Correction du Td n° 1 d'Analyse fonctionnelle

Dualité dans les espaces de Banach

Séance du 13 février 2015

Solution 1. *Série de Fourier*

1. Voir le cours.

2. En calculant, on trouve $D_N(y) = \frac{\sin(y(N+\frac{1}{2}))}{\sin(\frac{y}{2})}$. Si $(N+\frac{1}{2})y \in [\frac{\pi}{6}+2k\pi, \frac{5\pi}{6}+2k\pi]$, alors $|\sin(y(N+\frac{1}{2}))| \geq \frac{1}{2}$, et donc

$$\int_0^{2\pi} |D_N(y)| \geq \sum_{k=0}^{\frac{N}{2}} \int_{y=\frac{1}{N+\frac{1}{2}}(\frac{\pi}{6}+2\pi k)}^{\frac{1}{N+\frac{1}{2}}(\frac{5\pi}{6}+2\pi k)} \frac{1}{2}\frac{N+\frac{1}{2}}{\frac{5\pi}{6}+2\pi k} \geq \sum_{k=0}^{\frac{N}{2}} \frac{1}{\frac{5}{2}+6k} \longrightarrow \infty.$$

3. Soit $g_k \in \mathcal{C}(\mathbb{T})$ qui converge simplement vers $sgn(D_N)$. Soit $x_0 \in [0,2\pi]$ et $\tilde{g_k} = g_k(x_0 - .)$. On a $S_N(\tilde{g_k})(x_0) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} g_k(x_0-t)D_N(x_0-t) \longrightarrow \frac{1}{2\pi}\int |D_N|$ quand $k \longrightarrow \infty$. De plus pour tout $v \in \mathcal{C}(\mathbb{T})$ on a $|S_N(v)(x)| \leq \frac{1}{2\pi}\|D_N\|_{L^1}\|v\|_{L^\infty}$, donc on peut conclure.

⋆

Solution 2. *Corollaires du théorème de Hahn-Banach, forme analytique*

1. On applique le théorème de Hah-Banach avec $p(x) = \|g\|_{G'}\|x\|$.

2. On utilise la question précédente, avec $G = \mathbb{R}x_0$ et $g(tx_0) = t\|x_0\|^2$.

3. On a

$$\sup_{f\in E', \|f\|\leq 1} |< f, x >| \leq \|x\|.$$

Ce suprémum est atteint, en prenant $f = \frac{f_0}{\|x\|}$, où f_0 est défini à la question précédente.

⋆

Solution 3. *Non métrisabilité de la topologie faible*

1. On considère $\Phi : E \to \mathbb{R}^{n+1}$, $\Phi(x) = (\phi_0(x), \ldots, \phi_n(x)$. Alors $\Phi(E)$ est un convexe fermé (s.e.v. de $\mathbb{R}^{n+1}$), et par la condition sur les noyaux, $a = (1, 0, \ldots, 0) \notin \Phi(E)$.

Par le théorème de Hahn-Banach, il existe donc une forme linéaire sur $\mathbb{R}^{n+1}$ $\ell(x) = \sum_{i=0}^n \lambda_i x_i$ qui sépare strictement $\Phi(E)$ de a. Par exemple, pour tout $x \in \Phi(E)$, $\ell(x) < c$ et $\ell(a) > c$. Comme $0 \in \Phi(E)$, $c > 0$ et par homogénité, on a que $\ell(x) = 0$ pour tout $x \in \Phi(E)$. Cela signifie que

$$\forall y \in E, \quad \sum_{i=0}^n \lambda_i\phi_i(y) = 0 \quad \text{i.e.} \quad \sum_{i=0}^n \lambda_i\phi_i = 0.$$

Mais $\ell(a) = \lambda_0 > c > 0$, et donc $\phi_0 \in \mathrm{Vect}(\phi_1, \ldots, \phi_n)$.

2. Un voisinage élémentaire (de 0) pour la topologie faible est

$$U = \{x | \; |\ell_1(x)| < \varepsilon_1, \ldots, |\ell_k(x)| < \varepsilon_k\}.$$

où $\ell_1, \dots, \ell_k \in E'$ et $\varepsilon_1, \varepsilon_k > 0$ sont donnés. Si E est métrisable, il existe une base dénombrable de voisinages (élémentaires) de 0 : chacun de ces voisinages ne fait intervenir qu'un nombre fini de formes linéaires, notons F l'ensemble dénombrable des formes linéaires mises en jeu.

Soit $\ell \in E'$. Alors $\{x| \ |\ell(x)| < 1\}$ est un voisinage faible de 0, donc il existe $\ell_1, \dots, \ell_k \in F$ et $\varepsilon_1, \varepsilon_k > 0$ tels que :

$$\{x| \ |\ell_1(x)| < \varepsilon_1, \dots, |\ell_k(x)| < \varepsilon_k\} \subset \{x| \ |\ell(x)| < 1\}.$$

En particulier, si $x \in \cap_{i=1}^k \operatorname{Ker} \ell_i$, alors $\lambda x \in \cap_{i=1}^k \operatorname{Ker} \ell_i$ et $|\ell(\lambda x)| < 1$, et ce pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$. Ainsi, $x \in \operatorname{Ker} \ell$. Par la question précédente on en déduit que $\ell \in \operatorname{Vect}(\ell_1, \dots, \ell_k)$.

3. La question précédente montre que E' est une base au plus dénombrable (au sens algébrique). Mais E' est complet (et de dimension infinie) : par le théorème de Baire, c'est absurde.

⋆

Solution 4. *ℓ^1 a la propriété de Schur*

1. Voir exercice précédent.

2. Soit $\phi^k \in \ell^1$ définie par $\phi_i^k = \delta_i^k$. Alors $(u^n, \phi^k) = u_k^n \longrightarrow 0$ quand $n \longrightarrow \infty$.

3. Si u^n ne tend pas vers 0 dans ℓ^1, alors, il existe $\epsilon > 0$ et une sous-suite $u^{\phi(n)}$ extraite telle que $\|u^{\phi(n)}\| \geq \epsilon$. On considére maintenant $v^n = \frac{u^{\phi(n)}}{\|u^{\phi(n)}\|_{\ell^1}}$. On a $\|v_n\|_{\ell^1} = 1$ et pour tout $w \in \ell^1$, $|(v^n, w)| \leq \frac{1}{\epsilon}|(u^{\phi(n)}, w)| \longrightarrow 0$.

4. Comme $\sum |u_j^0| = 1$, il existe a_1 tel que $\sum_{j=0}^{a_1 - 1} |u_j^0| \geq \frac{3}{4}$. Supposons a_k et n_{k-1} construits. D'aprés la question 2, il existe $n_k > n_{k-1}$ tel que $\sum_{j=0}^{a_k - 1} |u_j^{n_k}| \leq \frac{1}{8}$. Comme $\sum |u_j^{n_k}| = 1$, il existe donc $a_{k+1} > a_k$ tel que $\sum_{j=a_k}^{a_{k+1}-1} |u_j^{n_k}| \geq \frac{3}{4}$.

5. La suite v définie par $v_j = sgn(u_j^{n_k})$ pour $a_k \leq j \leq a_{k+1} - 1$ fonctionne.

⋆

Solution 5. *Convergence failble mais pas forte : trois exemples fondamentaux*

1. On raisonne par densité de $\mathcal{D}$ dans L^2. Il suffit de voir que pour tout $\psi \in D$, $\int u_n \psi \to 0$, ce qui est immédiat (support disjoints si n assez grand). Comme $\|u_n\|_{L^2} = \|\phi\|_{L^2} \neq 0$ pour tout n, cette convergence ne peut pas être forte.

2. Pour v_n, il suffit de constater que $\mathcal{D}(\mathbb{R} \setminus \{0\})$ est dense dans L^2. Comme $\|v_n\|_{L^2} = \|\phi\|_{L^2} \neq 0$ pour tout n, cette convergence ne peut pas être forte.

3. Enfin, pour w_n, on commence par le cas où $w(x) = e^{ikx}$, $k \neq 0$. Soit $\psi \in \mathcal{C}_{per}^1((0, 2\pi))$. Il suffit alors de faire une intégration par partie (lemme de Riemann-Lebesgue) :

$$\int e^{iknx} \psi(x) dx = -\frac{1}{ikn} \int e^{iknx} \psi'(x) dx = \mathcal{O}(1/n).$$

Dans le cas général, on écrit $w(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} a_k e^{ikx}$. Comme $e^{iknx} \rightharpoonup \delta_{0,k}$ quand $n \to +\infty$, on trouve que pour tout $N \in \mathbb{N}$, $w_N^n = \sum_{|k| \leq N} a_k e^{iknx} \rightharpoonup a_0$ quand $n \to +\infty$. Donc pour tout $\phi \in L^2(\mathbb{R})$, comme $w_N^n \to w(n\cdot)$ quand $N \to +\infty$ dans $L^2((0, 2\pi))$, et ceci uniformément par rapport à n, on a :

$$| < w(n\cdot) - a_0, \phi > | \leq | < w_N^n - a_0, \phi > | + | < w(n\cdot) - w_N^n, \phi > | \to 0$$

quand $n \to +\infty$. Conclusion : $w(n\cdot) \rightharpoonup \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} w$ quand $n \to +\infty$ dans $L^2(0,2\pi)$. Evidemment la suite $(w(n\cdot))_n$ ne converge pas fortement car $\|w_n\|_{L^2(0,2\pi)} = \|w\|_{L^2} \neq \|\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} w\|_{L^2((0,2\pi))}$ (cf cas d'égalité dans Cauchy-Schwarz).

⋆