\}$ ne conviennent pas. Donc δ est bien un ordinal limite.

(*) Comme δ est limite, on peut écrire $\delta = \omega\gamma$. On a alors $\delta = 2^{\omega\gamma} = (2^\omega)^\gamma = \omega^\gamma$. Donc par 2. (iii), δ est indécomposable.

4. On sait que $\sum_{\xi<\beta} \kappa_\xi = \sup_{\xi<\beta}\{|\beta|, \kappa_\xi\}$. Comme la suite $(\alpha_\xi : \xi < \beta)$ est strictement croissante, on a $|\beta| \leq \sup_{\xi<\beta} \kappa_\xi$. Donc $\sum_{\xi<\beta} \kappa_\xi = \sup_{\xi<\beta} \aleph_{\alpha_\xi} = \aleph_\alpha$.

5. Pour tout $\xi < \beta$, on a $\xi + 1 < \beta$ et $\kappa_\xi < \kappa_{\xi+1}$. Par le lemme de König, on a

$$\sum_{\xi<\beta} \kappa_\xi < \prod_{\xi<\beta} \kappa_{\xi+1} \leq \prod_{0<\xi<\beta} \kappa_\xi.$$

Or

$$\prod_{\xi<\beta} \kappa_\xi = \kappa_0 \cdot \prod_{0<\xi<\beta} \kappa_\xi = \prod_{0<\xi<\beta} \kappa_\xi.$$

Ceci prouve donc la première inégalité.

D'autre part, on a pour tout $\xi < \beta$, $\kappa_\xi \leq \sum_{\xi<\beta} \kappa_\xi$. Donc en faisant le produit pour $\xi < \beta$, on a $\prod_{\xi<\beta} \kappa_\xi \leq \left(\sum_{\xi<\beta} \kappa_\xi\right)^{|\beta|}$.

6. La seule chose à montrer est que si $\xi, \nu < \beta$, alors $\xi \oplus \nu < \beta$, l'autre inclusion étant claire. Or ceci a été montré au cours de la preuve de (iii) $\Rightarrow$ (i) de la question 1.

7. Si $\zeta = \omega^{\alpha_1} k_1 + \cdots + \omega^{\alpha_n} k_n$, alors il existe au plus $k_1 \cdots k_n$ couples (ξ, ν) tels que $\xi \oplus \nu = \zeta$. Ainsi le produit considéré n'a qu'un nombre fini de facteurs. Il s'en suit qu'il est égal au plus grand de ces facteurs. On a donc

$$\prod_{\xi\oplus\eta=\zeta} \kappa_{\tau_{\xi,\eta}} = \sup_{\xi\oplus\eta=\zeta} \kappa_\xi = \kappa_\zeta,$$

correspondant au couple $(\xi, \eta) = (\zeta, 0)$.

8. On a:

$$\begin{aligned}
\left(\prod_{\xi<\beta}\kappa_\xi\right)^{|\beta|} &= \prod_{\xi<\beta}\kappa_\xi^{|\beta|}\\
&= \prod_{\xi<\beta}\prod_{\eta<\beta}\kappa_{\tau_{\xi,\eta}}\\
&= \prod_{\zeta<\beta}\prod_{\xi\oplus\eta=\zeta}\kappa_{\tau_{\xi,\eta}}\\
&= \prod_{\zeta<\beta}\kappa_\zeta.
\end{aligned}$$

9. Par la question 5, on sait que $\prod_{\xi<\beta}\kappa_\xi \leq \left(\sum_{\xi<\beta}\kappa_\xi\right)^{|\beta|} = (\aleph_\alpha)^{|\beta|}$. D'autre part $(\aleph_\alpha)^{|\beta|} \leq \left(\prod_{\xi<\beta}\kappa_\xi\right)^{|\beta|}$. Donc en utilisant la question précédente, on a bien $\prod_{\xi<\beta}\kappa_\xi = \aleph_\alpha^{|\beta|}$.

10. a) On a $\aleph_\alpha^{|\beta|} \leq 2^{\aleph_\alpha\cdot|\beta|} \leq 2^{\aleph_\alpha}$.

b) En utilisant la question 5, on a $\aleph_{\alpha+1} \leq \prod_{\xi<\beta}\kappa_\xi \leq \aleph_\alpha^{|\beta|} \leq \aleph_{\alpha+1}$. D'où l'égalité.