Partiel du Cours de logique — Correction

2012-13

Exercice 1 (Ordinaux et cardinaux)

1.a) Soit (Γ, Δ) une coupure du bon ordre $\langle I; < \rangle$. On a ou bien $\Delta = \emptyset$ et alors $(\Gamma, \Delta) = (I, \emptyset)$, ou bien Δ contient un élément minimal δ, car il s'agit d'un bon ordre. Il est alors clair que $(\Gamma, \Delta) = (\Gamma_{<\delta}, \Delta_{\geq\delta}$, où $\Gamma_{<\delta} = \{i \in I \mid i < \delta\}$ et $\Delta_{\geq\delta} = \{i \in I \mid \delta \leq i\}$. Réciproquement, $(I, \emptyset)$ ainsi que, pour tout $\delta \in I$, la partition (Γ, Δ) définissent bien des coupures qui sont 2-à-2 distinctes, et alors $C(I)$ est en bijection avec l'ensemble $I \cup \{I\}$, d'où $\mathrm{card}(C(I)) = 1 + \mathrm{card}(I)$.

1.b) Soit $I = 1 + \aleph_2^* + \aleph_1 + \aleph_0^* + \aleph_\omega$, où $+$ désigne la somme d'ensembles ordonnés et α^* l'ordre inverse sur α, c'est-à-dire, pour $x, y \in \alpha$, on a $x <_{\alpha^*} y$ ssi $x >_\alpha y$. On pose $\Gamma_1 = 1$, $\Delta_1 = \aleph_2^* + \aleph_1 + \aleph_0^* + \aleph_\omega$, $\Gamma_2 = 1 + \aleph_2^* + \aleph_1$ et $\Delta_2 = \aleph_0^* + \aleph_\omega$.
Il est clair que $\mathrm{card}(I) = \aleph_\omega$. Notons que la coinitialité de α^* est égale à $\mathrm{cof}(\alpha)$. De plus, si $\alpha \neq \emptyset$, on a $\mathrm{cof}(\beta + \alpha) = \mathrm{cof}(\alpha)$. En utilisant ces observations, on obtient $\mathrm{cof}(\Gamma_1, \Delta_1) = (\mathrm{cof}(1), \mathrm{cof}(\aleph_2)) = (1, \aleph_2)$ ainsi que $\mathrm{cof}(\Gamma_2, \Delta_2) = (\mathrm{cof}(\aleph_0), \mathrm{cof}(\aleph_1)) = (\aleph_0, \aleph_1)$. (On a utilisé ici la régularité de 1 et de $\aleph_n$, pour $n \in \omega$).

1.c) Nécesairement, on a $\mu \geq \kappa + \lambda$, et κ, λ sont deux cardinaux réguliers. Réciproquement, si $\mu = 0$, $\kappa = \lambda = 0$ est possible. Si $\mu > 0$, on voit sans problème que toute paire de cardinaux réguliers κ, λ avec $0 < \kappa + \lambda \leq \mu$ est possible. En effet, pour μ fini cela se montre à la main, et pour μ infini, si $\kappa = 0$ on prend $I = \lambda^* + \mu$, de même $\mu + \kappa$ si $\lambda = 0$. Sinon, l'ensemble ordonné $I = \kappa + \lambda^* + \mu$ convient. (Ici, on utilise que $\mathrm{card}(\mu + \nu) = \max\{\mu, \nu\}$ si μ et ν sont deux cardinaux dont au moins un est infini.)

2.a) La suite constante à 0 est minimale dans κ^λ et se trouve dans $\kappa^{<\lambda}$, ce qui donne la coinitialité de $\kappa^{<\lambda}$ dans κ^λ. Soit $a = (a_i)_{i\in\lambda} \in \kappa^\lambda$ donné. Comme κ est un cardinal infini, c'est un ordinal limite, et $a_0 + 1 \in \kappa$. La suite $b = (b_i)_{i\in\lambda}$ définie par $b_0 = a_0 + 1$, $b_i = 0$ pour $i > 0$ est donc dans $\kappa^{<\lambda}$, et on a $a < b$. Cela montre la cofinalité de $\kappa^{<\lambda}$ dans κ^λ.
Finalement, on suppose que $a < b < c$ pour $a = (a_i)_{i\in\lambda}, b = (b_i)_{i\in\lambda}, c = (c_i)_{i\in\lambda} \in \kappa^\lambda$. Soit $i \in \lambda$ minimal tel que $a_i \neq b_i$, et $j \in \lambda$ minimal tel que $b_j \neq c_j$. On pose $k := \max\{i, j\}$, et on définit $d = (d_i)_{i\in\lambda}$ via $d_i := b_i$ pour $i \leq k$, et $d_i := 0$ pour $i > k$. Par définition de l'ordre, on a alors $a < d \leq b < c$. Comme $d \in \kappa^{<\lambda}$, on conclut.

2.b) Soit $\lambda' = \mathrm{cof}(\lambda)$. Nous allons montrer que si (Γ, Δ) est la coupure induite par $a \in \kappa^\lambda \setminus \kappa^{<\lambda}$ (dans $\kappa^{<\lambda}$), alors $\mathrm{cof}(\Gamma, \Delta) = (\lambda', \lambda')$.
Pour $i \in \lambda$, on définit $g^i, d^i \in \kappa^{<\lambda}$ comme suit. On pose $g^i_j = d^i_j = a_j$ pour $j < i$, $g^i_i = a_i$, $d^i_i = a_i + 1$, et enfin $g^i_j = d^i_j = 0$ pour $j > i$. Il est clair que la suite $(g^i)_{i<\lambda}$ est croissante et cofinale dans Γ ; de même, la suite $(d^i)_{i<\lambda}$ est décroissante et co-initiale dans Δ.
On choisit une fonction croissante cofinale $f : \lambda' \to \lambda$. Alors la suite $(g^{f(i)})_{i<\lambda'}$ est cofinale dans Γ ; de même, $(d^{f(i)})_{i<\lambda'}$ est co-initiale dans Δ. Réciproquement, supposons que $C \subseteq \Gamma$ soit cofinal, avec $\mathrm{card}(C) = \mu$. On choisit une bijection $h : \mu \to C$, et on définit une application $h' : \mu \to \lambda$ comme suit : pour $\alpha < \mu$, $h'(\alpha)$ est le plus petit $i < \lambda$ tel que $h(\alpha) \leq g^i$. Un tel i existe car $(g^i)_{i<\lambda}$ est cofinale. De plus, comme $\mathrm{im}(h) = C$ est cofinale dans Γ, il s'en suit que h' est cofinale, d'où $\mu \geq \lambda'$. On fait un argument similaire pour Δ, ce qui permet de conclure.

3.a) Soit $\lambda := \min\{\mu \leq \kappa \mid \kappa^\mu > \kappa\}$. Comme $\kappa^\kappa \geq 2^\kappa > \kappa$ par le théorème de Cantor, un tel λ existe. Par le théorème de Hesseberg, on a $\mathrm{card}(\kappa^n) = \kappa$ pour tout $1 \leq n < \aleph_0$, et λ est donc un cardinal infini. On considère κ^λ et $\kappa^{<\lambda}$ comme dans la partie 2). Par 2.a), $\kappa^{<\lambda}$ est dense dans κ^λ qui est de cardinal $> \kappa$ par définition de λ. On a $\kappa^\lambda = \bigcup_{\alpha\in\lambda} \kappa^\alpha$, d'où $\mathrm{card}(\kappa^{<\lambda}) = \sup\{\mathrm{card}(\lambda), \mathrm{card}(\kappa^\alpha) \mid \alpha < \lambda\} = \kappa$, par minimalité de λ. On conclut que $\mathrm{Ded}(\kappa) \geq \kappa^\lambda > \kappa$, autrement dit que $\mathrm{Ded}(\kappa) \geq \kappa^+$.

3.b) Si $\langle I;<\rangle$ avec I fini, et si A est dense dans I, alors $A = I$ nécessairement. De plus, il s'agit d'un bon ordre dans ce cas, et 1.a) donne $\mathrm{card}(I) = \mathrm{card}(A) < 1 + \mathrm{card}(A) = \mathrm{card}(C(A))$. On suppose maintenant que I est infini (donc A aussi), et on considère l'application $c : I \to C(A)$ qui à i associe $(\Gamma_{<i}, \Delta_{\geq i})$, avec $\Gamma_{<i} = \{a \in A \mid a < i\}$ et $\Delta_{\geq i} = \{a \in A \mid i \leq a\}$. Montrons que si $i < j < k$ sont trois éléments distincts de I, on a $c(i) \neq c(k)$. En effet, par densité de A dans I, il existe $a \in A$ tel que $i < a < k$, et donc $a \in \Delta_{\geq i}$ et $a \notin \Delta_{\geq k}$. Cela montre que pour toute coupure (Γ, Δ) de A, $\mathrm{card}(c^{-1}(\Delta, \Gamma)) \leq 2$. On en déduit que $\mathrm{card}(C(A)) = 2\,\mathrm{card}(C(A)) \geq \mathrm{card}(I)$.

[Notons que c n'est pas nécessairement injective, comme le montre l'exemple suivant : $I = \omega + 1 + 1 + \omega^* \supseteq \omega + \omega^* = A$. Alors A est dense dans I, et les deux éléments de $I \setminus A$ induisent la même coupure dans A.]

3.c) Soit $A \subseteq I$, avec A dense dans I et $\mathrm{card}(A) = \kappa$. Par 3.b) on a $\mathrm{card}(I) \leq \mathrm{card}(C(A)) \leq \mathrm{card}(2^\kappa)$. La dernière inégalité suit du fait que l'application qui à une coupure (Γ, Δ) associe $\Gamma \in \mathcal{P}(A)$ est injective.
On a donc bien $\mathrm{Ded}(\kappa) \leq 2^\kappa$, et en particulier $\mathrm{Ded}(\kappa)$ existe. (On utilise aussi que le supremum d'une partie non-vide de cardinaux tous $\leq 2^\kappa$ est un cardinal $\leq 2^\kappa$.)

3.d) La partie $\mathbb{Q}$ est dense dans $\langle \mathbb{R};<\rangle$, et donc $\mathrm{Ded}(\aleph_0) \geq \mathrm{card}(\mathbb{R}) = 2^{\aleph_0}$. On conclut par la partie précédente.

3.e) Par induction sur ω, on définit une suite de cardinaux infinis $(\kappa_n)_{n\in\omega}$ comme suit : $\kappa_0 := \aleph_0$, et $\kappa_{n+1} := 2^{\kappa_n}$. Le cardinal $\kappa = \sup\{\kappa_n \mid n \in \omega\}$ est de cofinalité ω, car $n \mapsto \kappa_n$ est une suite cofinale dans κ. Par ailleurs, $\kappa > \aleph_0$, et donc $\kappa = \aleph_\alpha$ pour un ordinal α limite, car κ est singulier. Pour tout $\beta < \alpha$, on a $\aleph_\beta \leq \kappa_n$ pour un $n \in \omega$, d'où $2^{\aleph_\beta} \leq \kappa_{n+1} < \kappa$. Il s'en suit que $\sup\{\mathrm{Ded}(\aleph_\beta)\} \leq \kappa$ (cela utilise la partie 3.c)). Par ailleurs, on a $\mathrm{Ded}(\kappa) > \kappa$ par 3.a), ce qui permet de conclure.

Exercice 2 (Ordinaux et cardinaux)

1) La théorie T des graphes aléatoires est donnée par les axiomes suivants :

(a) L'antiréflexivité et la symétrie de R : $\forall x\ \neg xRx \wedge \forall x \forall y\ \ (xRy \to yRx)$,

(b) Un schéma d'axiomes, indexé par n et $m \in \mathbb{N}$ pour le caractère aléatoire :

$$\forall x_1 \ldots \forall x_n \forall y_1 \ldots \forall y_m \left(\bigwedge_{i,j} \neg x_i = y_j \to \exists z [\bigwedge_i zRx_i \bigwedge_j \neg zRy_j] \right)$$

On peut remarquer que le caractère aléatoire tel qu'énoncé dans le sujet implique qu'il existe un tel z qui ne soit pas dans $S_1 \cup S_2$. En effet, soit t qui et relié à tous les points de $S_1 \cup S_2$ et z qui est relié aux points de S_1 mais pas à $S_2 \cup \{t\}$. Ce z ne peut alors pas être dans $S_1 \cup S_2$ sinon il serait relié à t. On aurait donc aussi pu prendre comme axiome :

$$\forall x_1 \ldots \forall x_n \forall y_1 \ldots \forall y_m \bigwedge_{i,j} \neg x_i = y_j \to [\exists z \bigwedge_i \neg z = x_i \bigwedge_j \neg z = y_j \bigwedge_i zRx_i \bigwedge_j \neg zRy_j]$$

2) Soit $\mathcal{G}$ un graphe au plus dénombrable. On peut remarquer que l'ensemble des parties finies de G, noté $\mathfrak{P}^f(G)$, est lui aussi un ensemble au plus dénombrable car $\bigcup_n G^n$ se surjecte sur cet ensemble. On muni alors $G' = G \sqcup \mathfrak{P}^f(G)$ d'une structure de graphe en posant :

1. Pour tout $x,\ y \in G$, $xR^{\mathcal{G}'}y$ si et seulement si $xR^{\mathcal{G}}y$,
2. Pour tout $x \in G$ et $y \in \mathfrak{P}^f(G)$, $xR^{\mathcal{G}'}y$ si et seulement si $yR^{\mathcal{G}'}x$ si et seulement si $x \in y$.

Il est alors évident que $\mathcal{G}$ est un sous-graphe de $\mathcal{G}'$ qui est bien au plus dénombrable et pour tout S_1, S_2 finis disjoints inclus dans G, le point S_1 de G' n'est relié qu'au points de S_1 et donc, a fortiori, pas à ceux de S_2. On pose alors $\mathcal{G}_0 = \mathcal{G}$, $\mathcal{G}_{n+1} = \mathcal{G}'_n$ et $\mathcal{H} = \bigcup_n \mathcal{G}_n$. $\mathcal{H}$ est un surgraphe de $\mathcal{G}$ et si S_1 et S_2 sont finis disjoints inclus dans H, il existe n tel qu'ils sont inclus dans G_n et il existe donc $s \in G_{n+1}$ qui soit relié à tous les points de S_1 et à aucun point de S_2 (et tel qu'on ait même $s \notin S_1 \cup S_2$).

On peut d'ailleurs vérifier que $|H| = \aleph_0$ (même si le graphe de départ $\mathcal{G}$ est fini car $G_{n+1} \setminus G_n \neq \emptyset$). Il s'en suit donc bien que T a des modèles dénombrables et qu'elle est donc consistante.
3) Tout d'abord, K est non vide, en effet, comme R est anti-réflexive et qu'il n'y a pas de fonctions dans le langage (et donc que tout sous-ensemble de sommet muni de la structure induite est un sous-graphe), pour tout $g \in G$ et $h \in H$, l'application $g \mapsto h$ est bien un isomorphisme partiel.
Soit maintenant $f : \mathcal{G} \to \mathcal{H}$ un isomorphisme partiel de domaine fini S et $g \in G$. Si $g \in S$ il n'y a rien à faire. Si $g \notin S$, on note $S_1 = \{s \in S \mid sRg\}$ et $S_2 = \{s \in S \mid \neg sRg\} = S \setminus S_1$. Comme ces deux ensembles sont finis et disjoints, c'est aussi le cas de $f(S_1)$ et de $f(S_2)$. Par le caractère aléatoire de $\mathcal{H}$, on trouve alors $h \in H$ qui soit relié à tous les points de $f(S_1)$ et à aucun de $f(S_2)$. Par la version un peu plus forte de l'axiome, on peut d'ailleurs supposer que $h \notin f(S_1) \cup f(S_2) = \mathrm{Im}(f)$. Il est alors facile de montrer que f' définie par :

$$\begin{cases} \mathcal{G} & \to & \mathcal{H} \\ s \in S & \mapsto & f(s) \\ g & \mapsto & h \end{cases}$$

est un isomorphisme partiel.
La dernière propriété à démontrer se déduit du cas précédent par symmétrie, on veut maintenant agrandir le domaine de f^{-1} isomorphisme partiel de $\mathcal{H}$ dans $\mathcal{G}$.
4) Soit $\mathcal{G}$ et $\mathcal{H}$ deux graphes aléatoire, A un sous-graphe commun et $\varphi[x, \overline{a}]$ une formule où $\overline{a} \in A$. Par un théorème du cours, il suffit de montrer que $\mathcal{G} \models \exists x \varphi[x, \overline{a}]$ implique $\mathcal{H} \models \exists x \varphi[x, \overline{a}]$. Soit alors $g \in G$ tel que $\mathcal{G} \models \varphi[g, \overline{a}]$. L'identité sur A est un isomorphisme partiel de domaine fini de $\mathcal{G}$ and $\mathcal{H}$ et il suit donc de la propriété du va qu'il existe un isomorphisme f' qui étend id_A et dont le domaine contient g. On a alors $\mathcal{H} \models \varphi[f'(g), f'(\overline{a})]$, i.e. $\mathcal{H} \models \varphi[f'(g), \overline{a}]$.
5) Posons $G = \{g_i \mid i \in \mathbb{N}\}$ et $H = \{h_i \mid i \in \mathbb{N}\}$ deux énumérations de G et H. On construit alors par récurrence une suite d'isomorphismes partiels f_i de domaine fini tel que le domaine de f_{2i} contient g_i et l'image de f_{2i+1} contient h_i et f_i étend f_j si $i \geq j$.
On pose f_{-1} un isomorphisme partiel de domaine fini quelconque entre $\mathcal{G}$ et $\mathcal{H}$ (qui existe par la question précédente). Si f_{2i-1} est construit, on pose f_{2i} qui l'étend et donc le domaine contient g_i (qui existe par le va) et si f_{2i} est construit, on pose f_{2i+1} qui l'étend et donc l'image contient h_i (qui existe par le vient).
On pose alors $f = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} f_n$ qui est bien un isomorphisme partiel. Son domaine contient tout G et son image tout H, c'est donc bien un isomorphisme de $\mathcal{G}$ dans $\mathcal{H}$.
6) Il y avait plusieurs façons de résoudre cette question. La première consiste à voir que T n'a que des modèles infinis. En effet si $\mathcal{G} \models T$ est fini, alors, par la deuxième version de l'axiome, il existe un point de G qui n'est pas dans G, ce qui est absurde.
Par Löwenheim-Skolem descendant si $\mathcal{G}$ et $\mathcal{H} \models T$, il existe $\mathcal{G}_0 \preccurlyeq \mathcal{G}$ et $\mathcal{H}_0 \preccurlyeq \mathcal{H}$ dénombrables. Mais comme T est $\aleph_0$-catégorique, $\mathcal{G}_0$ et $\mathcal{H}_0$ sont isomorphes. Il s'en suit donc que $\mathcal{G} \equiv \mathcal{G}_0 \equiv \mathcal{H}_0 \equiv \mathcal{H}$ et donc que T est complète.
L'autre méthode consiste à dire que si $\mathcal{G}$ et $\mathcal{H} \models T$, comme on l'a vu $g \mapsto h$ pour $g \in G$ et $h \in H$ quelconques est un isomorphisme partiel. Quitte à identifier ces deux points, on a donc une sous-structure A commune à $\mathcal{G}$ et $\mathcal{H}$. Par élimination des quantificateurs, tout énoncé φ est équivalent à une formule $\psi[a]$ avec $a \in A$ sans quantificateurs qui est vraie dans $\mathcal{G}$ si et seulement si elle est vraie dans A, si et seulement si elle est vraie dans $\mathcal{H}$.
7) Soit $\mathcal{L}'$ le langage $\mathcal{L}_G$ auquel on rajoute une constante h_P par partie de G et T' la théorie $T \cup \{gRh_P \mid g \in P\} \cup \{\neg gRh_P \mid g \notin P\}$. Soit $T_0 \subset T$ finie. On a alors $T_0 \subset T \cup \{gRh_{P_i} \mid g \in S_1^i\} \cup \{\neg gRh_{P_i} \mid g \in S_2^i\}$ où $S_1^i \subseteq P_i$ est fini, et de même $S_2^i \subseteq P_i^c$ (le complémentaire de P_i) est fini. On a donc bien S_1^i et S_2^i finis disjoints. Il existe donc $g_i \in G$ tel que g_i soit relié aux points de S_1^i et pas à ceux de S_2^i. La structure où h_{P_i} est interprétée par g_i est donc un modèle de T_0. Il s'en suit donc que T est finiment consistante donc consistante. De plus $|\mathcal{L}'| = 2^{|G|}$ et tout modèle de T' est au moins de cardinal $2^{|G|}$ (car les h_P sont forcément distincts). Par Löwenheim-Skolem descendant, il existe donc $\mathcal{H} \models T'$ de cardinal $2^{|G|}$.
La totalité des copies où cette question a été traitée contenait une autre preuve (que je trouve moins bien parce que plus ad-hoc) : construire un graphe $\mathcal{H}_0$ qui contient les nouveaux points h_P tels qu'on les veut (et voir que $\mathcal{H}$ est alors de cardinal $2^{|G|}$ et ensuite appliquer l'argument de chaîne de la question 1 pour obtenir un sur-graphe $\mathcal{H} \models T$ qui est lui aussi de cardinal $2^{|G|}$.

8) On peut remarquer que dans la question 3 lorsqu'on prouve que K est non vide est lorsqu'on prouve le va, on n'utilise pas que $\mathcal{G}$ est aléatoire (juste que c'est un graphe). Il s'en suit donc que l'argument de la question 5 (en enlevant les étapes où on étend l'image) nous montre que tout graphe au plus dénombrbale se plonge dans $\mathcal{G}$, en particulier c'est vrai pour les graphes finis.
Une autre preuve que j'ai trouvée dans les copies et que j'ai bien aimée est qu'on peut aussi remarquer que tout graphe fini $\mathcal{H}$ se plonge dans un graphe aléatoire (dénombrable) $\mathcal{H}_0$ comme montré à la question 1. Par le théorème de Lowenheim-Skolemn descendant il existe $\mathcal{G}_0 \models T$ dénombrable qui se plonge dans $\mathcal{G}$. Mais comme $\mathcal{G}_0 \simeq \mathcal{H}_0$, on obtient bien un plongement de $\mathcal{H}$ dans $\mathcal{G}$.