Correction du Td n° 11 d'Analyse fonctionnelle

Opérateurs non bornés

Séance du 16 mai 2014

Solution 1. *Opérateurs auto-ajoints et essentielement auto-adjoints*

1. On calcule

$$||Au+u||^2 = < Au+u, Au+u > = ||Au||^2 + ||u||^2 + 2 < Au, u > .$$

Comme $< Au, u > \geq 0$ on a donc

$$||Au+u||^2 \geq ||Au||^2 + ||u||^2$$

2. Soit $y_n \in D(A)$ telle que $y_n + Ay_n$ converge. Alors $y_n + Ay_n$ est une suite de Cauchy, et d'après la question précédente y_n et Ay_n le sont aussi. Comme le graphe de A est fermé, y_n converge donc vers $y \in D(A)$ et Ay_n converge vers Ay. $Ay_n + y_n$ converge donc vers $y + Ay \in Im(A+I)$.

3. On suppose A auto-adjoint. Alors A^* est fermé, et si $A^*\phi = -\phi$ alors

$$< A^*\phi, \phi > = < A\phi, \phi > = -||\phi||^2$$

donc $||\phi||^2 \leq 0$ donc $\phi = 0$. Réciproquement, si A est fermé et $\text{Ker}(A^*+I) = \{0\}$, alors comme

$$\text{Ker}(A^*+I) = \overline{Im(A+I)}^{\perp} = Im(A+I)^{\perp}$$

on a $Im(A+I) = H$. Comme A est symétrique, pour montrer qu'il est auto-adjoint, il suffit de montrer que $D(A^*) \subset D(A)$. Soit donc $u \in D(A^*)$. Alors il existe $v \in D(A)$ tel que

$$u + A^*u = v + Av.$$

Comme $D(A) \subset D(A^*)$ on a $Av = A^*v$ et

$$A^*(u-v) = v - u$$

donc $u - v = 0$ et $u \in D(A)$.

4. L'adjoint de A est l'opérateur $-\frac{d^2}{dx^2}$ défini sur $H^2(\mathbb{R})$. A est essentiellement auto-ajoint si $\overline{A}$ est auto-adjointe. Or A est symètrique et vérifie $< Au, u > \geq 0$, donc il en est de même pour $\overline{A}$. Comme $\overline{A}$ est fermé, on applique le critère de la question 3 pour montrer qu'il est auto-adjoint : si $A^*u = -u$, alors

$$\int (\frac{du}{dx})^2 + u^2 = 0$$

donc $u = 0$. A est donc essentiellement auto-adjoint.

⋆

Solution 2. *Semi-groupe adjoint*

1. On calcule

$$\begin{aligned}\|T(h)f_t - f_t\| &\leq \|\frac{1}{t}\int_0^t (T(h+s)f - T(s)f)ds\| \\ &\leq \|\frac{1}{t}(\int_h^{h+t} - \int_0^t)T(s)fds\| \\ &\leq \frac{1}{t}\int_t^{t+h}\|T(s)f\|ds + \frac{1}{t}\int_0^h \|T(s)f\|ds \\ &\leq \frac{1}{\omega t}M\|f\|(e^{\omega(t+h)} - e^{\omega t} + e^{\omega h} - 1)\end{aligned}$$

On a donc $\|T(h)f_t - f_t\| \to 0$ quand $h \to 0$.

2. Le sous espace $F = \{f \in H,\ \lim_{h \longrightarrow 0} T(h)g = g\}$ est fermé pour la topologie forte, donc fermé pour la topologie faible (car convexe). Il contient tous les f_t, donc aussi tous les $f \in H$ par passage à la limite faible. $T(t)f$ est donc continue en 0, donc partout en utilisant $T(t+s) = T(t)T(s)$.

3. On vérifie $T(0)^* = I^* = I$ et

$$T(s+t)* = (T(s)T(t))^* = T(t)^*T(s)^*.$$

On a $\|T(t)^*\| = \|T(t)\| \leq Me^{\omega t}$ et pour tout f, g, $< T^*(t)f, g >=< f, T(t)g >$ est continue. On peut donc appliquer la question précédente.

4. Pour tout $f \in D(A)$ et $g \in D(B)$ on a

$$< Af, g >= \lim_{t \longrightarrow 0} < \frac{1}{t}(T(t)f - f), g >= \lim_{t \longrightarrow 0} < f, \frac{1}{t}(T(t)^*g - g) >=< f, Bg > .$$

On a donc $B \subset A^*$. Soit maintenant $g \in D(A^*)$. Alors pour $f \in A$

$$< f, T(t)^*g - g >=< T(t)f - f, g >= \int_0^t < AT(s)f, g > ds = \int_0^t < f, T(s)^*Ag > ds.$$

On a donc

$$\frac{1}{t}(T(t)^*g - g) = \frac{1}{t}\int_0^t T(s)^*A^*g \longrightarrow A^*g$$

donc $g \in D(B)$ et $A^* = B$.

⋆

Solution 3. *Extension auto-adjointe*

1. T^* est l'opérateur $T^* : H^1([0,1]) \to L^2([0,1])$ tel que $T^*u = -i\frac{du}{dx}$.

2. Si S est une extension de T, alors $D(S^*) \subset D(T^*)$. Donc si S est une extension auto-adjointe, on a $D(S) \subset H^1$ et $S = -i\frac{d}{dx}$. Pour tout $\phi, \psi \in D(S)$ on a

$$0 =< S\phi, \psi > - < \phi, S^*\psi >= -i(\phi(1)\bar{\psi(1)} - \phi(0)\bar{\psi(0)}) \tag{1}$$

En particulier $|\phi(1)|^2 = |\phi(0)|^2$.

3. Pour tout $\phi \in D(S)\ D(T)$, il existe donc $\alpha \in \mathbb{U}(1)$ tel que $\phi(1) = \alpha\phi(0)$. Pour montrer que α ne dépend pas de ϕ, il suffit d'utiliser (1).

4. Pour $\alpha \in \mathbb{U}(1)$, l'opérateur T_α défini sur $\{\phi \in H^1([0,1]),\ \phi_1 = \alpha\phi(0)\}$ est auto-adjoint, et c'est une extension de S donc $S = T_\alpha$. On a donc caractérisé toutes les extensions auto-adjointes de T.

⋆

Solution 4. *Théorème spectral*

1. Si $\lambda \notin \sigma(T)$, pour toute suite x_n on a $\|x_n\| \leq C\|(T-\lambda)x_n\|$ donc $(T-\lambda)x_n \longrightarrow 0$ implique $x_n \longrightarrow 0$. Réciproquement, si $\lambda \in \sigma(T)$, alors si $T-\lambda$ n'est pas bijective, on a soit $\mathrm{Ker}(T-\lambda)$ non vide, soit $\mathrm{Ker}(T^*-\lambda)$ non vide. Comme T est autoadjoint, il existe donc dans les deux cas u de norme 1 tel que $Tu = \lambda u$. Si $T-\lambda$ est inversible d'inverse non borné, il existe y_n telle que $\|y_n\| = 1$ et

$$\|(T-\lambda)^{-1}y_n\| \geq n$$

. On pose

$$x_n = \frac{(T-\lambda)^{-1}y_n}{\|(T-\lambda)^{-1}y_n\|}.$$

On a $\|x_n\| = 1$ et $(T-\lambda)x_n = \frac{y_n}{\|(T-\lambda)^{-1}y_n\|} \longrightarrow 0$.

1. Si λ n'est pas dans l'image essentielle de F, il existe $\varepsilon > 0$ $|F-\lambda| > \varepsilon$ presque surement, donc $F-\lambda$ est inversible, d'inverse borné par $\frac{1}{\varepsilon}$, donc λ n'appartient pas qu spectre de T_F.

Si λ est dans l'image essentielle de F, on peut construire f_n de norme 1, telle que $f_n = 0$ en dehors de $|F-\lambda| < \frac{1}{n}$. On a alors $(F-\lambda)f_n \longrightarrow 0$.

2. Le théorème spectral nous dit qu'il existe U, opérateur unitaire $H \to L^2(\mathbb{R}, \mu_\phi)$ tel que $A = U^{-1}T_xU$, où T_x est la multiplication par x. Or l'image essentielle de la fonction x correspond au support de μ.

⋆