Corrigé d'analyse fonctionnelle
TD n$^{\mathrm{o}}$ 1

Autour du théorème de Baire

Séance du 6 février 2019

Solution 1. *Échauffement*

L'espace $c_0(\mathbb{Z})$ des suites tendant vers 0 à l'infini est bien de Banach pour la topologie de la norme uniforme, car il est fermé dans $\ell^\infty(\mathbb{Z})$ par le théorème de la double limite. En effet, si $\{a^p\}_{p\geq 0}$ est une suite convergente d'éléments de $c_0(\mathbb{Z})$ (où chaque $a^p = \{a_n^p\}_{n\in\mathbb{Z}}$), alors en notant $a = \{a_n\}$ la limite de $\{a^p\}$, et $\varepsilon > 0$, on peut choisir $p_0 \geq 0$ tel que l'on ait $\|a^{p_0} - a\|_\infty \leq \varepsilon/2$, et $N \in \mathbb{N}$ tel que si $|n| \geq N$, alors $|a_n^{p_0}| \leq \varepsilon/2$. Alors, pour tout $n \in \mathbb{Z}$ tel que $|n| \geq N$, on a

$$|a_n| \leq |a_n - a_n^{p_0}| + |a_n^{p_0}| \leq \|a - a^{p_0}\|_\infty + |a_n^{p_0}| \leq \varepsilon,$$

et donc $a \in c_0(\mathbb{Z})$.

En revanche, l'espace des suites presques nulles n'est pas fermé dans $\ell^\infty(\mathbb{Z})$, donc pas complet. On peut considérer la suite $\{b^p\}$ définie par

$$b_n^p = 2^{-n}\mathbb{1}_{n\leq p},$$

dont la limite n'est pas une suite presque nulle. On peut en fait montrer que l'adhérence de l'espace des suites presques nulles est $c_0(\mathbb{Z})$.

⋆

Solution 2. *Sur certains sous-espaces de L^1*

1. On peut le montrer en appliquant l'inégalité de Hölder. Si $g \in L^1 \cap L^p$, alors pour tout $q \in [1, p]$,

$$\int_\Omega |g|^q = \int_\Omega |g|^{p\frac{q-1}{p-1}} \cdot |g|^{\frac{p-q}{p-1}} \leq \left(\int_\Omega |g|^p\right)^{\frac{q-1}{p-1}} \cdot \left(\int_\Omega |g|\right)^{\frac{p-q}{p-1}} < +\infty,$$

où l'inégalité de Hölder a été appliquée avec l'exposant $\frac{p-1}{q-1} \geq 1$.

Une autre méthode consiste en majorer, pour $x \in \Omega$, $|g(x)|^q$ par $|g(x)|^p$ si $|g(x)| \geq 1$ et par $|g(x)|$ si $|g(x)| \leq 1$, ce qui donne

$$|g(x)|^q \leq |g(x)| + |g(x)|^p.$$

2. Ainsi définis, les F_n vérifient $V = \bigcup_{n\geq 1} F_n$. En effet, si $f \in V$, alors $f \in L^p$ pour un certain $p > 1$. Alors grâce au calcul ci-dessus, la norme $\|f\|_{L^q}$ reste uniformément bornée en $q \in [1, p]$. Pour n assez grand, on a donc bien $\|f\|_{L^{1+1/n}} \leq n$, et donc $f \in F_n$.

Il faut maintenant vérifier que chaque F_n est fermé. Fixons donc $n \in \mathbb{N}$, et donnons-nous $\{f_p\}$ une suite d'éléments de F_n qui converge vers f pour la norme L^1. On sait déjà que $f \in V$ (car V est fermé). Ensuite, on sait (voir cours d'intégration) qu'il existe une sous-suite $\{f_{p_k}\}$ telle que $f_{p_k} \to f$ presque partout. Alors le lemme de Fatou donne

$$\|f\|_{L^{1+1/n}}^{1+1/n} = \int_\Omega |f|^{1+1/n} = \int_\Omega \liminf_{k\to\infty} |f_{p_k}|^{1+1/n} \leq \liminf_{k\to\infty} \int_\Omega |f_{p_k}|^{1+1/n} \leq n^{1+1/n},$$

ce qui prouve que $f \in F_n$.

3. On vient d'écrire V, qui est un espace de Banach car fermé dans L^1, comme une réunion dénombrable de fermés. Par le théorème de Baire, l'un de ces fermés, mettons F_{n_0}, est nécessairement d'intérieur non-vide. Il contient une boule (au sens L^1) notée $B := B(f_0, r)$, avec $r > 0$. Dès lors, si $g \in V$, alors $f_0 + \frac{r}{2}\frac{g}{\|g\|_{L^1}} \in B$, ce qui prouve que $g \in L^{1+1/n_0}$. En utilisant le fait que les éléments de B ont une norme L^{1+1/n_0} majorée par n_0, on voit que l'injection $V \hookrightarrow L^{1+1/n_0}$, donnée par l'application

$$\imath : \begin{cases} (V, \|\cdot\|_{L^1}) \longrightarrow L^{1+1/n_0} \\ \qquad\qquad f \longmapsto f \end{cases}$$

est continue, de norme au plus $\frac{4n_0}{r}$.

⋆

Solution 3. *Sur les hypothèses du théorème de l'application ouverte*

Ce théorème dit qu'une application *linéaire, continue, surjective, entre deux espaces de Banach* est ouverte.

1. L'application nulle sur $\mathbb{R}$ est linéaire, continue, mais elle n'est pas ouverte puisque $f(]-1,1[) = \{0\}$, qui est fermé.

2. L'application $f(x) = x^3 - x$ est surjective et continue, mais $f(]-1,1[) = [-\frac{2}{3\sqrt{3}}, \frac{2}{3\sqrt{3}}]$, qui est fermé.

3. Si E est l'ensemble des suites presques nulles, alors l'application

$$T : E \longrightarrow E,\ \{x_n\}_{n\geq 0} \longmapsto \left\{\frac{x_n}{n+1}\right\}_{n\geq 0}$$

est continue et bijective, mais son inverse n'est pas borné sur la boule unité de E, donc pas continu.

Remarque : Si l'on considère que T est définie sur le complété de E, c'est-à-dire l'ensemble des suites de limite nulle, alors T reste injective, mais évidemment non surjective.

⋆

Solution 4. *Séries de Fourier*

1. Il suffit de reprendre la démonstration du cours. On pose, pour $n \in \mathbb{N}$,

$$F_n = \{x \in E; \forall i \in \mathbb{N}, \|T_i(x)\|_F \leq n\}.$$

L'ensemble F_n est fermé.

Supposons qu'il existe n tel que F_n soit d'intérieur non vide. Soit $x \in E$ et $r > 0$ tel que $B(x,r) \subset F_n$. Alors par hypothèse, pour tout $y \in E$ de norme 1, et pour tout $i \in \mathbb{N}$,

$$\|T_i(x + \frac{r}{2}y)\|_F \leq n,$$

ce qui implique que

$$\|T_i(y)\|_F \leq \frac{2}{r}(n + \|T_i(x)\|_F).$$

Les applications T_i sont donc bornées dans $\mathcal{L}_c(E,F)$ par $\frac{2}{r}(n + \|T_i(x)\|_F)$.

Par conséquent, si $\sup_{i\in I} \|T_i\|_{\mathcal{L}(E,F)} = +\infty$, alors l'intérieur de F_n est vide pour tout n, et donc

$$\bigcup_{n\in\mathbb{N}} F_n = \{x \in E; (\|T_i(x)\|_F)_{i\in\mathbb{N}} \text{ bornée}\}$$

est d'intérieur vide d'après le théorème de Baire. C'est le second point de l'alternative.

2. On a :

$$\|D_N\|_{L^1(0,2\pi)} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{|\sin(y(N+\frac{1}{2}))|}{|\sin(\frac{y}{2})|}\mathrm{d}y = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \frac{|\sin(y(N+\frac{1}{2}))|}{\sin(\frac{y}{2})}\mathrm{d}y.$$

Comme $\sin(x) \leq x$ sur $[0,\pi]$,

$$\|D_N\|_{L^1(0,2\pi)} \geq \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{|\sin(y(N+\frac{1}{2}))|}{y/2}\mathrm{d}y = \frac{2}{\pi}\int_0^{(N+\frac{1}{2})\pi} \frac{|\sin(u)|}{u}\mathrm{d}u \geq \frac{2}{\pi}\sum_{k=0}^{N-1}\int_{k\pi}^{(k+1)\pi} \frac{|\sin(u)|}{(k+1)\pi}\mathrm{d}u.$$

Comme $\int_{k\pi}^{(k+1)\pi} |\sin(u)|\mathrm{d}u = 2$, on trouve

$$\|D_N\|_{L^1(0,2\pi)} \geq \frac{4}{\pi^2}\sum_{k=0}^{N-1}\frac{1}{k+1},$$

et la série des $\frac{1}{k+1}$ est divergente.

3. On pose

$$g_k(x) = \frac{D_n(x)}{2^{-k} + |D_n|(x)}.$$

Alors $g_k \in \mathcal{C}_{2\pi}(\mathbb{R})$, $-1 \leq g_k \leq 1$, et $(g_k)_k$ converge simplement vers $\operatorname{sgn}(D_N)$.

Soit $x_0 \in [0,2\pi]$ et $\tilde{g_k} = g_k(x_0 - .)$. On a

$$S_N(\tilde{g_k})(x_0) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} g_k(x_0-t)D_N(t)\mathrm{d}t \xrightarrow{k\to+\infty} \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |D_N|(t)\mathrm{d}t$$

grâce au théorème de convergence dominée. On a montré que $\|\Lambda_N\|_{\mathcal{L}_c(\mathcal{C}_{2\pi}(\mathbb{R}),\mathbb{R})} \geq \|D_N\|_{L^1(0,2\pi)}$.

De plus pour tout $f \in \mathcal{C}_{2\pi}(\mathbb{R})$ on a $|S_N f(x)| \leq \|D_N\|_{L^1}\|f\|_{L^\infty}$, donc on peut conclure que $\|\Lambda_N\|_{\mathcal{L}_c(\mathcal{C}_{2\pi}(\mathbb{R}),\mathbb{R})} = \|D_N\|_{L^1(0,2\pi)}$, et cette norme tend bien vers $+\infty$. Le raffinement du théorème de Banach-Steinhaus permet de conclure.

4. Il s'agit de montrer que la suite des coefficients de Fourier de $f \in L^1([0,2\pi])$ tend vers 0 quand $n \to \pm\infty$ (c'est une version du lemme de Riemann-Lebesgue). Par l'inégalité triangulaire, on a $|c_n(f)| \leq \|f\|_{L^1}$, mais ce n'est pas suffisant.

Supposons déjà f de classe C^1. Alors une intégration par partie montre que

$$c_n(f) = \frac{i}{2\pi}\left[\frac{f(2\pi)-f(0)}{n} - \frac{1}{n}\int_0^{2\pi} f'(x)e^{-inx}\mathrm{d}x\right],$$

donc $c_n(f) \to 0$ quand $|n| \to \infty$. À présent, si $f \in L^1$, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $g \in C^1$ tel que $\|f-g\|_{L^1} \leq \varepsilon/2$, et $N \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geq N$, $|c_n(g)| \leq \varepsilon/2$. Ainsi, pour tout $n \geq N$,

$$|c_n(f)| \leq |c_n(f-g)| + |c_n(g)| \leq \|f-g\|_{L^1} + \varepsilon/2 \leq \varepsilon,$$

ce qui prouve que $\{c_n(f)\} \in c_0(\mathbb{Z})$.

5. Comme $\mathcal{F}$ est linéaire, il suffit de montrer que son noyau est réduit à $\{0\}$ pour prouver son injectivité. Soit $f \in L^1$ telle que $c_n(f) = 0$ quel que soit $n \in \mathbb{Z}$. Grâce à la linéarité de l'intégrale,

$$\int_0^{2\pi} f(x)\overline{P(x)}dx = 0 \qquad (\star)$$

pour tout polynôme trigonométrique P. On veut approcher par une suite de polynômes trigonométriques $\{P_n\}$ la fonction

$$h(x) = \begin{cases} \frac{f(x)}{|f(x)|} & \text{si } f(x) \neq 0, \\ 0 & \text{autrement.} \end{cases}$$

Observons que $h \in L^\infty([0, 2\pi])$. Pour tout $n \geq 1$, on peut trouver (en régularisant h par convolution) une fonction $g_n \in C^0([0, 2\pi])$ telle que $\|h - g_n\|_{L^1} \leq 1/n$ et $\|g_n\|_{L^\infty} \leq C$, où $C > 0$ est une constante indépendante de n. Ensuite, d'après le théorème de Weierstrass, on peut trouver un polynôme P_n qui satisfait $\|P_n - g_n\|_{L^\infty} \leq 1/n$ (en particulier, $\|P_n\|_{L^\infty} \leq 2C$). Donc $\|h - P_n\|_{L^1} \leq 2/n$, et $P_n \to h$ dans $L^1([0, 2\pi])$. Or, par un résultat du cours d'intégration, on sait qu'il existe une sous-suite $\{P_{n_k}\}$ telle que $P_{n_k} \to h$ presque partout. On peut donc appliquer le théorème de convergence dominée à la suite $\int_0^{2\pi} f\overline{P_{n_k}}$, qui converge donc vers $\int_0^{2\pi} f\bar{h} = \int_0^{2\pi} |f|$. Comme cette suite est identiquement nulle par $(\star)$, on trouve donc $\|f\|_{L^1} = 0$, et donc $f = 0$.

6. Résumons : $\mathcal{F}$ est une application linéaire entre espaces de Banach, continue et injective. Si elle était surjective, son application réciproque $\mathcal{F}^{-1}$ serait continue, en vertu du théorème de l'application ouverte. Montrons que c'est absurde, en trouvant une suite $\{d_n\} \in c_0(\mathbb{Z})$ telle que $\|d_n\|_{\ell^\infty} = 1$ mais $\|\mathcal{F}^{-1}(d_n)\|_{L^1} \to +\infty$ quand $n \to +\infty$ (et ainsi, toute inégalité du type $\|f\|_{L^1} \leq C\|\mathcal{F}(f)\|_{\ell^\infty}$ est contredite). Let choix $d_n = \mathbb{1}_{[-n,n]}$ convient. En effet, pour $x \in [0, 2\pi]$,

$$\mathcal{F}^{-1}(d_n)(x) = \sum_{k=-n}^{n} e^{ikx} = D_n(x).$$

Or on a vu que la norme L^1 des noyaux de Dirichlet diverge.

Remarque : Le bon espace où regarder $\mathcal{F}$ est plus petit. Par le théorème de Parseval, $\mathcal{F}$ induit en effet une isométrie entre $L^2([0, 2\pi])$ et $\ell^2(\mathbb{Z})$.

⋆

Solution 5. *Un théorème de Grothendieck*

1. Il s'agit encore du théorème de l'application ouverte : considérons l'application $\Phi : (S, \|\cdot\|_{L^\infty}) \to (S, \|\cdot\|_{L^p})$, qui à chaque fonction f associe elle-même. Φ est linéaire, continue (car Ω est de mesure finie), et bijective. Comme S est fermé pour la norme L^p, il l'est aussi pour la norme L^∞, donc Φ est une application d'un Banach dans un autre. Ainsi, Φ^{-1} est continue, ce qui se traduit par l'existence d'un $C > 0$ tel que pour tout $f \in S$, $\|f\|_{L^\infty} \leq C\|f\|_{L^p}$.

Si $p < 2$, on a automatiquement $\|f\|_{L^p} \leq \|f\|_{L^2}\mu(\Omega)^{1/p-1/2}$ par Hölder. Si $p > 2$,

$$\|f\|_{L^p} \leq \|f\|_{L^2}^{2/p}\|f\|_{L^\infty}^{1-2/p}.$$

Donc $\|f\|_{L^\infty} \leq C\|f\|_{L^2}^{2/p}\|f\|_{L^\infty}^{1-2/p}$ et après simplification,

$$\|f\|_{L^\infty} \leq C^{p/2}\|f\|_{L^2}.$$

2. Pour obtenir $\phi_1, \ldots, \phi_n$, il suffit d'orthonormaliser par le procédé de Gram-Schmidt n'importe quelle famille libre de S.

3. Remarquons que pour tout $\lambda \in B$, $\|f_\lambda\|_{L^2} = \|\lambda\|_{\ell^2} \leq 1$, donc $\forall \lambda \in B$, $\|f_\lambda\|_{L^\infty} \leq M$. Soit $\{\lambda_p\}_{p\geq 0}$ une suite dense de B. Pour chaque $p \geq 0$, il exsite un ensemble négligeable $\mathcal{N}_p$ tel que $\forall x \in \Omega \setminus \mathcal{N}_p$, $|f_{\lambda_p}(x)| \leq M$. On pose $\mathcal{N} = \bigcup_p \mathcal{N}_p$. Ainsi $\mathcal{N}$ est négligeable, et pour $x \in \Omega \setminus \mathcal{N}$, pour tout $p \geq 0$,

$$|f_{\lambda_p}(x)| \leq M,$$

et on peut supposer qu'aussi $|\phi_i(x)| \leq M$ pour chaque $1 \leq i \leq n$. Or il existe une suite d'entiers $\{p_k\}$ telle que $\lambda_{p_k} \to \lambda$, donc, par continuité de $\lambda \mapsto f_\lambda(x)$, $|f_\lambda(x)| \leq M$.

4. Pour $x \in \Omega \setminus \mathcal{N}$ fixé, on choisit,

$$\lambda_i = \frac{\overline{\phi_i(x)}}{\left(\sum_j |\phi_j(x)|^2\right)^{1/2}}.$$

Alors $\left(\sum_i |\phi_i(x)|^2\right)^{1/2} \leq M$, d'où le résultat. On intègre alors le carré de cette inégalité sur Ω, pour obtenir

$$n \leq M^2 \mu(\Omega).$$

Donc n ne peut pas être arbitrairement grand.

5. Clairement, E est un sous-espace de $L^2([0, 2\pi])$ de dimension infinie. Il apparaît aussi que E est fermé, car la propriété d'avoir des coefficients de Fourier nuls hors des fréquences 2^n se transmet à la limite L^2. Il s'agit donc seulement de montrer que $E \subset L^4$. Pour cela, on utilise astucieusement la formule de Parseval : si $f \in E$, alors

$$\|f\|_{L^4}^4 = \||f|^2\|_{L^2}^2 = \left\| \sum_{n,p} a_n \overline{a_p} e^{i(2^n - 2^p)x} \right\|_{L^2}^2 \leq \left(\sum_n |a_n|^2 \right)^2 + \sum_{n \neq p} |a_n \overline{a_p}|^2 \leq 2 \|a\|_{\ell^2}^4,$$

car $2^n - 2^p \neq 2^{n'} - 2^{p'}$ (à moins que $n = n'$ et $p = p'$, ou bien $n = p$ et $n' = p'$) en vertu de la décomposition dyadique des entiers. On peut généraliser sans peine cette construction à L^6, L^8, etc.

$\star$

Solution 6. *Théorème de Sunyer i Balaguer*

Notons $X = \{x \in \mathbb{R} \mid \forall a < x < b,\ f|_{]a,b[}$ n'est pas polynomiale$\}$. Il suffit de montrer que $X = \emptyset$. En effet, dans ce cas, notons P un polynôme qui coïncide avec f au voisinage de 0, et $y = \inf\{t > 0 \mid f(t) \neq P(t)\}$. Alors $y > 0$; supposons $y < +\infty$. Comme $y \notin X$, il existe un polynôme Q et un intervalle $]y - \varepsilon, y + \varepsilon[$ sur lequel f et Q coïncident. Donc P et Q coïncident sur $]y - \varepsilon, y[$, donc $P = Q$, ce qui contredit la définition de y. On peut effectuer le même raisonnement en $-\infty$ en considérant $y = \sup\{t < 0 \mid f(t) \neq P(t)\}$. On en déduit que $f = P$ sur $\mathbb{R}$.

Supposons donc que X est non-vide. Par ailleurs, X est fermé (car son complémentaire est clairement ouvert). Enfin, X n'a pas de point isolé. En effet, si $x \in X$, et s'il existe un $\varepsilon > 0$ tel que pour tout y vérifiant $0 < |y - x| < \varepsilon$, $y \notin X$, on peut voir que f coïncide avec un certain polynôme P_1 sur $]x - \varepsilon, x[$, et avec un polynôme P_2 sur $]x, x + \varepsilon[$. Notant alors m le plus grand degré entre celui de P_1 et celui de P_2, on aura $f^{(m+1)} \equiv 0$ sur $]x - \varepsilon, x + \varepsilon[$ (grâce à la continuité de f et de ses dérivées), de sorte que f est polynomiale sur cet intervalle, contredisant l'hypothèse $x \in X$.

Introduisons les ensembles fermés $F_n \subset \mathbb{R}$, définis pour chaque $n \in \mathbb{N}$ par $F_n := \{x \in \mathbb{R} \mid f^{(n)}(x) = 0\}$. On sait que X est complet (pour la topologie induite) et que $X = \bigcup_{n \geq 0} X \cap F_n$, par hypothèse. Par le théorème de Baire, un des fermés $X \cap F_{n_0}$ est d'intérieur non-vide, c'est-à-dire qu'il existe $A < B$ tels que $X \cap\,]A, B[$ n'est pas vide, et $X \cap\,]A, B[\, \subset X \cap F_{n_0}$. Comme aucun point de X n'est isolé, on voit aussi qu'en réalité, $X \cap\,]A, B[\, \subset F_n$ pour tout $n \geq n_0$.

À présent, observons ce qu'il se passe sur $]A, B[$ hors de X. Soit $x \in]A, B[\setminus X$. Comme $]A, B[\setminus X$ est ouvert, on peut considérer $]y, z[$ un intervalle maximal de $]A, B[\setminus X$ contenant x. Alors on montre de la même façon que dans la première partie de la preuve que f coincide sur $]y, z[$ tout entier avec un polynôme P, dont on notera d le degré. Il existe donc une constante $c \neq 0$ telle que $\forall t \in]y, z[$, $f^{(d)}(t) = P^{(d)}(t) = c$, et donc par continuité, $f^{(d)}(y) = f^{(d)}(z) = c \neq 0$. Mais comme l'un au moins de y et z est dans X, et que si $y \in X \cap\,]A, B[$ (par exemple), $f^{(n)}(y) = 0$ pour tout $n \geq n_0$, on a forcément $d < n$. Ainsi $f^{(n_0)}(x) = 0$, et donc $]A, B[\subset F_{n_0}$. On vient de montrer que $]A, B[\subset X^c$. Cela contredit $X \cap \,]A, B[\neq \emptyset$.

⋆