Indications pour le Td n° 1 d'EDP

Problèmes elliptiques

Séance du 3 octobre 2014

Solution 1. *Inégalité de Carleman*

1. On calcule

$$P_{0,\phi} = -h^2\Delta + h\alpha.\nabla - 1.$$

2. On écrit $P_{0,\phi} = A + iB$ avec

$$\begin{aligned} A &= -h^2\Delta + 1, \\ B &= -ih\alpha.\nabla. \end{aligned}$$

On calcule ensuite

$$\|(A+iB)u\|_{L^2}^2 = \|Au\|^2 + \|Bu\|^2 + < Au, iBu > + < iBu, Au >= \|Au\|^2 + \|Bu\|^2 + i < [A,B]u, u >,$$

et on vérifie que $[A, B]$, le commutateur de A et B est identiquement nul.

3. On applique l'inégalité de Poincaré.

4. On a

$$\begin{aligned} h\|u\|_{L^2} \leq C\|Bu\|_{L^2} &\leq C\|P_{0,\phi}u\|_{L^2} \\ &\leq C\|(P_{0,\phi} + h^2 q)u\|_{L^2} + C\|h^2 qu\|_{L^2} \\ &\leq C\|(P_{0,\phi} + h^2 q)u\|_{L^2} + Ch^2\|q\|_{L^\infty}\|u\|_{L^2}. \end{aligned}$$

On prend donc $h_0 = \frac{C\|q\|_{L^\infty}}{2}$ pour avoir le résultat.

5. Soit $f \in L^2$. On note $P_\phi^* = P_{0,-\phi} + \bar{q}$. On note $A = P_\phi^*(H^2 \cap H_0^1)$, et on considère la forme linéaire sur A définie par $L(P_\phi^* v) =< v, f >$. Grâce à l'identité de Carleman, cette forme linéaire est bien définie car $P_\phi *$ est injective, et

$$\forall u \in A \; L(u) \leq \frac{C}{h}\|u\|.$$

On applique le théorème de Hahn-Banach pour prolonger L à L^2 puis le théorème de Riesz pour trouver r.

6. On calcule que l'on a $(-\Delta + q)u = 0$ si et seulement si

$$e^{\frac{\phi}{h}}(-\Delta + q)e^{-\frac{\phi}{h}}(e^{-i\frac{\psi}{h}}r) = -\frac{1}{h^2}e^{-i\frac{\psi}{h}}(1 - |\beta|^2 + 2i\alpha.\beta) - e^{-i\frac{\psi}{h}}q.$$

On choisit donc β tel que $|\beta|^2 = 1$ et $\alpha.\beta = 0$. D'après la question précédente, il existe donc $r \in L^2$ qui convient.

⋆

Solution 2. *Energie de Dirichlet*

Soit $h \in C^\infty(\bar{\Omega})$. On calcule

$$Q_{1+th}(f) - Q_1(f) = \int \left((1+th)|\nabla w|^2 - |\nabla u|^2\right),$$

où w est la solution de

$$\left\{\begin{array}{l} div((1+th)\nabla w) = 0, \text{ dans } \Omega \\ w = f, \text{ sur } \partial\Omega \end{array}\right.$$

et u la solution de

$$\left\{\begin{array}{l} \Delta u = 0, \text{ dans } \Omega \\ u = f, \text{ sur } \partial\Omega \end{array}\right.$$

Alors $\widetilde{w} = w - u$ satisfait l'équation

$$\left\{\begin{array}{l} div((1+th)\nabla \widetilde{w}) = -t div(h\nabla u), \text{ dans } \Omega \\ \widetilde{w} = 0, \text{ sur } \partial\Omega \end{array}\right.$$

Ainsi $\widetilde{w} \in H_0^1$ et satisfait

$$\|\widetilde{w}\|_{H^1} \leq Ct.$$

et on calcule

$$Q_{1+th}(f) - Q_1(f) = t\int h|\nabla u|^2 + 2\int \nabla\widetilde{w}.\nabla u + O(t^2).$$

De plus

$$\int_\Omega \nabla\widetilde{w}.\nabla u = -\int_\Omega \widetilde{w}\Delta u + \int_{\partial\Omega} \widetilde{w}\frac{\partial u}{\partial \nu} = 0,$$

ce qui permet de conclure.

⋆

Solution 3. *Généralisation de l'inégalité de Cacciopoli*

Voir le polycopié du cours.

⋆

Solution 4. *Problème de Dirichlet à coefficients variables*

1. Pour μ assez grand, on montre que la forme bilinéaire $< Lu + \mu u, v >$ est coercive et on applique le théorème de Lax-Milgram.

2. C'est une conséquence immédiate de l'injection compacte de $H^1(\Omega)$ dans $L^2(\Omega)$ (car Ω est borné).

3. Ce sont des conséquences succésives de l'alternative de Fredholm appliquée à l'opérateur compact T.

⋆