Corrigé d'analyse fonctionnelle
TD n° 10

Transformation de Fourier

Séance du 8 avril 2019

Solution 1. *Échauffement*

1. Comme A est de mesure finie, $\mathbb{1}_A \in L^2(\mathbb{R}^d)$ donc $\widehat{\mathbb{1}_A} \in L^2(\mathbb{R}^d)$ par Plancherel. Par contre, si $\widehat{\mathbb{1}_A} \in L^1(\mathbb{R}^d)$, comme on a aussi $\mathbb{1}_A \in L^1(\mathbb{R}^d)$, la formule d'inversion de Fourier s'appliquerait, et on aurait l'égalité suivante presque partout :

$$\mathbb{1}_A(x) = \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{\mathbb{R}^d} \widehat{\mathbb{1}_A}(\xi) e^{ix\cdot\xi} d\xi, \quad x \in \mathbb{R}^d.$$

En particulier, d'après le théorème de continuité sous le signe intégral, $\mathbb{1}_A \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}^d)$, ce qui est absurde.

2. En prenant la transformée de Fourier de l'égalité $f * g = 0$, on trouve $\hat{f}\hat{g} = 0$. Il suffit donc de prendre $f_0, g_0 \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^d)$ à support compact, avec $\operatorname{supp}(f_0)$ et $\operatorname{supp}(g_0)$ disjoints, et de poser $f = \mathcal{F}^{-1} f_0$, $g = \mathcal{F}^{-1} g_0$. Ce sont bien des éléments de $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$, puisque $\mathcal{F}$ réalise un isomorphisme sur l'espace de Schwartz.

Si on suppose de plus que les supports de f et g sont compacts, alors $\hat{f}$ et $\hat{g}$ sont des fonctions analytiques (sur $\mathbb{C}^d$). En effet,

$$\hat{f}(z) = \int_{\mathbb{R}^d} f(x) e^{-ix\cdot z} dx$$

est bien défini quel que soit $z \in \mathbb{C}^d$, et holomorphe (d'après les théorèmes usuels de dérivation sous l'intégrale). Comme les zéros de $\hat{f}$ et de $\hat{g}$ sont alors isolés, ceux de $\hat{f}\hat{g}$ le sont également. Ainsi $\hat{f}\hat{g}$ n'est pas identiquement nulle. Par l'inversion de Fourier, on voit que $f * g \neq 0$.

3. En calculant la transformée de Fourier, l'équation devient : presque-partout,

$$\hat{f}(\xi)^2 = \hat{f}(\xi).$$

Supposons $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$, de sorte que $\hat{f}$ est continue et l'égalité a lieu partout. Alors $\hat{f}$ prend ses valeurs dans $\{0, 1\}$. De plus, comme $\hat{f}$ est continue sur $\mathbb{R}^d$, elle est nécessairement constante (égale à 0 ou 1). D'après le lemme de Riemann-Lebesgue, $\hat{f}$ tend vers 0 à l'infini donc $\hat{f}$ est nulle, et par conséquent f aussi.

Supposons maintenant $f \in L^2(\mathbb{R}^d)$. Soit A un borélien de $\mathbb{R}^d$ de mesure $|A|$ égale à 1, $f_0 := \mathbb{1}_A$. Montrons que $f := \mathcal{F}^{-1}(f_0)$ convient. Pour cela, on a besoin de la formule suivante : si $f, g \in L^2(\mathbb{R})$,

$$\mathcal{F}^{-1}(\hat{f}\hat{g}) = f * g.$$

La justification est la suivante. Cette formule est vraie si $f, g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$. Par ailleurs, $(f, g) \mapsto \mathcal{F}^{-1}(\hat{f}\hat{g})$ et $(f, g) \mapsto f * g$ sont toutes les deux continues sur $L^2(\mathbb{R}^d) \times L^2(\mathbb{R}^d)$ à valeurs dans $\mathcal{C}_0(\mathbb{R}^d)$. Par densité, on en déduit l'égalité sur $L^2(\mathbb{R}^d)$. Par conséquent,

$$f * f = \mathcal{F}^{-1}(\hat{f}^2) = \mathcal{F}^{-1}(\hat{f}) = f.$$

Cette égalité a lieu dans $\mathcal{C}_0(\mathbb{R}^d)$ donc partout dans $\mathbb{R}^d$.

4. En considérant la transformée de Fourier de cette équation, et en notant $|\xi|$ la norme 2 de $\xi \in \mathbb{R}^d$, on obtient

$$(\lambda + |\xi|^2)\hat{u} = \hat{f}.$$

a) Pour résoudre cette équation lorsque $f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$, il suffit d'observer que $\frac{\hat{f}}{\lambda+|\xi|^2} \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$ donc l'unique solution est donnée par $u = \mathcal{F}^{-1}(\frac{\hat{f}}{\lambda+|\xi|^2})$ dans $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$. Cette formule permet de voir que si $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$, alors $u \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$.

Lorsque $d = 1$, il suffit de déterminer k_λ tel que $\hat{k_\lambda} = \frac{1}{\lambda+|\xi|^2}$, ce qui permettrait d'écrire toute solution u sous la forme $k_\lambda * f$. Par inversion de Fourier, cela donnerait

$$k_\lambda(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} \frac{e^{ix\xi}}{\lambda+\xi^2}d\xi.$$

On applique par exemple la formule des résidus sur la frontière du rectangle $[-R, R] + i[0, R]$, qui pour R assez grand a un seul pôle simple $i\sqrt{\lambda}$, on obtient

$$k_\lambda(x) = i\frac{e^{-x\sqrt{\lambda}}}{2i\sqrt{\lambda}} = \frac{e^{-x\sqrt{\lambda}}}{2\sqrt{\lambda}}.$$

b) Si $f \in L^2(\mathbb{R}^d)$, alors $\hat{f}$ aussi, et comme $\left|\frac{\hat{f}}{\lambda+|\xi|^2}\right| \le \frac{|\hat{f}|}{\lambda}$, la fonction $\frac{\hat{f}}{\lambda+|\xi|^2}$ l'est aussi. On en déduit que la solution $u = \mathcal{F}^{-1}(\frac{\hat{f}}{\lambda+|\xi|^2})$ est dans $L^2(\mathbb{R}^d)$.

⋆

Solution 2. *Transformation de Fourier et translations*

1. Si $g \in L^2(\mathbb{R})$. Si $\tau_a f : t \mapsto f(t-a)$,

$$\widehat{\tau_a f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}} f(x-a)e^{-ix\xi}dx = e^{-ia\xi}\hat{f}(\xi),$$

car cela est vrai pour les fonctions de $\mathcal{S}(\mathbb{R})$, puis pour toute fonction de $L^2(\mathbb{R})$ en utilisant la densité de $\mathcal{S}(\mathbb{R})$, la continuité de τ_a et celle de la transformée de Fourier. À présent, par la formule de Plancherel,

$$2\pi\int_{\mathbb{R}} g(t)\overline{\tau_a f(t)}dt = \int_{\mathbb{R}} \hat{g}(\xi)\overline{\widehat{\tau_a f}(\xi)}d\xi = \int_{\mathbb{R}} \hat{g}(\xi)\overline{\hat{f}(\xi)}e^{ia\xi}d\xi,$$

ce qui est vrai pour tout a.

De la sorte, soit $g \in V^\perp$: pour tout $a \in \mathbb{R}$ fixé, $\int_{\mathbb{R}} g(t)\overline{\tau_a f(t)}dt = 0$. Posons $F := \hat{g}\overline{\hat{f}}$: on a $F \in L^1(\mathbb{R})$ et $\hat{F} \equiv 0$. Alors la formule d'inversion s'applique, et donc $F \equiv 0$.

Pour prouver la réciproque, il suffit de remonter les calculs : si $F := \hat{g}\overline{\hat{f}}$ est identiquement nulle, alors $\hat{F}$ aussi donc $g \in V^\perp$ grâce à l'égalité obtenue par la formule de Plancherel.

2. V est dense dans $L^2(\mathbb{R})$ si et seulement si on ne peut trouver une fonction $g \in L^2(\mathbb{R})$ non nulle satisfaisant la condition de la question précédente. Si l'ensemble des zéros de $\hat{f}$ est de mesure non nulle, on peut trouver $R > 0$ tel que la mesure de $[-R, R] \cap \{\hat{f} = 0\} =: Z_R$ soit strictement positive. Alors on peut poser $g = \mathcal{F}^{-1}(\mathbb{1}_{Z_R}) \in L^2(\mathbb{R})$, de sorte que $g \neq 0$ et $g \in V^\perp$. Réciproquement, si $\hat{f}$ est non nulle en dehors d'un ensemble de mesure nulle, $g \in V^\perp$ implique nécessairement $\hat{g}\overline{\hat{f}}$, donc $\hat{g} \equiv 0$, soit $g \equiv 0$.

⋆

Solution 3. *Transformée de Fourier de la valeur principale de $\frac{1}{x}$*

1. Par la formule de Taylor, $\varphi(x) = \varphi(0) + x\psi(x)$ avec $\psi \in C^\infty(\mathbb{R})$, et on vérifie que

$$\langle \mathrm{vp}(\tfrac{1}{x}), \varphi\rangle = \int_{|x|\ge 1} \frac{\varphi(x)}{x}dx + \int_{|x|\le 1} \psi(x)dx.$$

On voit bien que $\mathrm{vp}(\frac{1}{x})$ est une distribution tempérée, bien définie pour les fonctions à décroissance rapide (car alors, les intégrales ci-dessus convergent, et sont bornées par des semi-normes qui définissent la topologie sur $\mathcal{S}(\mathbb{R})$).

2. Montrons que $\mathcal{F}(\mathrm{vp}(\frac{1}{x}))$ est impaire au sens des distributions. Pour tout $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, on a, par définition de la transformée de Fourier des distributions,

$$\begin{aligned}\langle \mathcal{F}(\mathrm{vp}(\tfrac{1}{x})), \check{\varphi}\rangle &= \langle \mathrm{vp}(\tfrac{1}{x}), \mathcal{F}(\check{\varphi})\rangle \\ &= \langle \mathrm{vp}(\tfrac{1}{x}), (\mathcal{F}(\varphi))\check{}\,\rangle \\ &= \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{-\infty}^{-\varepsilon} \tfrac{\mathcal{F}(\varphi)(-\xi)}{\xi}d\xi + \int_{\varepsilon}^{\infty} \tfrac{\mathcal{F}(\varphi)(-\xi)}{\xi}d\xi \\ &= -\langle \mathrm{vp}(\tfrac{1}{x}), \mathcal{F}(\varphi)\rangle.\end{aligned}$$

3. On a vu que $x\mathrm{vp}(\frac{1}{x}) = \mathbb{1}$ (cf. TD n$^{\text{o}}$ 5). En effet, si $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$,

$$\langle x\mathrm{vp}(\tfrac{1}{x}), \varphi\rangle = \langle \mathrm{vp}(\tfrac{1}{x}), x\varphi\rangle = \int_{\mathbb{R}} \varphi = \langle \mathbb{1}, \varphi\rangle.$$

Comme par inversion de Fourier pour $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$

$$\langle \mathcal{F}(\mathbb{1}), \varphi\rangle = \langle \mathbb{1}, \mathcal{F}(\varphi)\rangle = \int_{\mathbb{R}} \mathcal{F}(\varphi) = 2\pi\varphi(0),$$

$\mathcal{F}(\mathbb{1}) = 2\pi\delta_0$, et on trouve donc que

$$2\pi\delta_0 = \mathcal{F}(x\mathrm{vp}(\tfrac{1}{x})) = i\mathcal{F}(\mathrm{vp}(\tfrac{1}{x}))',$$

donc $\mathcal{F}(\mathrm{vp}(\frac{1}{x}))' = -2i\pi\delta_0$. On en déduit que $\mathcal{F}(\mathrm{vp}(\frac{1}{x})) = -2i\pi(H + C)$, où H est la fonction de Heaviside (soit $H = \mathbb{1}_{\{x\geq 0\}}$) et C est une constante. L'imparité de $\mathcal{F}(\mathrm{vp}(\frac{1}{x}))$ impose à la fonction $H + C$ d'être impaire, c'est-à-dire $C = -1/2$, d'où

$$\mathcal{F}(\mathrm{vp}(\tfrac{1}{x}))(\xi) = -i\pi\,\mathrm{sgn}(\xi) = -i\pi\frac{\xi}{|\xi|}.$$

C'est bien une distribution à croissance modérée.

⋆

Solution 4. *Polynômes de Hermite*

1. Si f est orthogonale à tous les polynômes pour le produit hermitien de H, alors, si $x \in \mathbb{R}$ est fixé, on a pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\int_{\mathbb{R}} f(t)\left(\sum_{j=0}^{n} \frac{x^j t^j}{j!}\right) e^{-t^2} dt = 0.$$

La fonction sous l'intégrale est dominée par

$$|f(t)|\left(\sum_{j=0}^{n} \frac{|x|^j |t|^j}{j!}\right) e^{-t^2} \leq |f(t)|e^{-\frac{t^2}{2}} \cdot e^{|x|\cdot|t|}e^{-\frac{t^2}{2}},$$

qui est une fonction de $L^1(\mathbb{R}, dx)$, en tant que produit de fonctions L^2. On peut donc appliquer le théorème de convergence dominée, et trouver que $\int_{\mathbb{R}} f(t)e^{xt-t^2}dt = 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

Posons, pour $z \in \mathbb{C}$, la fonction

$$F(z) = \int_{\mathbb{R}} f(t)e^{zt-t^2}dt.$$

C'est une fonction entière de z, car $t \mapsto f(t)e^{zt-t^2}$ est intégrable sur $\mathbb{R}$ (sa valeur absolue est $|f(t)|e^{\mathrm{Re}(z)t}e^{-t^2}$). D'autre part, nous venons de voir que cette fonction s'annule sur $\mathbb{R}$. D'après le principe des zéros isolés, elle est donc identiquement nulle. Enfin, elle vérifie $F(ix) = \mathcal{F}(fe^{-t^2})$. Donc $\mathcal{F}(fe^{-t^2}) \equiv 0$, et comme $\mathcal{F}$ induit un isomorphisme sur $L^2(\mathbb{R})$, on trouve $f \equiv 0$. Le théorème de projection de Hilbert sur les convexes fermés montre donc que l'espace vectoriel engendré par les polynômes est dense dans H.

2. On voit que $H_0 = 1$, et en dérivant l'expression de H_n, on trouve $H_n' = 2xH_n - H_{n+1}$, autrement dit, $H_{n+1} = 2xH_n - H_n'$. Une récurrence montre donc immédiatement que H_n est un polynôme de degré n.

Si maintenant P est un polynôme de degré $\leq n-1$, calculons

$$(H_n|P)_H = \int_{\mathbb{R}} H_n(t)\overline{P(t)}e^{-t^2}dt = (-1)^n \int_{\mathbb{R}} \frac{d^n}{dt^n}(e^{-t^2})\overline{P(t)}dt = \int_{\mathbb{R}} e^{-t^2}\frac{d^n}{dt^n}(\overline{P(t)})dt = 0,$$

grâce à des intégrations par partie où l'exponentielle annule les termes de bord.

3. Calculons différemment H_{n+1} :

$$H_{n+1}(x) = -(-1)^n \frac{d^n}{dx^n}(-2xe^{-x^2}) = 2xH_n(x) - 2nH_{n-1}(x),$$

grâce à la formule de Leibniz. En combinant les deux formules sur H_{n+1}, on trouve $\frac{d}{dx}H_n = 2nH_{n-1}$.

4. Un calcul frontal montre que

$$\frac{d}{dx}\psi_n = \frac{d}{dx}\left(e^{-\frac{x^2}{2}}H_n\right) = -x\psi_n + 2n\psi_{n-1}.$$

Par conséquent,

$$\left(\frac{d}{dx} + x\right)\psi_n = 2n\psi_{n-1}$$

et

$$\left(-\frac{d}{dx} + x\right)\psi_n = 2x\psi_n - 2n\psi_{n-1} = \psi_{n+1}.$$

5. Dérivons la première équation de la question précédente : $\psi_n'' + \psi_n + x\psi_n' = 2n\psi_{n-1}'$. D'autre part, en multipliant la même équation par x, on trouve $x\psi_n' + x^2\psi_n = 2xn\psi_{n-1}$. En reportant dans l'expression précédente, on arrive à

$$\psi_n'' - x^2\psi_n + \psi_n = 2n(\psi_{n-1}' - x\psi_{n-1}) = -2n\psi_n,$$

avec la dernière équation de la question précédente. On trouve ainsi l'expression demandée :

$$\left(\frac{d^2}{dx^2} - x^2\right)\psi_n = -(2n+1)\psi_n.$$

6. Commençons par observer que $\psi_n \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, donc sa transformée de Fourier $\widehat{\psi_n}$ également. D'autre part, des intégrations par partie et des dérivations sous le signe « somme » montrent que pour tout $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$,

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{d^2\varphi}{dx^2}(x)e^{-ix\xi}dx = -\xi^2 \int_{\mathbb{R}} \varphi(x)e^{-ix\xi}dx,$$
$$\int_{\mathbb{R}} (-x^2)\varphi(x)e^{-ix\xi}dx = \frac{d^2}{d\xi^2}\int_{\mathbb{R}} \varphi(x)e^{-ix\xi}dx.$$

Cela prouve donc que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\widehat{\psi_n}$ vérifie la même équation que ψ_n :

$$\left(\frac{d^2}{dx^2} - x^2\right)\widehat{\psi_n} = -(2n+1)\widehat{\psi_n}.$$

Montrons à présent que la famille $\{\psi_n\}$ est dense dans $L^2(\mathbb{R})$. On sait déjà que $\{H_n\}$ est dense dans H, puisque c'est une famille étagée en degré, et que les polynômes sont denses dans H. Ainsi, si $f \in L^2(\mathbb{R})$ est orthogonale à tous les ψ_n, alors $\tilde{f} := fe^{x^2/2} \in H$, et $\langle \tilde{f}, H_n\rangle_H = \langle f, \psi_n\rangle_{L^2} = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Alors $\tilde{f} \equiv 0$, c'est-à-dire en fait $f \equiv 0$.

D'autre part, $\{\psi_n\}$ forme une famille orthogonale de $L^2(\mathbb{R})$ (cela découle de l'orthogonalité des H_n dans H, démontrée à la question 2).

Enfin, en notant $A := \frac{d^2}{dx^2} - x^2$ l'opérateur sur $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ qui apparaît naturellement ici, on voit que si $f, g \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ satisfont $Af = \lambda f$ et $Ag = \lambda' g$ avec $\lambda \neq \lambda'$, alors $\langle f, g\rangle_{L^2} = 0$ (c'est simplement parce que A est autoadjoint pour cette structure). Cela prouve que pour $n \neq m$,

$$\int_{\mathbb{R}} \widehat{\psi_n}\psi_m = 0.$$

Notons à présent P la projection orthogonale sur $\psi_n^{\perp}$ (au sens du produit hermitien L^2 standard). Comme $P\psi_m = \psi_m$ pour tout $m \neq n$, et que P est autoadjoint, on a $P\widehat{\psi_n} \perp \psi_m$ si $m \neq n$. Bien sûr, on a aussi $P\widehat{\psi_n} \perp \psi_n$. Par densité, cela prouve que $P\widehat{\psi_n} \equiv 0$, et donc $\widehat{\psi_n} \in \mathrm{Vect}(\psi_n)$. Ainsi ψ_n est un vecteur propre de $\mathcal{F}$ sur $\mathbb{R}$.

⋆

Solution 5. *Théorème de Paley-Wiener*

1. Si T est une distribution à support compact, on peut écrire, d'après le cours,

$$\mathcal{F}(T)(\xi) = \langle T, e^{-ix\xi}\rangle, \quad \xi \in \mathbb{R},$$

et cette expression s'étend à $\xi \in \mathbb{C}$.

Soit χ une fonction test égale à 1 sur un voisinage de $\mathrm{supp}(T)$. On a alors

$$\mathcal{F}(T)(\xi) = \langle T, \chi e^{-ix\xi}\rangle.$$

Comme pour tout $\xi \in \mathbb{C}$, la fonction $x \mapsto \chi(x)e^{-ix\xi}$ est à support inclus dans $\mathrm{supp}(\chi)$, que $\chi(x)e^{-ix\xi}$ est $\mathcal{C}^\infty$ en les deux variables, on peut dériver sous le crochet de dualité, et obtenir que $\mathcal{F}(T)$ est analytique.

2. Pour $\xi \neq 0$, on a

$$F(\xi) = \int_{\mathbb{R}} e^{-ix\xi} f(x)dx = \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{(-i\xi)^N} e^{-ix\xi}\partial_x^N f(x)dx,$$

Comme $\partial_x^N f$ est bornée sur $B(0,R)$, on obtient $|F(x)| \leq C_N|\xi|^{-N}e^{R|\mathrm{Im}(\xi)|}$.

3. La borne sur F permet d'utiliser le théorème de dérivation sous le signe intégral pour conclure.

4. On intègre $e^{ix\xi}F(\xi)$ sur la frontière du rectangle $[-A, A] + i[0, \eta]$:

$$\int_{-A}^{A} e^{ix\xi}F(\xi)d\xi + \int_0^\eta e^{ix(A+i\rho)}F(A+i\rho)d\rho + \\ \int_A^{-A} e^{ix(\xi+i\eta)}F(\xi+i\eta)d\xi + \int_\eta^0 e^{ix(-A+i\rho)}F(-A+i\rho)d\rho = 0.$$

En passant à la limite quand A tend vers $+\infty$, grâce aux bornes sur F,

$$|F(A+i\rho)| \leq \frac{C_1}{1+|A+i\rho|}e^{R|\eta|}$$

et

$$|F(-A+i\rho)| \leq \frac{C_1}{1+|-A+i\rho|}e^{R|\eta|},$$

on obtient

$$f(x) = \int_{\mathbb{R}} e^{ix(\xi+i\eta)}F(\xi+i\eta)d\xi.$$

Ensuite, en utilisant le fait que

$$|F(\xi+i\eta)| \leq \frac{C_2}{1+|\xi+i\eta|^2}e^{R|\eta|} \leq \frac{C_2}{1+\xi^2}e^{R|\eta|},$$

on en déduit que $|f(x)| \leq Ce^{R|\eta|-x\eta}$.

5. Si on choisit $\eta > 0$ qui tend vers $+\infty$, alors pour $R < x$, on obtient $f(x) = 0$. On fait de même pour $x < -R$ avec $\eta < 0$.

6. Soit T une distribution à support compact, notons p son ordre (qui est fini), et $[-R, R]$ son support. Alors il existe $C > 0$ telle que

$$|\mathcal{F}(T)(\xi)| = |\langle T, e^{-ix\xi}\rangle| \leq C\sum_{k=1}^{p} \|\partial_x^k e^{-ix\xi}\|_{L^\infty((-R,R))} \leq C'(1+|\xi|)^p e^{R|\operatorname{Im}\xi|}.$$

Réciproquement, soit F une fonction analytique qui satisfait une condition

$$|F(\xi)| \leq C(1+|\xi|)^K e^{R|\operatorname{Im}(\xi)|}.$$

Alors $F \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$ (car à croissance polynomiale lorsque $\xi \in \mathbb{R}$), et $\mathcal{F}^{-1}(F)$ aussi. Soit $\rho_k(x) = k\rho(kx)$ une approximation de l'unité (où $\rho \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R})$ est positive, paire et d'intégrale 1). Comme ρ_k est à support compact inclus dans $B(0, \frac{1}{k})$, $\widehat{\rho_k}$ satisfait les conditions de la question 2, donc $\widehat{\rho_k}F$ aussi :

$$|\widehat{\rho_k}F(\xi)| \leq \frac{CC_N}{(1+|\xi|)^{N-k}}e^{(R+1/k)|\operatorname{Im}(\xi)|}.$$

Par conséquent, $\rho_k * \mathcal{F}^{-1}(F)$ est $\mathcal{C}^\infty$ à support dans $B(0, R+\frac{1}{k})$. Soit g une fonction $\mathcal{C}^\infty$ à support dans le complémentaire de $\bar{B}(0, R)$. On a alors, pour k assez grand,

$$0 = \langle \rho_k * \mathcal{F}^{-1}(F), g\rangle = \langle \mathcal{F}^{-1}(F), \check{\rho}_k * g\rangle = \langle \mathcal{F}^{-1}(F), \rho_k * g\rangle \longrightarrow \langle \mathcal{F}^{-1}(F), g\rangle,$$

donc $\mathcal{F}^{-1}(F)$ est à support dans $B(0, R)$.

⋆