Correction du Td n° 1 d'Analyse fonctionnelle

Un peu de topologie

Séance du 14 février 2014

Solution 1. *Théorème de Banach-Steinhaus*

1. Soit $x \notin \omega_k$. Soit $\varepsilon > 0$. Comme $\sup \|A_n\| = \infty$, il existe $n \in \mathbb{N}$ et $v \in X$ tels que $\|v\|_X = 1$ et $\|A_n v\| \geq \frac{3k}{\varepsilon}$. Alors

$$\|A_n(u + \varepsilon v)\| \geq \varepsilon \|A_n v\| - \|A_n u\| \geq 2k,$$

donc $u + \varepsilon v \in \omega_k$.

2. Les ω_k sont ouverts et denses, donc d'après le Théorème de Baire, $\cap_{k\in\mathbb{N}}\omega_k$ est dense. En particulier, cette intersection est non vide, ce qui contredit l'hypothèse du Théorème.

⋆

Solution 2. *Série de Fourier*

1. Voir le cours.

2. En calculant, on trouve $D_N(y) = \frac{\sin(y(N+\frac{1}{2}))}{\sin(\frac{y}{2})}$. Si $(N + \frac{1}{2})y \in [\frac{\pi}{6} + 2k\pi, \frac{5\pi}{6} + 2k\pi]$, alors $|\sin(y(N + \frac{1}{2}))| \geq \frac{1}{2}$, et donc

$$\int_0^{2\pi} |D_N(y)| \geq \sum_{k=0}^{\frac{N}{2}} \int_{y=\frac{1}{N+\frac{1}{2}}(\frac{\pi}{6}+2\pi k)}^{\frac{1}{N+\frac{1}{2}}(\frac{5\pi}{6}+2\pi k)} \frac{1}{2} \frac{N + \frac{1}{2}}{\frac{5\pi}{6} + 2\pi k} \geq \sum_{k=0}^{\frac{N}{2}} \frac{1}{\frac{5}{2} + 6k} \longrightarrow \infty.$$

3. Soit $g_k \in \mathcal{C}(\mathbb{T})$ qui converge simplement vers $sgn(D_N)$. Soit $x_0 \in [0, 2\pi]$ et $\tilde{g_k} = g_k(x_0 - .)$. On a $S_N(\tilde{g_k})(x_0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} g_k(x_0 - t) D_N(x_0 - t) \longrightarrow \frac{1}{2\pi} \int |D_N|$ quand $k \longrightarrow \infty$. De plus pour tout $v \in \mathcal{C}(\mathbb{T})$ on a $|S_N(v)(x)| \leq \frac{1}{2\pi} \|D_N\|_{L^1} \|v\|_{L^\infty}$, donc on peut conclure.

⋆

Solution 3. *Corollaires du théorème de Hahn-Banach, forme analytique*

1. On applique le théorème de Hah-Banach avec $p(x) = \|g\|_{G'} \|x\|$.

2. On utilise la question précédente, avec $G = \mathbb{R}x_0$ et $g(tx_0) = t\|x_0\|^2$.

3. On a

$$\sup_{f \in E', \|f\| \leq 1} | < f, x > | \leq \|x\|.$$

Ce suprémum est atteint, en prenant $f = \frac{f_0}{\|x\|}$, où f_0 est défini à la question précédente.

4. Soit $x_0 \in E$ tel que $x_0 \notin \overline{F}$. Le théorème de Hahn-Banach, deuxième forme géomètrique nous dit qu'il existe $f \in E'$ telle que

$$\forall x \in \overline{F},\ f(x) < f(x_0).$$

Soit $x \in F$. Comme F est un sous-espace vectoriel, par homogénéité on obtient donc

$$\forall \lambda \in \mathbb{R},\ \lambda f(x) < f(x_0)$$

donc $f(x) = 0$. f est donc nulle sur F.

⋆

Solution 4. *Théorème de Krein-Milman*

1. Soit $\mathcal{P}$ un ensemble totalement ordonné de parties extrémales. Alors $\cap_{A \in \mathcal{P}} A$ est non vide (par compacité), compact (fermé dans un compact) et vérifie la condition pour être extrémal. C'est donc un majorant de $\mathcal{P}$. Le lemme de Zorn nous dit donc qu'il existe un élément maximal.

2. Soit M un élément maximal. Si M n'est pas réduit à un point, il existe $x, y \in M$, $x \neq y$. Le théorème de Hahn-Banach nous dit qu'il existe $f \in E'$ telle que $f(x) < f(y)$. Soit $\widetilde{M} = \{u \in M,\ f(u) = \inf_M f\}$. Alors $\widetilde{M} \subset M$ est extrémale. Par maximalité $\widetilde{M} = M$ donc f est constante sur M, contradiction.

3. Si K n'est pas inclus dans $\mathcal{E}$, l'adhérence de l'enveloppe convexe de ses points extrémaux, on prend $x_0 \in K \setminus \mathcal{E}$. Par le théorème de Hahn-Banach, on peut trouver $f \in E'$ telle que

$$\forall x \in \mathcal{E},\ f(x_0) > f(x).$$

On considère $A = \{u \in K,\ f(u) = \sup_K f\}$. A est extrémale, donc A contient un point extrémal x_1, d'après les questions précédentes.

$$\forall x \in \mathcal{E},\ f(x_1) \geq f(x_0) > f(x),$$

ce qui donne une contradiction.

⋆

Solution 5. *La sphère unité n'est pas fermée pour la topologie faible*

1. Vu la forme d'un voisinage élémentaire, il suffit de montrer qu'une intersection finie hyperplans n'est pas réduite à $\{0\}$. Supposons que $\cap_{i=1}^n \operatorname{Ker} \ell_i = \{0\}$ où ℓ_i est une famille finie de E', et considérons $\Phi : E \to \mathbb{R}^n$, $x \mapsto (\ell_1(x), \ldots, \ell_n(x))$. Alors Φ est injective vu la condition sur les noyaux, et donc $\dim E \leq n$, ce qui est absurde. Il existe donc $x \in \cap_{i=1}^n \operatorname{Ker} \ell_i \setminus \{0\}$ et $x\mathbb{R} \subset \cap_{i=1}^n \operatorname{Ker} \ell_i$, donc $x\mathbb{R}$ est contenu dans tout voisinage élémentaire ne faisant intervenir que les ℓ_i.

2. Soit $x_0 \in E$ tel que $\|x_0\| < 1$, et soit V un voisinage faible contenant x_0. V contient donc une droite passant par x_0, et par continuité, cette droite intersecte $\mathbb{S}$. x_0 est donc dans l'adhérence faible de $\mathbb{S}$.

3. Soit $x_0 \in E \setminus \mathbb{B}$. Comme $\mathbb{B}$ est fermée pour la topologie forte, on peut utiliser le théorème de Hahn Banach qui nous donne une forme linéaire l séparant strictement $\mathbb{B}$ et $\{x_0\}$: il existe alors c tel que par exemple, $x_0 \in \{l(y) > c\}$ et $\mathbb{B} \in \{l(y) < c\}$, sonc x_0 n'est pas dans l'adhérence faible de $\mathbb{B}$.

4. Les boules $B(0, 1/n)$ (pour la distance) sont des ouverts faibles : elles contiennent une droite $y_n\mathbb{R}$. On pose $x_n = ny_n/\|y_n\|$. Alors $\|x_n\| = n$ et $x_n \in B(0, 1/n)$ donc $x_n \rightharpoonup 0$.

C'est une contradiction avec le théorème de Banach-Steinhaus qui assure que toute suite faiblement convergente est bornée.

⋆