Corrigé d'analyse fonctionnelle
TD n° 10

Espaces de Sobolev

Séance du 2 mai 2018

Solution 1. *Échauffement : petites questions sur $H^s(\mathbb{R}^d)$*

1. On remarque que $\hat{\delta}_0 = 1$, puis que $\int_{\mathbb{R}^d}(1+|\xi|^2)^s d\xi < +\infty$ si et seulement si $s < -d/2$.
Remarque : Pour montrer l'injection de H^s dans $\mathcal{C}^0$, c'est dans la même veine : pour avoir le résultat, on peut montrer que $\hat{u} \in L^1(\mathbb{R}^d)$ dès que $s > d/2$, puis conclure par la formule d'inversion (dans L^2), et le théorème de convergence dominée.

2. Il suffit de remarquer que $(1+|\xi|^2)^{s_1} \geq (1+|\xi|^2)^{s_2}$ pour $s_1 \geq s_2$ et $\xi \in \mathbb{R}^d$, et l'on obtient la continuité de l'injection $H^{s_1} \hookrightarrow H^{s_2}$.

3. Soit m l'ordre de u dans $\mathcal{E}'$. La transformée de Fourier de u est bien définie car $\mathcal{E}' \subset \mathcal{S}'$ (on a même vu qu'il s'agit alors d'une fonction entière). On veut montrer qu'il existe $s \in \mathbb{R}$ pour lequel $\xi \mapsto \hat{u}(\xi)(1+|\xi|^2)^{s/2} \in L^2$. On prend $\varphi \in \mathcal{S}$ et on évalue :

$$\begin{aligned}
\langle \hat{u}(1+|\xi|^2)^{s/2}, \varphi \rangle &= \langle \hat{u}, (1+|\xi|^2)^{s/2}\varphi \rangle \\
&= \left\langle u, \mathcal{F}\left((1+|\xi|^2)^{s/2}\varphi\right)\right\rangle \\
&\leq C \sup_{\substack{|\alpha|\leq m \\ x\in K}} \left|\partial^\alpha \mathcal{F}\left((1+|\xi|^2)^{s/2}\varphi\right)\right| \\
&\leq C \int_{\mathbb{R}^d} (1+|\xi|^2)^{m/2}(1+|\xi|^2)^{s/2}|\varphi(\xi)| d\xi \\
&\leq C \left(\int_{\mathbb{R}^d} (1+|\xi|^2)^{m+s} d\xi\right)^{\frac{1}{2}} \|\varphi\|_{L^2}
\end{aligned}$$

(on a utilisé successivement : les propriétés fondamentales de la transformée de Fourier, la définition d'une distribution à support compact, et pour la dernière inégalité, c'est bien sûr Cauchy-Schwarz). Si $s < -m - \frac{d}{2}$, la dernière intégrale est finie. Grâce à la densité de $\mathcal{S}$ dans L^2, on voit donc que $\hat{u} \cdot (1+|\xi|^2)^{s/2}$ définit une forme linéaire sur L^2, et on conclut par dualité.

4. Comme l'application $t \mapsto e^{it}$ est 1-lipschitzienne, on a

$$|e^{-ix\cdot\xi} - e^{-iy\cdot\xi}| \leq |x\cdot\xi - y\cdot\xi| \leq |x-y||\xi|,$$

par Cauchy-Schwarz sur $\mathbb{R}^d$. Et donc en interpolant, on a, pour tout $\alpha \in [0,1]$,

$$|e^{-ix\cdot\xi} - e^{-iy\cdot\xi}| = |e^{-ix\cdot\xi} - e^{-iy\cdot\xi}|^\alpha |e^{-ix\cdot\xi} - e^{-iy\cdot\xi}|^{1-\alpha} \leq C|x-y|^\alpha|\xi|^\alpha.$$

Or, pour $u \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$,

$$u(x) - u(y) = c_d \int_{\mathbb{R}^d} \hat{u}(\xi)\left(e^{ix\cdot\xi} - e^{iy\cdot\xi}\right) d\xi.$$

Donc, pour tout $\varepsilon > 0$,

$$\begin{aligned}
\frac{|u(x)-u(y)|}{|x-y|^\alpha} &\leq \int_{\mathbb{R}^d} |\xi|^\alpha |\hat{u}(\xi)| d\xi \\
&\leq \left(\int_{\mathbb{R}^d} \frac{d\xi}{(1+|\xi|)^{d+\varepsilon}} \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_{\mathbb{R}^d} (1+|\xi|)^{d+\varepsilon+2\alpha} |\hat{u}(\xi)|^2 d\xi \right)^{\frac{1}{2}} \\
&\leq C(\varepsilon) \|u\|_{H^{\frac{d+\varepsilon}{2}+\alpha}}.
\end{aligned}$$

Donc finalement, pour tout $\alpha \in]0, s-\frac{d}{2}[$, on a (avec $\varepsilon = 2s-d-2\alpha > 0$),

$$\frac{|u(x)-u(y)|}{|x-y|^\alpha} \leq C(\alpha) \|u\|_{H^s}.$$

Enfin (et c'est encore la même preuve que mentionnée à la question 1),

$$\begin{aligned}
|u(x)| = \left| \int_{\mathbb{R}^d} \hat{u}(\xi) e^{ix\cdot\xi} d\xi \right| &\leq \int_{\mathbb{R}^d} |\hat{u}(\xi)| d\xi \leq \int_{\mathbb{R}^d} |\hat{u}(\xi)| \frac{(1+|\xi|^2)^{s/2}}{(1+|\xi|^2)^{s/2}} d\xi \\
&\leq \left(\int_{\mathbb{R}^d} |\hat{u}(\xi)|^2 (1+|\xi|^2)^s d\xi \right)^{1/2} \left(\int_{\mathbb{R}^d} \frac{d\xi}{(1+|\xi|^2)^s} \right)^{1/2} \leq C(s) \|u\|_{H^s},
\end{aligned}$$

car $s > d/2$, et donc $1/(1+|\xi|^2)^s \in L^1(\mathbb{R}^d, d\xi)$. Finalement,

$$\|u\|_{L^\infty} + \sup_{x\neq y} \frac{|u(x)-u(y)|}{|x-y|^\alpha} \leq C(\alpha) \|u\|_{H^s}.$$

Par densité de $\mathcal{S}$, on conclut que $H^s \subset C^\alpha$ avec injection continue.

$\star$

Solution 2. *Cas limite d'injection de Sobolev*

1. On considère la fonction radiale définie par $f(r) = \chi(r) \ln^{1/3} r$, où χ est une fonction $\mathcal{C}_c^\infty$ sur $\mathbb{R}$, qui vaut 1 au voisinage de 0. On calcule, sur $\{\chi \equiv 1\}$, $\partial_r f = \frac{1}{3r \ln^{2/3} r}$, et f est continue en sur le disque unité, donc en calculant l'intégrale en coordonnées polaires,

$$\|f\|_{H^1}^2 = 2\pi \int_0^C \left(\ln^{2/3} r + \frac{1}{9r^2 \ln^{4/3} r} \right) r dr < \infty.$$

Ainsi $f \in H^1$, mais bien sûr, $f \notin L^\infty$.

2. On a $|u(x_1, x_2)| \leq \int_{x_1} |\partial_{x_1} u(t, x_2)| dt$, et symétriquement pour x_2, donc :

$$|u(x_1,x_2)|^2 \leq \int_{x_1} |\partial_{x_1} u(t,x_2)| dt \cdot \int_{x_2} |\partial_{x_2} u(x_1, t)| dt.$$

En intégrant en x_1 et en x_2, vu que les variables sont séparées :

$$\|u\|_{L^2}^2 \leq \iint |\partial_{x_2} u(x_1,t)| dt dx_1 \cdot \iint |\partial_{x_1} u(t,x_2)| dt dx_2 \leq \|\partial_{x_1} u\|_{L^1} \|\partial_{x_2} u\|_{L^1}.$$

3. On applique ce qui précède à u^θ, dont les dérivées sont $\theta u^{\theta-1} \partial_{x_i} u$. Ainsi,

$$\begin{aligned}
\|u\|_{L^{2\theta}}^{2\theta} = \|u^\theta\|_{L^2}^2 &\leq \|\theta u^{\theta-1} \partial_{x_1} u\|_{L^1} \|\theta u^{\theta-1} \partial_{x_2} \theta\|_{L^1} \\
&\leq \theta^2 \|u^{\theta-1}\|_{L^2} \|\partial_{x_1} u\|_{L^2} \|u^{\theta-1}\|_{L^2} \|\partial_{x_2} u\|_{L^2} \leq \theta^2 \|u\|_{L^{2(\theta-1)}}^{2(\theta-1)} \|\nabla u\|_{L^2}^2.
\end{aligned}$$

En prenant la racine carrée, on obtient l'estimée voulue.

4. La concavité du logarithme s'écrit, pour $x, y > 0$, $\lambda \in [0,1]$:

$$\lambda \ln x + (1-\lambda) \ln y \leq \ln\left(\lambda x + (1-\lambda) y\right),$$

soit encore : $x^\lambda y^{1-\lambda} \leq \lambda x + (1-\lambda) y$. On choisit donc $\lambda = (\theta-1)/\theta$, $x = \|u\|_{L^{2(\theta-1)}}$ et $y = \|\nabla u\|_{L^2}$, pour obtenir

$$\|u\|_{L^{2\theta}} \leq (\theta - 1)\|u\|_{L^{2(\theta-1)}} + \|\nabla u\|_{L^2}.$$

On peut donc même choisir $C(\theta) = \theta$.

On sait que $H^1 \hookrightarrow L^2$, donc avec $\theta = 2$, on obtient que $H^1 \hookrightarrow L^4$. Puis par récurrence immédiate, on obtient $H^1 \hookrightarrow L^{2k}$, pour $k \in \mathbb{N}$. Enfin, pour tout $q \in [2, \infty[$, on interpole entre L^2 et L^{2k} avec $k \geq q/2$, et ainsi $H^1 \hookrightarrow L^q$.

⋆

Solution 3. *L'équation des ondes*

1. On considère la transformation de Fourier en $x \in \mathbb{R}^N$ de l'équation, et on se ramène donc à chercher une solution $t \mapsto \hat{u}(t,\xi)$ de l'équation différentielle ordinaire :

$$\begin{cases} \partial_{tt}^2 \hat{u} + |\xi|^2 \hat{u} = 0 \text{ dans } \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N, \\ \hat{u}(0,\cdot) = \hat{u}_0,\ \partial_t \hat{u}(0,\cdot) = \hat{u}_1 \text{ dans } \mathbb{R}^N, \end{cases} \tag{1}$$

L'unique solution de cette équation est

$$\hat{u}(t,\xi) = \cos(t|\xi|)\hat{u}_0(\xi) + \frac{\sin(t|\xi|)}{|\xi|}\hat{u}_1(\xi),$$

On en déduit l'unique solution en inversant la transformée de Fourier. En dimension 1, on peut faire un calcul plus explicite et on retrouve la formule dite de d'Alembert.

2. Comme $\operatorname{supp} \widehat{f} \subset \{\xi, 1 \leq |\xi| \leq 2\}$, on peut écrire $\widehat{f} = \chi \widehat{f}$ avec χ radiale telle que $\chi(\xi) = 0$ pour $|\xi| \leq \frac{1}{2}$ et $|\xi| \geq 3$, et $\chi(\xi) = 1$ pour $1 \leq |\xi| \leq 2$. On a donc

$$\mathcal{F}^{-1}(e^{it|\xi|}\widehat{f}) = \mathcal{F}^{-1}(e^{it|\xi|}\widehat{f}\chi) = f * \mathcal{F}^{-1}(e^{it|\xi|}\chi(\xi)),$$

d'où la formule

$$K(t,x) = c_N \int_{\mathbb{R}^N} \chi(\xi) e^{it|\xi| + ix\cdot\xi} d\xi,$$

3. On écrit en coordonnées polaires

$$K(t,x) = c_N \int_{r=0}^{+\infty} r^{N-1}\chi(r) \int_{\omega \in \mathbb{S}^{N-1}} e^{ir(t+x\cdot\omega)} d\omega dr.$$

L'idée est simple : on veut faire des intégrations par partie en r, en intégrant l'exponentielle pour gagner des puissances de t. En effet,

$$e^{ir(t+x\cdot\omega)} = \frac{i}{t + x\cdot\omega}\partial_r e^{ir(t+x\cdot\omega)}$$

Pour $|x| \leq \frac{t}{2}$, on a

$$\left|\frac{i}{t+x\cdot\omega}\right| \leq \frac{2}{t},$$

donc on peut itérer le processus, et gagner autant de puissances de t que l'on veut.

La partie délicate concerne donc la tranche $\frac{t}{2} \leq |x|$. On écrit

$$\begin{aligned} K(t,x) &= c_N \int_{r=\frac{1}{2}}^{3} \chi(r) r^{N-1} e^{itr} \int_{\omega \in \mathbb{S}^{N-1}} e^{irx\cdot\omega} d\omega dr \\ &= c_N \int_{r=\frac{1}{2}}^{3} \chi(r) r^{N-1} e^{itr} \int_{\omega \in \mathbb{S}^{N-1}} e^{ir|x|\omega_1} d\omega dr \\ &= \tilde{c}_N \int_{r=\frac{1}{2}}^{3} \chi(r) r^{N-1} e^{itr} \int_{\theta \in \mathbb{S}} e^{ir|x|\cos(\theta)} |\sin(\theta)|^{N-2} d\theta dr \end{aligned}$$

où l'on a utilisé l'invariance de l'intégrale en ω par rotation, puis où l'on a intégré en $(\omega_2, \ldots, \omega_{N-1})$. À présent, on intègre par partie en θ, et on voit que l'on peut faire $\lceil \frac{N-2}{2} \rceil$ intégrations par parties grâce au facteur $\sin(\theta)$, et l'on ne crée pas de termes de bord. À chaque intégration par partie, un facteur $\frac{1}{|x|}$ apparaît, et comme $|x| \lesssim t$ sur cette tranche, on obtient une première estimée de décroissance. Pour « gagner » encore un peu, il faut remarquer que, si $y > 0$, alors

$$\int_{-\pi}^{\pi} e^{iy\cos\theta} d\theta \sim_{y\to+\infty} \frac{C}{\sqrt{y}}.$$

Cela provient d'un développement en série de Taylor de $\theta \mapsto \cos\theta$ au voisinage de 0 (lemme de phase stationnaire). On obtient donc la décroissance voulue.

4. On a vu à la question 1 que

$$u(t,x) = \frac{1}{2}(K(t,x) + K(-t,x)) * u_0 + \frac{1}{2i}(K(t,x) - K(-t,x)) * \mathcal{F}^{-1}\left(\frac{\widehat{u_1}(\xi)}{|\xi|}\right),$$

donc

$$|u(t,x)| \leq (\|K(t,\cdot)\|_\infty + \|K(-t,\cdot)\|_\infty)(C_{u_0} + C_{u_1}) \lesssim \frac{1}{|t|^{\frac{N-1}{2}}}.$$

$\star$

Solution 4. *Théorème de Riesz-Fréchet-Kolmogorov*

1. On applique le théorème d'Ascoli. Tout d'abord, $\rho_n * f$ est régulière, et donc $(\rho_n * f)|_{\overline{\Omega \cap B(0,R)}} \in C^0(\overline{\Omega \cap B(0,R)})$. Ensuite,

$$\|\rho_n * f\|_{L^\infty} \leq \|\rho_n\|_{L^{p'}} \|f\|_{L^p} \leq C_n.$$

Ainsi $\mathcal{F}_{n,R}$ est bornée uniformément (en f) dans $C^0(\overline{\Omega \cap B(0,R)})$. De plus, pour $x, y \in \overline{\Omega}$,

$$\begin{aligned} |(\rho_n * f)(x) - \rho_n * f(y)| &= \left| \int_{\mathbb{R}^d} (\rho_n(x-z) - \rho_n(y-z)) f(z) dz \right| \\ &\leq \left(\int_{B(x,\frac{1}{n}) \cup B(y,\frac{1}{n})} |\rho_n(x-z) - \rho_n(y-z)|^{p'} dz \right)^{1/p'} \|f\|_{L^p} \\ &\leq C \left(\int_{B(x,\frac{1}{n}) \cup B(y,\frac{1}{n})} \|\nabla\rho_n\|_{C^0(\mathbb{R}^n)}^{p'} |x-y|^{p'} dz \right)^{1/p'} \\ &\leq C \|\nabla\rho_n\|_{C^0(\mathbb{R}^n)} n^{-d/p'} |x-y| \leq C'_n |x-y|, \end{aligned}$$

où C'_n dépend de n mais pas de f. Donc $\mathcal{F}_{n,R}$ est équicontinue. Par le théorème d'Ascoli, $\mathcal{F}_n$ est relativement compacte dans $C^0(\overline{\Omega \cap B(0,R)})$.

2. En appliquant l'inégalité de Hölder avec la mesure $\rho_n(h)dh$, on a

$$\begin{aligned}
|(\rho_n * f)(x) - f(x)| &= \left| \int_{\mathbb{R}^d} \rho_n(h)(f(x-h) - f(x))dh \right| \\
&\leq \Big(\int_{\mathbb{R}^d} |f(x-h) - f(x)|^p \rho_n(h)dh \Big)^{1/p} \Big(\int_{\mathbb{R}^d} 1 \cdot \rho_n(h)dh \Big)^{p'} \\
&\leq \Big(\int_{\mathbb{R}^d} |f(x-h) - f(x)|^p \rho_n(h)dh \Big)^{1/p},
\end{aligned}$$

car $\int_{\mathbb{R}^d} \rho_n = 1$. Ainsi, par Fubini,

$$\begin{aligned}
\int_\Omega |(\rho_n * f)(x) - f(x)|^p dx &\leq \int_{x\in\Omega} \int_h |f(x-h) - f(x)|^p \rho_n(h)dhdx \\
&= \int_h \rho_n(h) \int_{x\in\Omega} |f(x-h) - f(x)|^p dxdh \\
&\leq \int_{h\in B(0,1/n)} \rho_n(h) \|\tau_h f - f\|^p_{L^p(\Omega)} dh.
\end{aligned}$$

Soit donc $\delta > 0$ qui convient pour (ii), et $N \geq 1/\delta$. Alors $h \in B(0, 1/n)$ entraîne que $\|\tau_h f - f\|_{L^p(\Omega)} \leq \varepsilon$, et donc

$$\|\rho_n * f - f\|^p_{L^p(\Omega)} \leq \varepsilon^p \int_{h\in B(0,1/n)} \rho_n(h)dh \leq \varepsilon^p.$$

3. Soit $\varepsilon > 0$. Soit $R > 0$ qui convient pour (iii), et N qui convient pour la question 2. Par la question 1, $\mathcal{F}_{N,R}$ est relativement compacte dans $C^0(\overline{\Omega \cap B(0,R)})$, et donc dans $L^p(\Omega \cap B(0,R))$, comme $\Omega \cap B(0,R)$ est de mesure finie. En particulier, $\mathcal{F}_{N,R}$ est précompacte : on peut recouvrir cet ensemble par un nombre fini k de boules de rayon ε, que l'on note $B((\rho_N * f_1)|_{\overline{\Omega\cap B(0,R)}}, \varepsilon), \ldots, B((\rho_N * f_k)|_{\overline{\Omega\cap B(0,R)}}, \varepsilon)$.

Par la question 2 et par (iii), on voit que $\mathcal{F}$ est recouverte par les boules de rayon quintuple : $B(f_1, 5\varepsilon), \ldots, B(f_k, 5\varepsilon)$. En effet, si $f \in \mathcal{F}$, par ce qui précède, il existe j tel que est telle que $(\rho_N * f)|_{\overline{\Omega\cap B(0,R)}} \in B(\rho_N * f_j, \varepsilon)$, et donc

$$\begin{aligned}
\|f - f_j\|_{L^p} &\leq \|f - f_j\|_{L^p(\Omega\cap B(0,R))} + \|f\|_{L^p(\Omega\setminus B(0,R))} + \|f_j\|_{L^p(\Omega\setminus B(0,R))} \\
&\leq \|f - \rho_N * f\|_{L^p(\Omega\cap B(0,R))} + \|\rho_N * f - \rho_N * f_i\|_{L^p(\Omega\cap B(0,R))} \\
&\quad + \|\rho_N * f_i - f_i\|_{L^p(\Omega\cap B(0,R))} + \|f\|_{L^p(\Omega\setminus B(0,R))} + \|f_i\|_{L^p(\Omega\setminus B(0,R))} \\
&\leq 5\varepsilon,
\end{aligned}$$

puisque $\forall g \in L^p$, $\|\rho_N * g\|_{L^p} \leq \|\rho_N\|_{L^1} \|g\|_{L^p} = \|g\|_{L^p}$ (pour le montrer, on applique également Hölder dans la définition de $|\rho_N * g(x)|$, avec la mesure $\rho_N(y)dy$, comme ci-dessus).

Ainsi, $\mathcal{F}$ est précompacte dans $L^p(\Omega)$, donc relativement compacte, car $L^p(\Omega)$ est complet.

4. $f \in \mathcal{C}^0_c(\mathbb{R}^d)$ est uniformément continue (car à support compact). Cela signifie exactement que

$$\lim_{h\to 0} \sup_{x\in\mathbb{R}^d} |f(x+h) - f(x)| = 0,$$

qui est le résultat demandé.

5. Soit $\varepsilon > 0$, il existe $g \in \mathcal{C}_c^0(\mathbb{R}^d)$, tel que $\|f-g\|_{L^p} < \varepsilon$. Le support de g est inclu dans $B(0,R)$. Soit alors $\delta \in]0,1[$ tel que si $|h| < \delta$, $\|g - \tau_h g\|_{\mathcal{C}^0(\mathbb{R}^d)} \leq \varepsilon/(1+R)^{d/p}$.

Alors, comme $\mathrm{supp}(g - \tau_h g) \subset B(0, R+1)$, on a

$$\|g - \tau_h g\|_{L^p} \leq \|g - \tau_h g\|_{\mathcal{C}^0(\mathbb{R}^d)} \left(\int_{\mathbb{R}^d} \mathbb{1}_{x \in B(0,R+1)} dx \right)^{1/p} \leq \frac{\varepsilon}{(1+R)^{d/p}} (1+R)^{d/p} \leq \varepsilon.$$

Enfin, $\|\tau_h f - \tau_h g\|_{L^p} = \|f - g\|_{L^p} < \varepsilon$. Ainsi, si $|h| < \delta$,

$$\|\tau_h f - f\|_{L^p} \leq \|\tau_h f - \tau_h g\|_{L^p} + \|\tau_h g - g\|_{L^p} + \|g - f\|_{L^p} \leq 3\varepsilon.$$

6. Comme $\mathcal{F}$ est relativement compacte, elle est bornée (d'une suite f_n telle que $\|f_n\| \to \infty$, on ne peut extraire aucune sous-suite convergente).

D'autre part, supposons que $\mathcal{F}$ ne vérifie pas (ii). Il existe donc une suite $f_n \in \mathcal{F}$, $h_n \in \mathbb{R}^d$ tel que $|h_n| \to 0$ et $\varepsilon > 0$ telle que $\|\tau_{h_n} f_n - f_n\|_{L^p(\Omega)} \geq \varepsilon$. Quitte à extraire, on peut supposer que $f_n \to f$ fortement dans $L^p(\Omega)$. Or on a

$$\tau_{h_n} f - f = (\tau_{h_n} f - \tau_{h_n} f_n) + (\tau_{h_n} f_n - f_n) + (f_n - f).$$

Comme

$$\begin{aligned}
\|\tau_{h_n} f - \tau_{h_n} f_n\|_{L^p(\Omega)} &= \|f - f_n\|_{L^p(\Omega)} \to 0, \\
\|\tau_{h_n} f_n - f_n\|_{L^p(\Omega)} &\geq \varepsilon, \\
\|f_n - f\|_{L^p(\Omega)} &\to 0,
\end{aligned}$$

on en déduit que $\liminf \|\tau_{h_n} f - f\|_{L^p(\Omega)} \geq \varepsilon$, ce qui contredit 5.

Enfin, supposons que $\mathcal{F}$ ne vérifie pas (iii). Il existe alors $\varepsilon > 0$ et des suites $f_n \in \mathcal{F}$ et $R_n \to \infty$ telles que $\|f_n\|_{L^p(\Omega \cap B(0,R_n+1) \setminus B(0,R_n))} \geq 2\varepsilon$. Quitte à extraire, on peut supposer que $f_n \to f$ dans $L^p(\Omega)$ fortement : pour $n \geq N$, $\|f_n - f\|_{L^p(\Omega)} < \varepsilon$. Mais alors, on a pour tout $n \geq N$ $\|f\|_{L^p(\Omega \cap B(0,R_n+1) \setminus B(0,R_n))} \geq \varepsilon$. Comme les ensembles en présence sont disjoints, on en déduit que $\|f\|_{L^p(\Omega)} = \infty$, ce qui est absurde.

7. Soit T l'injection de $H^1(\Omega)$ dans $L^2(\Omega)$, et $\mathcal{F} = T(B_{H^1}(0,1)) \subseteq L^2(\Omega)$. Soit φ une fonction régulière qui vaut 1 dans un voisinage de Ω. Comme φ est à support compact, $T(f) = \varphi f$ est à support dans ce même compact ($\forall f \in B_{H^1}$) et (iii) est vérifié. De plus, on a bien sur $\|\varphi f\|_{L^2} \leq \|\varphi\|_{L^\infty} \|f\|_{L^2} \leq C \|f\|_{H^1}$ donc $\mathcal{F}$ est L^2-bornée. Enfin,

$$\begin{aligned}
\|\tau_h(\varphi f) - \varphi f\|_{L^2}^2 &= \int_{\mathbb{R}^d} |\varphi(x+h) f(x+h) - \varphi(x) f(x)|^2 dx \\
&= \int_{\mathbb{R}^d} \left| \int_0^1 \nabla(\varphi(x+th) f(x+th)) \cdot h dt \right|^2 dx \\
&\leq |h|^2 \int_{\mathbb{R}^d} \int_{t=0}^1 |\nabla(\varphi(x+th) f(x+th))|^2 dt dx \\
&\leq C|h|^2 \int_0^1 \int_{\mathbb{R}^d} |\varphi(x+th) \nabla f(x+th)|^2 + |f(x+th) \nabla \varphi(x+th)|^2 dx dt \\
&\leq C|h|^2 \|\varphi\|_{C^1}^2 \underbrace{\|f\|_{H^1}^2}_{\leq 1}.
\end{aligned}$$

Ainsi, $\mathcal{F}$ vérifie (ii).

⋆