

Corrigé d'analyse fonctionnelle TD n° 1

AUTOUR DU THÉORÈME DE BAIRE

Séance du 12 février 2018

Solution 1. *Échauffement : formes linéaires continues*

1. Soit $x \in E$ tel que $\ell(x) \neq 0$. Comme $x \notin \ker \ell$, il existe un voisinage U de x dans E tel que $0 \notin \ell(U)$. Notons $W := U - x$, qui est un voisinage de 0 tel que $(x + W) \cap \ker \ell = \emptyset$. Montrons que W contient un voisinage de 0 qui est équilibré. Cela découle de la continuité en 0 de l'application $\mathbb{K} \times E \rightarrow E$, $(\lambda, x) \mapsto \lambda x$: il existe V_0 un voisinage de 0 et $\varepsilon > 0$ tels que $\forall |\lambda| \leq \varepsilon$, $\lambda V_0 \subseteq W$. Il suffit donc de poser

$$V := \bigcup_{|\lambda| \leq \varepsilon} \lambda V_0,$$

qui est un voisinage équilibré de 0. Comme $V \subseteq W$, on a bien $(x + V) \cap \ker \ell = \emptyset$.

2. Comme V est équilibré, dès que $|\ell(v)| = \rho$ pour un certain $v \in V$, alors $\ell(V)$ contient la boule de centre 0 et de rayon ρ dans \mathbb{K} . Supposons maintenant que $\ell(V)$ n'est pas borné : on a alors $\ell(V) = \mathbb{K}$. Donc il existe $v_0 \in V$ tel que $\ell(v_0) = -\ell(x)$, et donc $x + v_0 \in \ker \ell$, ce qui est contradictoire.

Donc ℓ est bornée sur un voisinage équilibré de 0. Rappelons pourquoi cela implique qu'elle est continue en 0, et donc sur tout E . Notons

$$M = \sup_{v \in V} |\ell(v)|.$$

Si $\varepsilon > 0$, alors $W := \frac{\varepsilon}{M}V \subseteq \{|\ell| \leq \varepsilon\}$, d'où la continuité en 0, puisque W est un voisinage de 0 dans E . La continuité en tout point suit grâce à la continuité des translations.

★

Solution 2. *Espaces quotient*

1. Si U est un ouvert de E , alors on voit que

$$\pi^{-1}(\pi(U)) = V + F = \bigcup_{x \in F} (x + U),$$

et comme $x + U$ est ouvert (grâce aux propriétés des espaces vectoriels topologiques), $\pi^{-1}(\pi(U))$ est un ouvert de E . Cela signifie que $\pi(U) \in \mathcal{T}$ la topologie quotient sur E/F , sans quoi la topologie engendrée par $\pi(U)$ et \mathcal{T} serait strictement plus fine que \mathcal{T} et rendrait également continue l'application π . Autrement dit, $\pi(U)$ est ouvert.

2. Soit $[z] = [x] + [y]$ dans E/F (où l'on note $[z]$ la classe de z dans E/F). Soit \tilde{W} un voisinage de $[z]$ dans E/F . Alors $W := \pi^{-1}(\tilde{W})$ est un voisinage de z dans E . Comme $z = (x + f) + y$ pour un certain $f \in F$, et par continuité de l'addition dans E , il existe U (resp. V) un voisinage $x + f$ (resp. y) dans E tels que $U + V \subseteq W$. En notant $\tilde{U} := \pi(U)$ et $\tilde{V} := \pi(V)$, qui sont des voisinages de $\pi(x + f) = [x]$ et $\pi(y) = [y]$ d'après la question

précédente, on obtient, grâce à la linéarité de π , que $\tilde{U} + \tilde{V} \subseteq \pi(W) = \tilde{W}$, car pour tout ensemble A , $\pi(\pi^{-1}(A)) = A$.

De même, si $[z] = \lambda[x]$ et \tilde{W} est un voisinage de $[z]$ dans E/F (que l'on relève en un voisinage W de z dans E), on écrit $z = \lambda(x+f)$, avec $f \in F$. Alors il existe Ω un voisinage de λ dans \mathbb{R} et U un voisinage de $x+f$ dans E tels que $\forall(\mu, y) \in \Omega \times U$, $\mu y \in W$. Donc $(\lambda, [x]) \in \Omega \times \pi(U)$, et $\forall(\mu, [y]) \in \Omega \times \pi(U)$, $\mu[y] \in \pi(W) = \tilde{W}$, d'où la continuité de la somme et du produit par un scalaire.

3. Supposons E/F séparé. Si $x \in E$ et $x \notin F$, $[x]$ vérifie $[x] \neq [0]$. Il existe donc un voisinage de $[x]$ dans E/F qui ne contient pas $[0]$: on le note \tilde{U} . Alors $U := \pi^{-1}(\tilde{U})$ est un voisinage de x dans E , et $U \cap F = \emptyset$. Cela prouve que $E \setminus F$ est ouvert, *i.e.* que F est fermé.

Réciproquement, si F est fermé, introduisons l'application continue suivante :

$$\Phi : \begin{cases} E \times E \longrightarrow E \\ (x, y) \longmapsto x - y. \end{cases}$$

$\Phi^{-1}(F)$ est un fermé de $E \times E$. Si à présent $[x] \neq [y]$ dans E/F , alors $\Phi(x, y) \notin F$, donc il existe un voisinage W de (x, y) dans $E \times E$ tel que $W \subseteq (E \times E) \setminus \Phi^{-1}(F)$. Écrivons $W = U \times V$ où U (resp. V) est un voisinage de x (resp. y) dans E . On a

$$\forall x' \in U, \forall y' \in V, \quad x' - y' \notin F,$$

ce qui signifie bien qu'en considérant $\pi(U)$ et $\pi(V)$, on obtient deux voisinages disjoints de $[x]$ et $[y]$ dans E/F .

★

Solution 3. Sur certains sous-espaces de L^1

1. Il s'agit de l'inégalité de Hölder. Si $g \in L^1 \cap L^p$, alors pour tout $q \in [1, p]$,

$$\int_{\Omega} |g|^q = \int_{\Omega} |g|^{p \frac{q-1}{p-1}} \cdot |g|^{\frac{p-q}{p-1}} \leq \left(\int_{\Omega} |g|^p \right)^{\frac{q-1}{p-1}} \cdot \left(\int_{\Omega} |g| \right)^{\frac{p-q}{p-1}} < +\infty,$$

où l'inégalité de Hölder a été appliquée avec l'exposant $\frac{p-1}{q-1} \geq 1$.

2. Ainsi définis, les F_n vérifient $V = \bigcup_{n \geq 1} F_n$. En effet, si $f \in V$, alors $f \in L^p$ pour un certain $p > 1$. Alors grâce au calcul ci-dessus, la norme $\|f\|_{L^q}$ reste uniformément bornée en $q \in [1, p]$. Pour n assez grand, on a donc bien $\|f\|_{L^{1+1/n}} \leq n$, et donc $f \in F_n$.

Il faut maintenant vérifier que chaque F_n est fermé. Fixons donc $n \in \mathbb{N}$, et donnons-nous $\{f_p\}$ une suite d'éléments de F_n qui converge vers f pour la norme L^1 . On sait déjà que $f \in V$ (car V est fermé). Ensuite, on sait (voir cours d'intégration) qu'il existe une sous-suite $\{f_{p_k}\}$ telle que $f_{p_k} \rightarrow f$ presque partout. Alors le lemme de Fatou donne

$$\|f\|_{L^{1+1/n}}^{1+1/n} = \int_{\Omega} |f|^{1+1/n} = \int_{\Omega} \liminf_{k \rightarrow \infty} |f_{p_k}|^{1+1/n} \leq \liminf_{k \rightarrow \infty} \int_{\Omega} |f_{p_k}|^{1+1/n} \leq n^{1+1/n},$$

ce qui prouve que $f \in F_n$.

3. On vient d'écrire V , qui est un espace de Banach car fermé dans L^1 , comme une réunion dénombrable de fermés. Par le théorème de Baire, l'un de ces fermés, mettons F_{n_0} , est nécessairement d'intérieur non-vidé. Il contient une boule (au sens L^1) notée $B := B(f_0, r)$, avec $r > 0$. Dès lors, si $g \in V$, alors $f_0 + \frac{r}{2} \frac{g}{\|g\|_{L^1}} \in B$, ce qui prouve que

$g \in L^{1+1/n_0}$. En utilisant le fait que les éléments de B ont une norme L^{1+1/n_0} majorée par n_0 , on voit que l'injection $V \hookrightarrow L^{1+1/n_0}$, donnée par l'application

$$\iota : \begin{cases} (V, \|\cdot\|_{L^1}) \longrightarrow L^{1+1/n_0} \\ f \longmapsto f \end{cases}$$

est continue, de norme au plus $\frac{4n_0}{r}$.

★

Solution 4. *Sur les hypothèses du théorème de l'application ouverte*

Ce théorème dit qu'une application *linéaire, continue, surjective, entre deux espaces de Banach* est ouverte.

1. L'application nulle sur \mathbb{R} est linéaire, continue, mais elle n'est pas ouverte puisque $f([-1, 1]) = \{0\}$, qui est fermé.

2. L'application $f(x) = x^3 - x$ est surjective et continue, mais $f([-1, 1]) = [-\frac{2}{3\sqrt{3}}, \frac{2}{3\sqrt{3}}]$, qui est fermé.

3. Si E est l'ensemble des suites presque nulles, alors l'application

$$T : E \longrightarrow E, \{x_n\}_{n \geq 0} \longmapsto \left\{ \frac{x_n}{n+1} \right\}_{n \geq 0}$$

est continue et bijective, mais son inverse n'est pas borné sur la boule unité de E , donc pas continu.

Remarque : Si l'on considère que T est définie sur le complété de E , c'est-à-dire l'ensemble des suites de limite nulle, alors T reste injective, mais évidemment non surjective.

★

Solution 5. *La transformée de Fourier sur $L^1([0, 2\pi])$*

1. Il s'agit de montrer que la suite des coefficients de Fourier de $f \in L^1([0, 2\pi])$ tend vers 0 quand $n \rightarrow \pm\infty$ (c'est une version du lemme de Riemann-Lebesgue). Par l'inégalité triangulaire, on a $|c_n(f)| \leq \|f\|_{L^1}$, mais ce n'est pas suffisant.

Supposons déjà f de classe C^1 . Alors une intégration par partie montre que

$$c_n(f) = \frac{i}{2\pi} \left[\frac{f(2\pi) - f(0)}{n} - \frac{1}{n} \int_0^{2\pi} f'(x) e^{-inx} dx \right],$$

donc $c_n(f) \rightarrow 0$ quand $|n| \rightarrow \infty$. À présent, si $f \in L^1$, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $g \in C^1$ tel que $\|f - g\|_{L^1} \leq \varepsilon/2$, et $N \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geq N, |c_n(g)| \leq \varepsilon/2$. Ainsi, pour tout $n \geq N$,

$$|c_n(f)| \leq |c_n(f - g)| + |c_n(g)| \leq \|f - g\|_{L^1} + \varepsilon/2 \leq \varepsilon,$$

ce qui prouve que $\{c_n(f)\} \in c_0(\mathbb{Z})$.

2. Comme \mathcal{F} est linéaire, il suffit de montrer que son noyau est réduit à $\{0\}$ pour prouver son injectivité. Soit $f \in L^1$ telle que $c_n(f) = 0$ quel que soit $n \in \mathbb{Z}$. Grâce à la linéarité de l'intégrale,

$$\int_0^{2\pi} f(x) \overline{P(x)} dx = 0 \tag{*}$$

pour tout polynôme trigonométrique P . On veut approximer par une suite de polynômes trigonométriques $\{P_n\}$ la fonction

$$h(x) = \begin{cases} \frac{f(x)}{|f(x)|} & \text{si } f(x) \neq 0, \\ 0 & \text{autrement.} \end{cases}$$

Observons que $h \in L^\infty([0, 2\pi])$. Pour tout $n \geq 1$, on peut trouver (en régularisant h par convolution) une fonction $g_n \in C^0([0, 2\pi])$ telle que $\|h - g_n\|_{L^1} \leq 1/n$ et $\|g_n\|_{L^\infty} \leq C$, où $C > 0$ est une constante indépendante de n . Ensuite, d'après le théorème de Weierstrass, on peut trouver un polynôme P_n qui satisfait $\|P_n - g_n\|_{L^\infty} \leq 1/n$ (en particulier, $\|P_n\|_{L^\infty} \leq 2C$). Donc $\|h - P_n\|_{L^1} \leq 2/n$, et $P_n \rightarrow h$ dans $L^1([0, 2\pi])$. Or, par un résultat du cours d'intégration, on sait qu'il existe une sous-suite $\{P_{n_k}\}$ telle que $P_{n_k} \rightarrow h$ presque partout. On peut donc appliquer le théorème de convergence dominée à la suite $\int_0^{2\pi} f \overline{P_{n_k}}$, qui converge donc vers $\int_0^{2\pi} f \bar{h} = \int_0^{2\pi} |f|$. Comme cette suite est identiquement nulle par (\star) , on trouve donc $\|f\|_{L^1} = 0$, et donc $f = 0$.

3. Résumons : \mathcal{F} est une application linéaire entre espaces de Banach, continue et injective. Si elle était surjective, son application réciproque \mathcal{F}^{-1} serait continue, en vertu du théorème de l'application ouverte. Montrons que c'est absurde, en trouvant une suite $\{d_n\} \in c_0(\mathbb{Z})$ telle que $\|d_n\|_{\ell^\infty} = 1$ mais $\|\mathcal{F}^{-1}(d_n)\|_{L^1} \rightarrow +\infty$ quand $n \rightarrow +\infty$ (et ainsi, toute inégalité du type $\|f\|_{L^1} \leq C\|\mathcal{F}(f)\|_{\ell^\infty}$ est contredite).

Il s'agit d'un choix classique : considérons la suite des noyaux de Dirichlet, *i.e.* $d_n = \mathbb{1}_{[-n, n]}$. Alors, pour $x \in [0, 2\pi]$,

$$\begin{aligned} D_n(x) := \mathcal{F}^{-1}(d_n)(x) &= \sum_{k=-n}^n e^{ikx} = e^{-inx} \sum_{k=0}^{2n} e^{ikx} = e^{-inx} \frac{e^{i(2n+1)x} - 1}{e^{ix} - 1} \\ &= \frac{e^{i\frac{x}{2}} \cdot (e^{i(n+\frac{1}{2})x} - e^{-i(n+\frac{1}{2})x})}{e^{i\frac{x}{2}} \cdot (e^{i\frac{x}{2}} - e^{-i\frac{x}{2}})} = \frac{\sin((n+\frac{1}{2})x)}{\sin(\frac{x}{2})}. \end{aligned}$$

Pour étudier la norme L^1 de D_n , on utilise que $|\sin(x)| \leq |x|$ sur $[0, 2\pi]$, puis il faut faire un changement de variable et découper l'intégrale en $2n+1$ morceaux :

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} |D_n(x)| dx &\geq 2 \int_0^{2\pi} \frac{|\sin(\frac{2n+1}{2}x)|}{x} dx \\ &= 2 \int_0^{(2n+1)\pi} \frac{|\sin(u)|}{u} du \\ &\geq 4 \sum_{j=0}^{2n} \frac{1}{j+1}, \end{aligned}$$

et cette somme tend vers l'infini quand $n \rightarrow +\infty$, ce qui achève la démonstration.

Remarque : Le bon espace où regarder \mathcal{F} est plus petit. Par le théorème de Parseval, \mathcal{F} induit en effet une isométrie entre $L^2([0, 2\pi])$ et $\ell^2(\mathbb{Z})$.

★

Solution 6. *Un théorème de Grothendieck*

1. Il s'agit encore du théorème de l'application ouverte : considérons l'application $\Phi : (S, \|\cdot\|_{L^\infty}) \rightarrow (S, \|\cdot\|_{L^p})$, qui à chaque fonction f associe elle-même. Φ est linéaire,

continue (car Ω est de mesure finie), et bijective. Comme S est fermé pour la norme L^p , il l'est aussi pour la norme L^∞ , donc Φ est une application d'un Banach dans un autre. Ainsi, Φ^{-1} est continue, ce qui se traduit par l'existence d'un $C > 0$ tel que pour tout $f \in S$, $\|f\|_{L^\infty} \leq C\|f\|_{L^p}$.

Si $p < 2$, on a automatiquement $\|f\|_{L^p} \leq \|f\|_{L^2}^{2/p} \mu(\Omega)^{1/p-1/2}$ par Hölder. Si $p > 2$,

$$\|f\|_{L^p} \leq \|f\|_{L^2}^{2/p} \|f\|_{L^\infty}^{1-2/p}.$$

Donc $\|f\|_{L^\infty} \leq C\|f\|_{L^2}^{2/p} \|f\|_{L^\infty}^{1-2/p}$ et après simplification,

$$\|f\|_{L^\infty} \leq C^{p/2} \|f\|_{L^2}.$$

2. Pour obtenir ϕ_1, \dots, ϕ_n , il suffit d'orthonormaliser par le procédé de Gram-Schmidt n'importe quelle famille libre de S .

3. Remarquons que pour tout $\lambda \in B$, $\|f_\lambda\|_{L^2} = \|\lambda\|_{\ell^2} \leq 1$, donc $\forall \lambda \in B$, $\|f_\lambda\|_{L^\infty} \leq M$. Soit $\{\lambda_p\}_{p \geq 0}$ une suite dense de B . Pour chaque $p \geq 0$, il existe un ensemble négligeable \mathcal{N}_p tel que $\forall x \in \Omega \setminus \mathcal{N}_p$, $|f_{\lambda_p}(x)| \leq M$. On pose $\mathcal{N} = \bigcup_p \mathcal{N}_p$. Ainsi \mathcal{N} est négligeable, et pour $x \in \Omega \setminus \mathcal{N}$, pour tout $p \geq 0$,

$$|f_{\lambda_p}(x)| \leq M,$$

et on peut supposer qu'aussi $|\phi_i(x)| \leq M$ pour chaque $1 \leq i \leq n$. Or il existe une suite d'entiers $\{p_k\}$ telle que $\lambda_{p_k} \rightarrow \lambda$, donc, par continuité de $\lambda \mapsto f_\lambda(x)$, $|f_\lambda(x)| \leq M$.

4. Pour $x \in \Omega \setminus \mathcal{N}$ fixé, on choisit,

$$\lambda_i = \frac{\overline{\phi_i(x)}}{\left(\sum_j |\phi_j(x)|^2\right)^{1/2}}.$$

Alors $(\sum_i |\phi_i(x)|^2)^{1/2} \leq M$, d'où le résultat. On intègre alors le carré de cette inégalité sur Ω , pour obtenir

$$n \leq M^2 \mu(\Omega).$$

Donc n ne peut pas être arbitrairement grand.

5. Clairement, E est un sous-espace de $L^2([0, 2\pi])$ de dimension infinie. Il apparaît aussi que E est fermé, car la propriété d'avoir des coefficients de Fourier nuls hors des fréquences 2^n se transmet à la limite L^2 . Il s'agit donc seulement de montrer que $E \subset L^4$. Pour cela, on utilise astucieusement la formule de Parseval : si $f \in E$, alors

$$\|f\|_{L^4}^4 = \| |f|^2 \|_{L^2}^2 = \left\| \sum_{n,p} a_n \overline{a_p} e^{i(2^n - 2^p)x} \right\|_{L^2}^2 \leq \left(\sum_n |a_n|^2 \right)^2 + \sum_{n \neq p} |a_n \overline{a_p}|^2 \leq 2 \|a\|_{\ell^2}^4,$$

car $2^n - 2^p \neq 2^{n'} - 2^{p'}$ (à moins que $n = n'$ et $p = p'$, ou bien $n = p$ et $n' = p'$) en vertu de la décomposition dyadique des entiers. On peut généraliser sans peine cette construction à L^6 , L^8 , etc.

★

Solution 7. Théorème de Sunyer i Balaguer

Notons $X = \{x \in \mathbb{R} \mid \forall a < x < b, f|_{]a,b[}$ n'est pas polynomiale}. Il suffit de montrer que $X = \emptyset$. En effet, dans ce cas, notons P un polynôme qui coïncide avec f au voisinage de 0, et $y = \inf\{t > 0 \mid f(t) \neq P(t)\}$. Alors $y > 0$; supposons $y < +\infty$. Comme $y \notin X$, il

existe un polynôme Q et un intervalle $]y - \varepsilon, y + \varepsilon[$ sur lequel f et Q coïncident. Donc P et Q coïncident sur $]y - \varepsilon, y[$, donc $P = Q$, ce qui contredit la définition de y . Donc $f = P$ sur \mathbb{R} .

Supposons donc que X est non-vide. Par ailleurs, X est fermé (car son complémentaire est clairement ouvert). Enfin, X n'a pas de point isolé. En effet, si $x \in X$, et s'il existe un $\varepsilon > 0$ tel que pour tout y vérifiant $0 < |y - x| < \varepsilon$, $y \notin X$, on peut voir que f coïncide avec un certain polynôme P_1 sur $]x - \varepsilon, x[$, et avec un polynôme P_2 sur $]x, x + \varepsilon[$. Notant alors m le plus grand degré entre celui de P_1 et celui de P_2 , on aura $f^{(m+1)} \equiv 0$ sur $]x - \varepsilon, x + \varepsilon[$ (grâce à la continuité de f et de ses dérivées), de sorte que f est polynomiale sur cet intervalle, contredisant l'hypothèse $x \in X$.

Introduisons les ensembles fermés $F_n \subset \mathbb{R}$, définis pour chaque $n \in \mathbb{N}$ par $F_n := \{x \in \mathbb{R} \mid f^{(n)}(x) = 0\}$. On sait que X est complet (pour la topologie induite) et que $X = \bigcup_{n \geq 0} X \cap F_n$, par hypothèse. Par le théorème de Baire, un des fermés $X \cap F_{n_0}$ est d'intérieur non-vide, c'est-à-dire qu'il existe $A < B$ tels que $X \cap]A, B[$ n'est pas vide, et $X \cap]A, B[\subset X \cap F_{n_0}$. Comme aucun point de X n'est isolé, on voit aussi qu'en réalité, $X \cap]A, B[\subset F_n$ pour tout $n \geq n_0$.

À présent, observons ce qu'il se passe sur $]A, B[$ hors de X . Soit $x \in]A, B[\setminus X$, et soit $]y, z[$ un intervalle maximal de $]A, B[\setminus X$ contenant x . Alors f coïncide sur $]y, z[$ avec un polynôme P , dont on notera d le degré. Il existe donc une constante $c \neq 0$ telle que $\forall t \in]y, z[, f^{(d)}(t) = P^{(d)}(t) = c$, et donc par continuité, $f^{(d)}(y) = f^{(d)}(z) = c \neq 0$. Mais comme l'un au moins de y et z est dans X , et que si $y \in X \cap]A, B[$ (par exemple), $f^{(n)}(y) = 0$ pour tout $n \geq n_0$, on a forcément $d < n$. Ainsi $f^{(n_0)}(x) = 0$, et donc $]A, B[\subset F_{n_0}$. Cela contredit $X \cap]A, B[\neq \emptyset$.

★