# Corrigé d'analyse fonctionnelle
# TD n° 10

## Théorie spectrale — Transformée de Fourier

Séance du 18 avril 2017

**Solution 1.** *Échauffement*

1. Comme $A$ est de mesure finie, $\mathbb{1}_A \in L^2$ donc $\widehat{\mathbb{1}_A} \in L^2$ par Plancherel. Par contre, si $\widehat{\mathbb{1}_A} \in L^1$, comme on a aussi $\mathbb{1}_A \in L^1$, la formule d'inversion de Fourier s'appliquerait, et on aurait

$$\mathbb{1}_A(x) = \int_{\mathbb{R}^d} \widehat{\mathbb{1}_A}(\xi) e^{2i\pi x\cdot\xi} d\xi, \quad \forall x \in \mathbb{R}^d.$$

En particulier, d'après le théorème de convergence dominée, $\mathbb{1}_A \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}^d)$, ce qui est absurde.

2. En prenant la transformée de Fourier de l'égalité $f * g = 0$, on trouve $\hat{f}\hat{g} = 0$. Il suffit donc de prendre $f_0, g_0 \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^d)$ à support compact, avec $\mathrm{supp}(f_0)$ et $\mathrm{supp}(g_0)$ disjoints, et de poser $f = \mathcal{F}^{-1}f_0$, $g = \mathcal{F}^{-1}g_0$. Ce sont bien des éléments de $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$, puisque $\mathcal{F}$ réalise un isomorphisme sur l'espace de Schwartz.

Si on suppose de plus que les supports de $f$ et $g$ sont compacts, alors $\hat{f}$ et $\hat{g}$ sont des fonctions analytiques (sur $\mathbb{C}^d$). En effet,

$$\hat{f}(z) = \int_{\mathbb{R}^d} f(x) e^{-2i\pi x\cdot z} dx$$

est bien défini quel que soit $z \in \mathbb{C}^d$, et différentiable (d'après les théorèmes usuels). Comme les zéros de $\hat{f}$ et de $\hat{g}$ sont alors isolés, ceux de $\hat{f}\hat{g}$ le sont également. Ainsi $\hat{f}\hat{g}$ n'est pas identiquement nul. Par l'inversion de Fourier, on voit que $f * g \neq 0$.

⋆

**Solution 2.** *Rayon spectral*

1. C'est un exercice classique. Posons $\ell := \inf_n \frac{a_n}{n}$, et supposons $\ell > -\infty$ pour simplifier. Soit $\varepsilon > 0$ et $N \in \mathbb{N}$ tel que $\frac{a_N}{N} \leq \ell + \varepsilon$. Si $n \gg N$, on peut faire la division euclidienne de $n$ par $N$, et l'on trouve $n = qN + r$, avec $q \geq 1$, et $0 \leq r < N$. En particulier, $a_n \leq qa_N + a_r$. On a donc

$$\frac{a_n}{n} \leq \frac{qa_N + a_r}{qN + r} \leq \frac{a_N}{N} + \frac{a_r}{qN} \leq 2\varepsilon,$$

si $q$ est assez grand (*i.e.* si $n \geq \varepsilon^{-1} \max_{j=0,\dots,N-1} |a_j|$). Cela prouve que $\frac{a_n}{n} \to \ell$.

2. On suppose que $T$ n'est pas nilpotent (*i.e.* $T^j \neq 0$ pour tout $j$), sans quoi le résultat est évident. Posons $b_n := \|T^n\|$. Pour tout $n, m \geq 0$, $b_{n+m} = \|T^{n+m}\| \leq \|T^n\|\|T^m\| = b_n b_m$. On pose alors $a_n = \log b_n$, qui est bien définie, et forme une suite sous-additive. Notons $\ell = \lim_{n\to+\infty} \frac{a_n}{n}$. Alors $\exp(\frac{a_n}{n}) = b_n^{1/n} = \|T^n\|^{1/n}$ converge vers $e^\ell$.

3. Si $X$ est un Hilbert, et si $T$ est hilbertien (c'est-à-dire $T^* = T$), alors

$$\|T\|^2 = \sup_{\substack{x\in X \\ \|x\|=1}} \|Tx\|^2 = \sup_{\substack{x\in X \\ \|x\|=1}} \langle T^*Tx, x\rangle \leq \|T^*T\| = \|T^2\|.$$

Par ailleurs, on a bien sûr $\|T^2\| \leq \|T\|^2$, puisque $\|\cdot\|$ est une norme d'algèbre, donc lorsque $T$ est hermitien, $\|T^2\| = \|T\|^2$. Dès lors, si on considère la sous-suite $\{b_{2^n}\}$ (avec les notations de la question précédente), on voit que celle-ci est constante, égale à $\|T\|$. Cela implique donc que $r(T) = \|T\|$.

4. Supposons que la série donnée par $R_z(T)$ converge absolument. Alors $R_z(T)$ définit un élément de $\mathcal{L}(X)$. De plus, $(\frac{1}{z}I - T)R_z(T) = I$ et $R_z(T)(\frac{1}{z}I - T) = I$, ce qui prouve que $1/z \notin \mathrm{Sp}(T)$. Or la formule qui définit $R_z(T)$ est une série entière, donc son rayon de convergence $R$ est donné par la formule de d'Alembert, et vérifie

$$\frac{1}{R} = \limsup_{k \to +\infty} \|T^k\|^{\frac{1}{k-1}} = r(T).$$

Cela prouve que $\max_{\lambda \in \mathrm{Sp}(T)} |\lambda| \leq r(T)$, et si l'inégalité était stricte, par la propriété d'unique continuation holomorphe, la formule donnant $R_z(T)$ resterait valable au-delà de $|z| = 1/r(T)$, ce qui contredit la définition du rayon de convergence. On a donc $r(T) = \max_{\lambda \in \mathrm{Sp}(T)} |\lambda|$.

⋆

**Solution 3.** *Le calcul fonctionnel définit une application isométrique*

1. Soit $\mu \in \mathrm{Sp}(P(A))$. Décomposons le polynôme $P - \mu$ en produit de facteurs irréductibles, soit $P(X) - \mu = \prod_j (X - \alpha_j)$. En évaluant cette égalité en $A$, on voit que nécessairement, l'un des $\alpha_j$ est dans $\mathrm{Sp}(A)$, sinon le produit de droite est inversible. Notons-le $\alpha_{j_0}$. On a donc $P(\alpha_{j_0}) - \mu = 0$, c'est-à-dire $\mu \in P(\mathrm{Sp}(A))$.

Réciproquement, si $\lambda \in \mathrm{Sp}(A)$, alors écrivons $P(X) - P(\lambda) = (X - \lambda) \cdot \prod_j (X - \kappa_j)$, de sorte que $P(A) - P(\lambda)I = (A - \lambda I) \prod_j (A - \kappa_j I) = \left(\prod_j (A - \kappa_j I)\right)(A - \lambda I)$. Cela prouve que $P(A) - P(\lambda)I$ ne peut pas être inversible, *i.e.* que $P(\lambda) \in \mathrm{Sp}(P(A))$. Ainsi $\mathrm{Sp}(P(A)) = P(\mathrm{Sp}(A))$.

2. On sait que $A$ est hermitien, donc pour tout polynôme $P$, on a $(P(A))^* = \bar{P}(A)$. Ainsi

$$\|P(A)\|^2_{\mathcal{L}(H)} = \|(P(A))^* P(A)\|_{\mathcal{L}(H)} = \|(P\bar{P})(A)\|_{\mathcal{L}(H)},$$

où la dernière égalité provient de ce que $P \mapsto P(A)$ est un morphisme d'algèbres. Or d'après l'exercice précédent,

$$\begin{aligned}
\|(P\bar{P})(A)\|_{\mathcal{L}(H)} &= r((P\bar{P})(A)) \\
&= \max_{\mu \in \mathrm{Sp}((P\bar{P})(A))} |\mu| \\
&= \max_{\lambda \in \mathrm{Sp}(A)} |(P\bar{P})(\lambda)| \\
&= \||P|^2\|_{L^\infty(\mathrm{Sp}(A))} = \|P\|^2_{L^\infty(\mathrm{Sp}(A))},
\end{aligned}$$

ce qu'il fallait démontrer. Or $\mathrm{Sp}(A)$ est compact. Donc d'après le théorème de Weierstrass, l'ensemble des polynômes sur $\mathrm{Sp}(A)$ est dense dans l'ensemble des fonctions continues sur $\mathrm{Sp}(A)$, pour la norme uniforme. L'isométrie $P \mapsto P(A)$ se prolonge ainsi de manière unique en une application

$$\begin{cases} \mathcal{C}^0(\mathrm{Sp}(A)) \longrightarrow \mathcal{L}(H) \\ \qquad f \longmapsto f(A) \end{cases}$$

également isométrique.

⋆

**Solution 4.** *Translations*

1. Si $g \in V^\perp$, alors pour tout $a \in \mathbb{R}$ fixé, $\int_\mathbb{R} g(t)\overline{\tau_a f(t)}dt = 0$, où $\tau_a f : t \mapsto f(t-a)$. Or

$$\widehat{\tau_a f}(\xi) = \int_\mathbb{R} f(x-a)e^{-ix\xi}dx = e^{-ia\xi}\hat{f}(\xi),$$

car cela est vrai pour les fonctions de $\mathcal{S}(\mathbb{R})$, puis pour toute fonction de $L^2$ en utilisant la continuité de $\tau_a$ et de la transformée de Fourier. À présent, par Plancherel,

$$0 = \int_\mathbb{R} g(t)\overline{\tau_a f(t)}dt = \int_\mathbb{R} \hat{g}(\xi)\overline{\widehat{\tau_a f}(\xi)}d\xi = \int_\mathbb{R} \hat{g}(\xi)\overline{\hat{f}(\xi)}e^{ia\xi}d\xi,$$

ce qui est vrai pour tout $a$. De la sorte, si l'on pose $F := \hat{g}\overline{\hat{f}}$, on a $F \in L^1(\mathbb{R})$ et $\hat{F} \equiv 0$. Donc la formule d'inversion s'applique, et donc $F \equiv 0$. Pour prouver la réciproque, il suffit de remonter les calculs.

2. $V$ est dense dans $L^2$ si et seulement si on ne peut trouver une fonction $\hat{g} \in L^2$ non nulle satisfaisant la condition de la question précédente. Si l'ensemble des zéros de $\hat{f}$ est de mesure non nulle, on peut trouver $R > 0$ tel que la mesure de $[-R,R] \cap \{\hat{f} = 0\} =: Z_R$ soit strictement positive. Alors on peut poser $g = \mathcal{F}^{-1}(\mathbb{1}_{Z_R}) \in L^2(\mathbb{R})$, de sorte que $g \neq 0$ et $g \in V^\perp$. Réciproquement, si $\hat{f}$ est non nulle en dehors d'un ensemble de mesure nulle, $g \in V^\perp$ implique nécessairement $\hat{g} \equiv 0$, soit $g \equiv 0$.

⋆

**Solution 5.** *Théorème de Bochner*

1. Il est facile de vérifier que $f(0) = \mu(\mathbb{R}^d)$, que $f$ est continue, et que $f(-\xi) = \overline{f(\xi)}$, puisque $\mu$ est réelle et positive. On calcule ensuite

$$\begin{aligned}\sum_{j,k=1}^n f(\xi_j - \xi_k)z_j\overline{z_k} &= \sum_{j,k=1}^n \int_{\mathbb{R}^d} e^{ix\cdot(\xi_j-\xi_k)}z_j\overline{z_k}\mu(dx)\\ &= \int_{\mathbb{R}^d}\left(\sum_{j=1}^n z_j e^{ix\cdot\xi_j}\right)\overline{\left(\sum_{k=1}^n z_k e^{ix\cdot\xi_k}\right)}\mu(dx)\\ &= \int_{\mathbb{R}^d}\left|\sum_{j=1}^n z_j e^{ix\cdot\xi_j}\right|^2\mu(dx) \geq 0.\end{aligned}$$

2. Soit $y \in \mathbb{R}^d$. On applique la propriété selon laquelle $f$ est semi-définie positive, avec $\xi_1 = y$, $\xi_2 = 0$, $z_2 = 1$ et $z_1 \in \mathbb{C}$ tel que $|z_1| = 1$. On a

$$2f(0) + f(y)z_1 + f(-y)\bar{z}_1 \geq 0.$$

On choisit $z_1$ tel que $z_1 f(y) = -|f(y)|$ pour obtenir l'inégalité souhaitée.

3. Si $\psi \in \mathcal{S}$ est strictement positive, $\psi = \theta^2$ avec $\theta = \sqrt{\psi} \in \mathcal{S}$, donc

$$\ell(\psi) = \int_{\mathbb{R}^d} f(\xi)\widehat{\theta^2}(\xi)d\xi = \iint_{\mathbb{R}^d} f(\xi)\hat{\theta}(\eta)\hat{\theta}(\xi-\eta)d\eta d\xi = \iint_{\mathbb{R}^d} f(\xi-\eta)\hat{\theta}(\xi)\overline{\hat{\theta}(\eta)}d\eta d\xi \geq 0,$$

où l'on a utilisé que $\hat{\theta}(\xi-\eta) = \overline{\hat{\theta}(\eta-\xi)}$. La positivité découle de ce qu'on peut écrire l'intégrale ci-dessus comme une limite de sommes de Riemann, toutes positives.

4. Soit $\phi \in \mathcal{S}$. Comme $\phi$ est à décroissance rapide, il existe $R > 0$ tel que pour $|x| \geq R$, on a $|\phi(x)| \leq \frac{\varepsilon + \|\phi\|_{L^\infty}}{(1+|x|^4)^d}$. On peut ensuite trouver $\lambda > 0$ assez petit tel que

$$\|\phi\|_{L^\infty} \leq \frac{\varepsilon + \|\phi\|_{L^\infty}}{(1+\lambda R^4)^d}.$$

De la sorte, si $x \in \mathbb{R}^d$,

— ou bien $\forall 1 \leq j \leq d$, $|x_j| \leq R$, et alors

$$|\phi(x)| \leq \|\phi\|_{L^\infty} \leq \frac{\varepsilon + \|\phi\|_{L^\infty}}{(1+\lambda R^4)^d} \leq (\varepsilon + \|\phi\|_{L^\infty}) \prod_{j=1}^{d} \frac{1}{1+\lambda x_j^4} = (\varepsilon + \|\phi\|_{L^\infty}) K_\lambda(x).$$

— ou bien l'une des composantes de $x$ est plus grande que $R$, et alors $|x| \geq R$, d'où

$$|\phi(x)| \leq \frac{\varepsilon + \|\phi\|_{L^\infty}}{(1+|x|^4)^d} \leq (\varepsilon + \|\phi\|_{L^\infty}) \prod_{j=1}^{d} \frac{1}{1+\lambda x_j^4},$$

car pour chaque $j$, $1 + \lambda x_j^4 \leq 1 + \lambda |x|^4 \leq 1 + |x|^4$.

5. Commençons par remarquer que pour tout $\lambda > 0$, $K_\lambda$ est une fonction $\mathcal{C}^\infty$ dont les dérivées décroissent plus vite que $K_\lambda$, donc $\hat{K}_\lambda$ décroit plus vite que tout polynôme. En particulier, $\hat{K}_\lambda \in L^1$.

Ensuite, on veut appliquer la question 3 à $\psi_\varepsilon := (\varepsilon + \|\phi\|_{L^\infty}) K_\lambda - \phi$. C'est possible, car quitte à remplacer $\varepsilon$ par $2\varepsilon$, on peut supposer que $\psi_\varepsilon > 0$. D'autre part, $\theta_\varepsilon := \sqrt{\psi_\varepsilon} \in L^1$, donc $\hat{\theta}_\varepsilon$ est une fonction continue, à décroissance rapide, ce qui fait que l'on peut appliquer le même raisonnement de somme de Riemann à $\theta_\varepsilon$, et trouver que $\ell(\psi_\varepsilon) \geq 0$.

Ainsi l'on trouve que

$$\ell(\phi) \leq (\varepsilon + \|\phi\|_{L^\infty}) \ell(K_\lambda) = (\varepsilon + \|\phi\|_{L^\infty}) \int_{\mathbb{R}^d} \hat{K}_\lambda(\xi) f(\xi) d\xi.$$

6. On note que $K_\lambda(x) = K_1(\lambda^{1/4} x)$. Donc pour tout $\xi \in \mathbb{R}^d$,

$$\hat{K_\lambda}(\xi) = \frac{1}{\lambda^{\frac{d}{4}}} \hat{K_1}\left(\frac{\xi}{\lambda^{\frac{1}{4}}}\right).$$

On a donc, quand $\lambda$ tend vers 0,

$$\int_{\mathbb{R}^d} \hat{K_\lambda}(\xi) f(\xi) d\xi = \int_{\mathbb{R}^d} \hat{K_1}(\xi) f(\lambda^{\frac{1}{4}} \xi) d\xi \longrightarrow f(0),$$

d'après le théorème de convergence dominée. On trouve donc

$$|\ell(\phi)| \leq \varepsilon + \|\phi\|_{L^\infty},$$

et en faisant tendre $\varepsilon$ vers 0, on obtient $|\ell(\phi)| \leq \|\phi\|_{L^\infty}$. D'après le théorème de Riesz, on peut donc prolonger $\ell$ en une mesure de probabilité $\mu$ positive. Au sens des distributions, on a $\hat{f} = \mu$ donc

$$f = \int_{\mathbb{R}^d} e^{i\xi \cdot x} \mu(dx),$$

en prenant par exemple $\phi(x) = e^{ix\cdot\xi}$, qui satisfait $\hat{\phi} = \delta_\xi$, dans l'égalité

$$\int_{\mathbb{R}^d} \hat{\phi}(\xi) f(\xi) d\xi = \int_{\mathbb{R}^d} \phi(x) \mu(dx).$$

⋆