Correction du Td n° 1 d'Analyse fonctionnelle

Un peu de topologie

Séance du 15 février 2013

Solution 1. *Equivalence de définitions des evtlcs*

1. Soit E un evtlc séparé, dont la topologie est donnée par une famille dénombrable et séparante de semi-normes $(p_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$. Posons

$$d(x,y)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}\min(1,p_n(x-y)).$$

On vérifie aisément que d est une distance. Montrons qu'elle engendre la topologie de E. Soit $B_d(0,r)$ une boule pour la distance d. Soit N tel que $\frac{1}{2^N}<\frac{r}{2}$. Alors

$$\cap_{n\leq N}\{x,p_n(x)<\frac{r}{2}\}\subset B_d(0,r).$$

Inversement, si on considère la semi-boule $\{x,p_j(x)<r\}$, avec $r<1$, alors elle contient la boule $B_d(0,\frac{r}{2^j})$.

Soit maintenant E un evtlcs métrisable et $B(0,1/n)$ la boule de centre 0 et de rayon $1/n$ pour tout $n\geq 1$. Alors comme $B(0,1/n)$ est un voisinage de 0 et que E est un evtlc, il existe un voisinage ouvert, convexe et symétrique de 0, noté U_n, tel que $U_n\subset B(0,1/n)$. Soit p_n la jauge du convexe U_n. C'est une semi-norme.

Montrons que $(p_n)_n$ est séparante. Supposons que $p_n(x)=0$ pour tout n. Alors $x\in U_n\subset B(0,1/n)$ pour tout n et donc $x=0$. Donc $(p_n)_n$ est séparante.

Montrons enfin que $(p_n)_n$ engendre la topologie de E. Soit V une voisinage de 0. Comme E est métrisable, il existe n tel que $B(0,1/n)\subset V$. Alors

$$\{x,\ p_n(x)<1\}=U_n\subset B(0,1/n)\subset V.$$

Réciproquement, pour tout N et $\epsilon_1,...,\epsilon_N>0$,

$$\cap_{n=1}^{N}\{x,\ p_n(x)<\epsilon_n\}=\cap_{n=1}^{N}\epsilon_nU_n,$$

qui est bien un ouvert de la topologie de E par continuité de la multiplication par un scalaire.

2. i) $\rightarrow$ ii) Si E est normable, alors les boules sont clairement des voisinages convexes et bornés.

ii) $\rightarrow$ iii) Soit A un voisinage convexe, ouvert, borné et symétrique de 0. Soit p sa jauge. Il s'agit d'une norme. En effet, si $p(x)=0$, alors pour tout $t\in\mathbb{R}$, $x\in tA$. Or, comme A est borné, pour tout U voisinage de 0, il existe λ tel que $A\subset\lambda U$, donc $x\in U$. Comme E est séparé, on en déduit que $x=0$.

Montrons que p engendre la topologie de E. Soit V un voisinage de 0. Comme A est borné, il existe $t>0$ tel que $A\subset tV$. Donc

$$\{x,\ p(x)<\frac{1}{t}\}\subset V.$$

Réciproquement, pour tout $\epsilon > 0$, $\{x,\ p(x) < \epsilon\} = \epsilon A$ qui est bien un ouvert de la topologie de E.

iii) $\to$ i) Soit $p_1, ..., p_N$ la famille de semi-normes. Alors $N = \sum_{i=1}^N p_i$ est bien une norme. Il est facile de vérifier qu'elle engendre la topologie de E.

⋆

Solution 2. *L'espace* $\mathcal{C}^k(\Omega)$

1. Pour montrer que cet espace de fonctions est métrisable, il suffit de montrer que l'on peut se contenter d'un nombre dénombrable de semi normes. Il est classique qu'il existe une suite croissante K_n de compact de Ω telle que $\bigcup_n K_n = \Omega$ (on peut meme demander que K_n soit inclus dans l'intérieur de K_{n+1} : par exemple, soit x_n une suite dense dans Ω, et ε_n tel que $B(x_n, \varepsilon_n) \subset \Omega$ (boule ouverte). Alors la suite

$$K_n = \bigcup_{k \leq n} \bar{B}(x_n, (1 - 1/n)\varepsilon_n)$$

convient). Ensuite, il suffit de considérer les normes :

$$\|f\|_n = \sum_{\alpha : |\alpha| \leq \min\{n,k\}} \|f\|_{\alpha, K_n}.$$

La distance que l'on considère est alors

$$d(f, g) = \sum_n 2^{-n} \min\{\|f - g\|_n, 1\}.$$

Si f_k est une suite de Cauchy pour d, on a que pour tout n, f_k est une suite de Cauchy pour $\|\,.\,\|_n$: l'espace $C^{\min\{n,k\}}(K_n)$ étant complet pour $\|\cdot\|_n$, on en déduit que $f_k|_{K_n} \to g_n$ dans $C^{\min\{n,k\}}(K_n)$. Par restriction, on voit alors que $g_{n+1}|_{K_n} = g_n$, et on note g la fonction telle que $g|_{K_n} = g_n$ (ce qui est possible vu la condition de compatibilité précédente). Il est alors évident que $g \in C^k(\Omega)$, et que $\|f_k - g\|_n \to 0$ quand $k \to \infty$: ainsi vu la définition de la distance, $d(f_k, g) \to 0$, et d est une métrique complète.

Remarque : Si f_n est de Cauchy dans $\mathcal{C}^1(K)$. Alors f_n et f_n' sont de Cauchy dans $C^0(K)$, donc il existe $f, g \in C^0(K)$ telles que $f_n \longrightarrow f$ et $f_n' \longrightarrow g$. Soit $\varepsilon > 0$. Il existe n tel que

$$\forall k \geq n, \quad \|f_n - f_k\| + \|f_n' - f_k'\| \leq \varepsilon.$$

On écrit

$$\begin{aligned}\Big|\frac{f(x+h) - f(x)}{h} - g(x)\Big| \leq &\Big|\frac{((f(x) - f_n(x)) - (f(x+h) - f_n(x+h))}{h}\Big| \\ &+ \Big|\frac{f_n(x+h) - f_n(x)}{h} - f_n'(x)\Big| + |f_n'(x) - g(x)|.\end{aligned}$$

Soit h tel que

$$\Big|\frac{f_n(x+h) - f_n(x)}{h} - f_n'(x)\Big| \leq \varepsilon,$$

On écrit, pour $k \geq n$

$$\begin{aligned}\Big|\frac{f(x+h) - f(x)}{h} - g(x)\Big| \leq &\Big|\frac{((f_k(x) - f_n(x)) - (f_k(x+h) - f_n(x+h))}{h}\Big| \\ &+ \Big|\frac{f_k(x+h) - f(x+h)}{h}\Big| + \Big|\frac{f_k(x) - f(x)}{h}\Big| + 2\varepsilon \\ \leq &\|f_k' - f_n'\| + \frac{2}{h}\|f_k - f\| + 2\varepsilon,\end{aligned}$$

et il suffit alors de choisir k tel que $\|f_k - f\| \leq \frac{\varepsilon}{h}$.

2. Soit $N \in \mathbb{N}$ tel que $2^{-N} < \varepsilon$, et $f \in C^\infty(\Omega)$ à support dans $K_{N+2} \setminus \mathring{K}_{N+1}$ (c'est possible : on choisit $x_0 \in \mathring{K}_{N+2} \setminus K_{N+1}$, alors $B(x_0, \varepsilon_0) \subset K_{N+2} \setminus \mathring{K}_{N+1}$ pour $\varepsilon_0 > 0$ assez petit, et une fonction radiale régulière à support dans $B(x_0, \varepsilon_0)$). Alors $f|_{K_N} = 0$ et donc pour $n \leq N$, $\|\lambda f\|_n = 0$. Ainsi,

$$d(\lambda f, 0) \leq \sum_{n=1}^{N} 2^{-n} \|\lambda f\|_n + \sum_{n>N} 2^{-n} \leq 2^{-N} < \varepsilon.$$

3. Soit $\|\cdot\|$ une norme induisant la meme topologie. $\{g | \|g\| < 1\}$ est un ouvert et contient 0, donc il existe $\varepsilon > 0$ tel que $\{g | d(g, 0) < \varepsilon\} \subset \{g | \|g\| < 1\}$. En particulier, pour tout λ, $\|\lambda f\| < 1$ et ainsi $\|f\| = 0$, ce qui contredit que f est non nulle.

4. $E = C^0_c(\Omega)$ est un espace métrisable avec la meme suite de semi-normes que $C^0(\Omega)$: $\|\cdot\|_{0,K_n}$. On écrit $E = \cup_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{C}^0(K_n)$, où $(K_n)_n$ est une suite de compact exhaustive pour Ω et $\mathcal{C}^0(K_n)$ est l'ensemble des fonctions continues à support dans K_n. Alors $\mathcal{C}^0(K_n)$ est un sous-ensemble fermé de E d'intérieur vide. En effet, s'il existe une f continue à support dans K_n et un $\epsilon > 0$ tel que $B(f, \epsilon) \subset \mathcal{C}^0(K_n)$, alors $B(0, \epsilon) \subset \mathcal{C}^0(K_n)$ puis pour tout $g \in \mathcal{C}^0_c(\Omega)$, il existe α assez petit telle que $\alpha g \in B(0, \epsilon) \subset \mathcal{C}^0(K_n)$ i.e. $Supp(g) \subset K_n$ ce qui est contradictoire. Donc d'après le lemme de Baire, si E est complet, alors il est vide, ce qui est contradictoire.

⋆

Solution 3. *Théorème de Riesz*

1. Soit U un voisinage compact de 0. Alors $\frac{1}{2}U$ est encore un voisinage de 0 par continuité de la multiplication scalaire, puis

$$U \subset \cup_{x \in U}(x + \frac{1}{2}U).$$

Comme U est compact, on peut extraire un sous recouvrement

$$U \subset \cup_{i=1}^{N}(x_i + \frac{1}{2}U),\ x_i \in U.$$

Montrons que $U \subset \mathcal{W} = Vect(x_1, ..., x_N)$, ce qui suffirait à conclure puisque U est absorbant.

Soit $y \in U$, alors il existe $i_1 \in \{1, ..., N\}$ et $\epsilon_1 \in U$ tel que $y = x_{i_1} + \frac{\epsilon_1}{2}$. En itérant, on construit une suite $(i_k)_{k \geq 1}$ à valeur dans $\{1, ..., N\}$ et une suite $(\epsilon_k)_{k \geq 1}$ à valeur dans U telle que pour tout K,

$$y = S_K + \frac{\epsilon_K}{2^K} \text{ où } S_K = \sum_{k=1}^{K} \frac{x_{i_k}}{2^{k-1}}.$$

Montrons que U est borné. Soit V un voisinage de 0. Pour tout $x \in U$, par continuité de $\lambda \mapsto \lambda x$, il existe $\lambda_x > 0$ tel que $x \in \lambda V$ pour tout $\lambda \geq \lambda_x$. On peut de nouveau extraire des $x^1, ..., x^m$ tels que

$$U \subset \cup_{i=1}^{m} \lambda_{x^i} V \subset \lambda V,$$

où $\lambda = \max\{\lambda_{x^1}, ..., \lambda_{x^m}\}$.

On veut maintenant montrer la convergence de S_k vers y. Soit W un voisinage de 0. Comme l'application

$$\begin{aligned} \mathbb{R}\times E &\to E \\ (\rho,u) &\mapsto \rho.u \end{aligned}$$

est continue, il existe $\eta\in\mathbb{R}$ et V voisinage de 0 dans E tels que $[-\eta,\eta].V\subset W$. Or, comme U est borné, il existe $\lambda\in\mathbb{R}$ tel que $U\subset\lambda V$, donc si K est tel que $2^K\geq\frac{\lambda}{\eta}$, alors $\frac{\epsilon_K}{2^K}\in W$. Comme W est quelconque, on en déduit que donc

$$S_K\to y \text{ quand } K\to+\infty.$$

D'un autre côté, posons

$$S_K^i=\sum_{1\leq k\leq K, i_k=i}\frac{1}{2^{k-1}}$$

pour tout $i\in\{1,...,N\}$ et $K\geq 1$, de façon à écrire $S_K=\sum_{i=1}^N S_K^i x_i$. Soit S_∞^i la limite de la somme partielle d'une série convergente S_K^i. Alors par continuité de l'application $(T^1,...,T^N)\mapsto\sum_{i=1}^N T^i x_i$, on a $S_K\to\sum_{i=1}^N S_\infty^i x_i$ quand $K\to+\infty$.

Comme l'espace est séparé on a unicité de la limite de la suite S_K. Donc $y=\sum_{i=1}^N S_\infty^i x_i\in\mathcal{W}$.

2. Par le théorème du graphe fermé, on montre que l'application linéaire $D: f\mapsto f'$ définie sur F est continue. On en déduit par le théorème d'Ascoli que la boule unité fermée de $(F,\|.\|_0)$ est compacte et on conclut grâce à la question précédente.

⋆

Solution 4. *Série de Fourier*

1. Voir le cours.

2. En calculant, on trouve $D_N(y)=\frac{\sin(y(N+\frac{1}{2}))}{\sin(\frac{y}{2})}$. Si $(N+\frac{1}{2})y\in[\frac{\pi}{6}+2k\pi,\frac{5\pi}{6}+2k\pi]$, alors $|\sin(y(N+\frac{1}{2}))|\geq\frac{1}{2}$, et donc

$$\int_0^{2\pi}|D_N(y)|\geq\sum_{k=0}^{\frac{N}{2}}\int_{y=\frac{1}{N+\frac{1}{2}}(\frac{\pi}{6}+2\pi k)}^{\frac{1}{N+\frac{1}{2}}(\frac{5\pi}{6}+2\pi k)}\frac{1}{2}\frac{N+\frac{1}{2}}{\frac{5\pi}{6}+2\pi k}\geq\sum_{k=0}^{\frac{N}{2}}\frac{1}{\frac{5}{2}+6k}\longrightarrow\infty.$$

3. Soit $g_k\in\mathcal{C}(\mathbb{T})$ qui converge simplement vers $sgn(D_N)$. Soit $x_0\in[0,2\pi]$ et $\tilde{g_k}=g_k(x_0-.)$. On a $S_N(\tilde{g_k})(x_0)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}g_k(x_0-t)D_N(x_0-t)\longrightarrow\frac{1}{2\pi}\int|D_N|$ quand $k\longrightarrow\infty$. De plus pour tout $v\in\mathcal{C}(\mathbb{T})$ on a $|S_N(v)(x)|\leq\frac{1}{2\pi}\|D_N\|_{L^1}\|v\|_{L^\infty}$, donc on peut conclure.

⋆

Solution 5. *Corollaires du théorème de Hahn-Banach, forme analytique*

1. On applique le théorème de Hah-Banach avec $p(x)=\|g\|_{G'}\|x\|$.

2. On utilise la question précédente, avec $G=\mathbb{R}x_0$ et $g(tx_0)=t\|x_0\|^2$.

3. On a

$$\sup_{f\in E',\|f\|\leq 1}|<f,x>|\leq\|x\|.$$

Ce suprémum est atteint, en prenant $f=\frac{f_0}{\|x\|}$, où f_0 est défini à la question précédente.

⋆