Correction du Td n° 10 d'Analyse fonctionnelle

Transformée de Fourier

Séance du 17 avril 2015

Solution 1. *Quelques questions sur la transformée de Fourier*

1. $\mathbb{1}_A \in L^2$ donc $\widehat{\mathbb{1}_A} \in L^2$ par Plancherel. Par contre, si $\widehat{\mathbb{1}_A} \in L^1$, par inversion de Fourier, on aurait que $\mathbb{1}_A \in C$, ce qui est absurde.

2. La condition s'écrit en Fourier : $\hat{f}\hat{g} = 0$. Il suffit donc de prendre $f_1, g_1 \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ avec Supp(f_1) et Supp(g_1) et de poser $f = \mathcal{F}^{-1}f_1$, $g = \mathcal{F}^{-1}g_1$ (et ce sont bien des éléments de $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$).

Si on suppose de plus que les supports de f et g sont compacts, alors $\hat{f}$ et $\hat{g}$ sont analytiques. Comme les zéros de $\hat{f}$ et de $\hat{g}$ sont alors isolés (sauf si f ou g est nul), ceux de $\hat{f}\hat{g}$ le sont également et $\hat{f}\hat{g} \neq 0$. Par inversion de Fourier, on voit que $f * g \neq 0$.

3. En Fourier, on a $\sum_{i=1}^{k} a_i \xi^i \hat{u}(\xi) = 0$. Or $\hat{u}$ est analytique (pourquoi ?) donc par le principe des zéros isolés, $\hat{u} = 0$ et donc $u = 0$.

⋆

Solution 2. *Transformée de Fourier de vpx*

1. Pour tout $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$:

$$< x \,\mathrm{vp}\, x, \varphi > = < \mathrm{vp}\, x, x\varphi > = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{|x| \geq \varepsilon} \varphi(x)dx = \int_{\mathbb{R}} \varphi(x)dx = < 1, \varphi > .$$

Donc $x \,\mathrm{vp}\, x \equiv 1$ dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$.

2. Pour tout $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$, on a par définition de la transformée de Fourier des distributions :

$$\begin{aligned} < \mathcal{F}(\mathrm{vp}\, x), \varphi^v > &= < \mathrm{vp}\, x, \mathcal{F}(\varphi^v) > \\ &= < \mathrm{vp}\, x, (\mathcal{F}(\varphi))^v > \\ &= \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{-\infty}^{-\varepsilon} \frac{\mathcal{F}(\varphi)(-\xi)}{\xi} d\xi + \int_{\varepsilon}^{\infty} \frac{\mathcal{F}(\varphi)(-\xi)}{\xi} d\xi \\ &= - < \mathrm{vp}\, x, \mathcal{F}(\varphi) > . \end{aligned}$$

3. D'après la question 1, on a, comme $\mathcal{F}(1) = 2\pi\delta_0$:

$$2\pi\delta_0 = \mathcal{F}(x \,\mathrm{vp}\, x) = i\mathcal{F}(\mathrm{vp}\, x)',$$

donc $\mathcal{F}(\mathrm{vp}\, x)' = -2i\pi\delta_0$; on en déduit que $\mathcal{F}(\mathrm{vp}\, x) = -2i\pi(H + C)$, où H est la fonction de Heavyside et C est une constante. L'imparité donne $C = -1/2$; D'où :

$$\mathcal{F}(\mathrm{vp}\, x)(\xi) = -i\pi \frac{\xi}{|\xi|}.$$

⋆

Solution 3. *Théorème de Paley-Wiener*

1. Si T est une distribution à support compact, on peut écrire $\mathcal{F}(T)(\xi) =< T, e^{-ix\xi} >$. $\mathcal{F}(T)$ est donc analytique.

2. Pour $\xi \neq 0$, on a

$$\int_{\mathbb{R}} e^{-ix\xi} f(x)dx = \int m\mathbb{R}\frac{1}{(-i\xi)^N} e^{-ix\xi}\partial_x^N f(x)dx,$$

donc $|F(x)| \leq |\xi|^{-N} e^{R|Im(\xi)}$.

3. La borne sur F permet d'utiliser le théorème de convergence dominée pour conclure.

4. On intègre $e^{ix\xi}F(\xi)$ sur un contour rectangulaire

$$\int_{-A}^{A} e^{ix\xi}F(\xi)d\xi+\int_{0}^{\eta} e^{ix(A+i\rho)}F(\xi+i\rho)d\rho+\int_{A}^{-A} e^{ix(\xi+i\eta)}F(\xi+i\eta)d\xi+\int_{\eta}^{\rho} e^{ix(-A+i\rho)}F(\xi+i\rho)d\rho = 0$$

En passant à la limite quand A tend vers ∞, grâce aux bornes sur F, on obtient

$$f(x) = \int_{\mathbb{R}} e^{ix(\xi+i\eta)}F(\xi+i\eta)d\xi.$$

donc $|f(x)| \leq Ce^{R\eta - x\eta}$. Si on choisit $\eta > 0$ qui tend vers $+\infty$, alors pour $R < x$, on obtient $f(x) = 0$. On fait de même pour $x < -R$ avec $\eta < 0$.

5. Soit T est une distribution à support compact, on note p son ordre.

$$|\mathcal{F}(T)(\xi)| = | < T, e^{-ix\xi} > | \leq C\sum_{k=1}^{p} \|\partial^k e^{-ix\xi}\| \leq C(1+|\xi|^p).$$

Réciproquement, soit F, analytique, satisfait une telle condition. Alors $F \in \mathcal{S}'$. Soit $\rho_k(x) = k\rho(kx)$ une approximation de l'unité. Comme ρ_k est à support compact, $\widehat{\rho_k}$ satisfait les conditions de la question 2, donc $\widehat{\rho_k}F$ aussi, donc $\rho_k * \mathcal{F}^{-1}(F)$ est C^∞ à support dans $B(0, R+\frac{1}{k})$. Soit $g \in \mathcal{D}({}^c\bar{B}(0,R))$. On a alors, pour k assez grand

$$0 =< \rho_k * \mathcal{F}^{-1}(F), g >=< \mathcal{F}^{-1}(F), \rho_k * g > \longrightarrow < \mathcal{F}^{-1}(F), g >$$

donc $\mathcal{F}^{-1}(F)$ est à support dans $B(0,R)$.

⋆

Solution 4. *L'équation de Schrödinger*

1. On prend la transformée de Fourier par rapport à x de l'équation.

$$i\partial_t \widehat{u} - |\xi|^2\widehat{u} = 0,$$

donc on obtient $\widehat{u} = e^{it|xi|^2}\widehat{u_0}$. Comme la transformée de Fourier est un isomètrie de L^2 dans lui même, on obtient

$$\|u(t)\|_{L^2} = \|u_0\|_{L^2}.$$

2. $e^{it|\xi|^2}$ est borné, donc est dans $\mathcal{S}'$ et sa transformée de Fourier est bien définie (au sens de $\mathcal{S}'$).

3. On montre que pour α de partie réelle strictement négative, on a

$$\nabla\mathcal{F}^{-1}(e^{\alpha|\xi|^2}) = \frac{x}{2\alpha}\mathcal{F}^{-1}(e^{\alpha|\xi|^2}),$$

donc $\mathcal{F}^{-1}(e^{\alpha|\xi|^2}) = \mathcal{F}^{-1}(e^{\alpha|\xi|^2})(0)e^{\frac{|x|^2}{4\alpha}}$ On calcule ensuite

$$\mathcal{F}^{-1}(e^{\alpha|\xi|^2})(0) = \frac{1}{(2\pi)^n}\int e^{\alpha|\xi|^2}d\xi = \frac{1}{(2\pi)^n}\left(\frac{\pi}{-\alpha}\right)^{\frac{n}{2}}.$$

4. Soit $\phi \in \mathcal{S}$. On écrit

$$\begin{aligned} < \frac{1}{(-i4\pi bt)^{\frac{n}{2}}}e^{\frac{|x|^2}{-i4b}}, \phi > &= \lim_{\varepsilon\to 0} < \frac{1}{(4\pi(\varepsilon - ibt))^{\frac{n}{2}}}e^{\frac{|x|^2}{4(-\varepsilon+ib)}}, \phi > \\ &= \lim_{\varepsilon\to 0} < \mathcal{F}^{-1}(e^{(-\varepsilon+ib)|\xi|^2}), \phi > \\ &= \lim_{\varepsilon\to 0} < e^{(-\varepsilon+ib)|\xi|^2}, \mathcal{F}^{-1}(\phi) > \\ &=< e^{ib|\xi|^2}, \mathcal{F}^{-1}(\phi) > \\ &=< \mathcal{F}^{-1}(e^{ib|\xi|^2}), \phi > \end{aligned}$$

5. Si $u(t)$ est solution de l'équation de Schrödinger, alors $u(t) = \mathcal{F}^{-1}(e^{it|\xi|^2} * u_0$, donc pour $t > 0$ on a

$$\|u(t)\|_{L^\infty} \leq \|\mathcal{F}^{-1}(e^{it|\xi|^2})\|_{L^\infty}\|u_0\|_{L^1} \leq \frac{1}{(4\pi t)^{\frac{n}{2}}}\|u_0\|_{L^1}.$$

⋆