Correction du Td n° 10 d'Analyse fonctionnelle

Théorème de Hille-Yosida

Séance du 2 mai 2014

Solution 1. *Régularité*

1. A est maximal acrétif, donc on peut appliquer le théorème de Hille-Yosida : A est le générateur infinitésimal d'un semi-groupe de contraction $S(t)$, et si $u_0 \in D(A)$, $u = S(t)u_0 \in C^1([0,+\infty[, H) \cap C([0,+\infty[, D(A))$ est l'unique solution de

$$\begin{cases} \frac{du}{dt} + Au = 0 \; sur \; [0,+\infty[\\ u(0) = u_0 \end{cases} \tag{1}$$

2. A_1 est acrétif car A l'est. On va montrer que A_1 est maximal : soit $y \in H_1$, alors comme A est maximal, il existe $x \in D(A)$ tel que $Ax = y$, mais comme $y \in D(A)$, on aussi $x \in D(A^2)$, et $A_1 x = y$. Comme A_1 est maximal acrétif, il est le générateur infinitésimal d'un semi-groupe de contractions sur H_1, si $u_0 \in D(A^2)$, il existe une unique solution $u_1 \in C^1([0,+\infty[, H_1) \cap C([0,+\infty[, D(A_1))$ de

$$\begin{cases} \frac{du_1}{dt} + A_1 u_1 = 0 \; sur \; [0,+\infty[\\ u_1(0) = u_0 \end{cases} \tag{2}$$

Comme $u_1 \in D(A^2)$, u_1, satisfait en fait

$$\frac{du_1}{dt} + Au_1 = 0$$

Par unicité de la solution de (1), on a $u_1 = u$.

3. $A \in \mathcal{L}(H_1, H)$ donc

$$\frac{d}{dt}(Au) = A(\frac{du}{dt})$$

Par conséquent $Au \in C^1([0,+\infty[, H)$ et $u \in C^2([0,+\infty[, H)$. Si on pose $v = \frac{du}{dt}$, v satisfait

$$\begin{cases} \frac{dv}{dt} + Av = 0 \; sur \; [0,+\infty[\\ v(0) = -Au_0 \end{cases} \tag{3}$$

4. On raisonne par récurrence. On suppose le résultat vrai pour k. Soit $u_0 \in D(A^{k+1})$. Alors la solution u de (1) est dans $C^{k-j}([0,+\infty[, D(A^j))$ et $v = \frac{du}{dt}$ satisfait (3). Comme $u_0 \in D(A^{k+1})$, $Au_0 \in D(A^k)$ donc on peut aussi appliquer l'hypothèse de récurrence à v.

⋆

Solution 2. *Opérateur auto-adjoint et effet régularisant*

1. Voir le cours.

2. Comme A est symètrique, il suffit de montrer $D(A^*) \subset D(A)$. On montre d'abord que $J = (I + A)^{-1}$ est autoadjoint. Ensuite, si $u \in D(A^*)$, on pose $f = u + A^* u$. On a donc, pour $v \in D(A)$ $< f, v > = < u, v + Av >$, donc pour tout $w \in H$

$$< f, Jw > = < u, w > = < Jf, w > .$$

par conséquent, $Jf = u$, donc $u \in D(A)$.

3. On prend le produit scalaire de (1) avec u et on intègre entre 0 et T.

4. Si $u_0 \in D(A^2)$, on a montré dans l'exercice précédent que $\frac{du}{dt} \in D(A)$ et

$$\frac{d}{dt}Au = A\frac{du}{dt}$$

On calcule donc

$$\frac{d}{dt} < Au, u >=< A\frac{du}{dt}, u > + < Au, \frac{du}{dt} >= 2 < Au, \frac{du}{dt} > .$$

5. En prenant le produit scalaire avec $t\frac{du}{dt}$ et en intégrant de 0 à T on obtient

$$\int_0^T t|\frac{du}{dt}|^2 + \frac{1}{2}\int_0^T t < Au, \frac{du}{dt} >= 0$$

donc, eon intégrant par parties, et en utilisant la formule de la question 3 on obtient

$$\int_0^T t|\frac{du}{dt}|^2 + T < Au(T), u(T) > \frac{1}{4}(|u(T)|^2 - |u_0|^2) = 0$$

De plus, $|\frac{du}{dt}|^2$ est décroissante (cela se voit en prenant le produit scalaire de (**??**) avec $v = \frac{du}{dt}$), donc

$$\int_0^T t|\frac{du}{dt}|^2 \geq \frac{T^2}{2}|\frac{du}{dt}(T)|^2$$

. Comme $Au, u >\geq 0$, on a donc montré

$$T^2|\frac{du}{dt}|^2 \leq \frac{1}{2}|u_0|^2.$$

6. Comme $D(A^2)$ est dense dans H, on peut approcher $u_0 \in H$ par une suite $u_0^n \in D(A^2)$. On note ensuite u^n la solution de (1) avec donnée initiale u_0^n. On a $|u^n - u^p| \leq |u_0^n - u_0^p|$, et pour $t > 0$

$$|\frac{du^n}{dt} - \frac{du^p}{dt}| \leq \frac{1}{t}|u_0^n - u_0^p|$$

u^n converge donc uniformément vers $u \in C^1(]0, \infty[, H)$, et comme le graphe de A est fermé, on a $u(t) \in D(A)$ pour $t > 0$ et u est solution de (1).

⋆

Solution 3. *Noyau de la chaleur*

1. On prend la transformée de Fourier : $\frac{d\hat{u}}{dt} + |\xi|^2\hat{u} = 0$ donc $\hat{u} = \exp(-|\xi|^2 t)\hat{u_0}$, et

$$u = \mathcal{F}^{-1}\exp(-|\xi|^2 t) * u_0$$

On calcule

$$\mathcal{F}^{-1}\exp(-|\xi|^2 t) = \frac{1}{(4\pi t)^{\frac{n}{2}}}\exp(-\frac{|x|^2}{4t})$$

2. Comme $\frac{1}{(4\pi t)^{\frac{n}{2}}}\exp(-\frac{|x|^2}{4t})$ est dans $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ pour tout $t > 0$, on en déduit que $u \in C^\infty(]0, +\infty[, \mathbb{R}^n)$.

$\star$

Solution 4. *Unicité rétrograde pour l'équation de la chaleur*

1. On calcule

$$\dot{e}(t) = -2\int w\Delta w = 2\int |\nabla u|^2,$$

car $w = 0$ sur ∂U, et

$$\ddot{e} = 4\int \nabla u.\nabla \frac{du}{dt} = -4\int (\Delta u)^2$$

car $\frac{dw}{dt} = 0$ sur ∂U. On a donc

$$\dot{e}(t)^2 \leq 4(\int w\Delta w)^2 \leq 4(\int w^2)(\int(\Delta w)^2) \leq e(t)\ddot{e}(t).$$

2. $\ddot{f}(t) \geq 0$ donc f est convexe.

3. Si $u_1 \neq u_2$, il existe $t_1 < t_2 \leq T$ tels que $w(t_2) = 0$ et $e(t) > 0$ sur $[t_1, t-2[$. Comme f est convexe sur $[t_1, t-2[$, on a, pour $t_1 \leq t < t_2$ et $\theta \in [0,1]$

$$f((1-\theta)t_1 + \theta t) \leq (1-\theta)f(t_1) + \theta f(t)$$

donc

$$e((1-\theta)t_1 + \theta t) \leq e(t_1)^{1-\theta} e(t_2)^{\theta}$$

En faisant tendre t vers t_2, on obtient donc $e = 0$ sur $[t_1, t_2]$.

$\star$