Corrigé d'analyse fonctionnelle
TD n° 11

Distributions

Séance du 24 avril 2017

Solution 1. *Échauffement*

La fonction $f : x \mapsto |\sin(x)| \in L^1_{\text{loc}}$, on peut donc la considérer comme un élément de $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$. Soit $\varphi \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$ à support compact. On a

$$\begin{aligned}
\langle f'', \varphi\rangle = \langle f, \varphi''\rangle &= \int_{\mathbb{R}} |\sin(x)|\varphi''(x)dx \\
&= \sum_{k\in\mathbb{Z}} \int_{2k\pi}^{(2k+1)\pi} \sin(x)\varphi''(x)dx - \int_{(2k+1)\pi}^{(2k+2)\pi} \sin(x)\varphi''(x)dx \\
&= \sum_{k\in\mathbb{Z}} \left(- \int_{2k\pi}^{(2k+1)\pi} \cos(x)\varphi'(x)dx + \int_{(2k+1)\pi}^{(2k+2)\pi} \cos(x)\varphi'(x)dx \right) \\
&= \sum_{k\in\mathbb{Z}} \left(- \int_{2k\pi}^{(2k+1)\pi} \sin(x)\varphi(x)dx + \int_{(2k+1)\pi}^{(2k+2)\pi} \sin(x)\varphi(x)dx \right) \\
&\quad + \varphi(2k\pi) + 2\varphi((2k+1)\pi) + \varphi((2k+2)\pi).
\end{aligned}$$

D'où $f'' = -|\sin(x)| + 4\sum_{k\in\mathbb{Z}} \delta_{k\pi}$.

⋆

Solution 2. *Quelques exemples de distributions*

1. Soit $\varphi \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R})$, et supposons que $\operatorname{supp}(\varphi) \subseteq [-N, N] =: K$, avec $N \in \mathbb{N}$. Alors

$$|\langle u, \varphi\rangle| \leq N\|\varphi\|_{\mathcal{C}^N_K(\mathbb{R})}.$$

La formule pour u définit donc bien une distribution, d'ordre au plus N sur le compact $[-N, N]$.

Supposons que u est d'ordre fini, disons N_0. Posons $K := [-N_0 - 2, N_0 + 2]$. Il existe donc une constante A_K telle que pour toute fonction $\varphi \in \mathcal{C}^\infty$ à support dans K,

$$|\langle u, \varphi\rangle| \leq A_K\|\varphi\|_{\mathcal{C}^{N_0}_K}.$$

Montrons que cela ne peut pas arriver : soit χ une fonction lisse telle que $\chi^{(N_0+1)}(0) = 1$, et $\operatorname{supp}\chi \subseteq [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$. Pour $m \in \mathbb{N}$, posons $\varphi_m(x) = \chi(m\cdot(x-(N_0+1)))$. De la sorte, pour tout $m \geq 1$, $\varphi_m^{(k)}(k) = 0$ si $0 \leq k \leq N_0$, et $\varphi_m^{(N_0+1)}(N_0 + 1) = m^{N_0+1}$. Donc $|\langle u, \varphi_m\rangle| = m^{N_0+1}$. Or

$$\|\varphi_m\|_{\mathcal{C}^{N_0}_K} \leq Cm^{N_0},$$

où $C > 0$ ne dépend pas de m. Donc $\forall m \in \mathbb{N}$, $m^{N_0+1} \leq Cm^{N_0}$, ce qui est absurde.

2. La fonction $x \mapsto e^{1/x^2} \in \mathcal{D}(\mathbb{R}_+^*)$ car étant donné un compact K de R_+^*, $e^{1/x^2} \in \mathcal{C}^0(K)$ (en particulier, localement intégrable). Par contre, considérons ϕ une fonction lisse

à support dans $]1,2[$, positive, d'intégrale 1, et la suite $\phi_k(x) = 2^{-k}\phi(kx)$. Alors on voit que $\phi_k \to 0$ dans $\mathcal{D}(\mathbb{R})$. En effet, tous les ϕ_k sont à support dans le même compact $K = [0,2]$, et pour tout $m \in \mathbb{N}$,

$$\|\partial_x^m \phi_k\|_{\mathcal{C}^0_K} = 2^{-k} k^m \|\partial_x^m \phi\|_{\mathcal{C}^0_K} \to 0 \quad \text{quand } k \to \infty.$$

Mais

$$\langle f, \phi_k \rangle = \int_{\mathbb{R}_+^*} e^{1/x^2}\phi_k(x)dx \geq e^{k^2/4} 2^{-k}\frac{1}{k} \to \infty.$$

3. Soit K un compact de Ω. Il s'agit de montrer qu'il existe C_K tel que pour tout $\phi \in \mathcal{C}^\infty_c(K)$, $|\langle u, \rangle| \leq C_K \|\phi\|_{\mathcal{C}^0_K}$. Considérons une fonction plateau ψ_K, positive, $\mathcal{C}^\infty$ à support compact, et qui vaut 1 au voisinage de K (par exemple, une régularisée par convolution de $\mathbb{1}_K$). Alors $\phi + \|\phi\|_{\mathcal{C}^0_K}\psi_K \geq 0$ et $\|\phi\|_{\mathcal{C}^0_K}\psi_K - \phi \geq 0$, donc

$$\langle u, \phi \rangle \geq -\|\phi\|_{\mathcal{C}^0_K}\langle u, \psi_K \rangle, \quad \text{et} \quad \langle u, \phi \rangle \leq \|\phi\|_{\mathcal{C}^0_K}\langle u, \psi_K \rangle,$$

soit

$$|\langle u, \phi \rangle| \leq \langle u, \psi_K \rangle \|\phi\|_{C^0(K)}.$$

C'est le résultat, avec $C_K = \langle u, \psi_K \rangle$. Pour conclure, on prolonge u en une forme linéaire continue sur $\mathcal{C}^0_c(\mathbb{R})$, et on invoque le théorème de Riesz.

⋆

Solution 3. *Distribution dont le support est un point*

1. Notons $K = \overline{B(0,2)}$. Il existe $C > 0$ et $m \in \mathbb{N}$ tels que pour toute fonction $\tilde{\varphi} \in \mathcal{C}^\infty_c$ à support dans K, on ait

$$|\langle u, \tilde{\varphi} \rangle| \leq C \|\tilde{\varphi}\|_{\mathcal{C}^m_K}.$$

À présent, si $\varphi \in \mathcal{C}^\infty_c$ quelconque, écrivons $\varphi = \psi\varphi + (1-\psi)\varphi$. Comme $\operatorname{supp} u = \{0\}$, $\langle u, (1-\psi)\varphi \rangle = 0$. Ainsi, $|\langle u, \varphi \rangle| \leq C\|\psi\varphi\|_{\mathcal{C}^m_K} \leq C_2(\psi, m)\|\varphi\|_{\mathcal{C}^m_K}$. Donc u est d'ordre fini.

2. Par construction, $\operatorname{supp}(1-\psi_r) \subset \mathbb{R}^n \setminus B(0, r/2)$. Si $\phi \in \mathcal{C}^\infty_c(\mathbb{R}^n)$, on a encore $\operatorname{supp}(1-\psi_r)\phi \subset \mathbb{R}^n \setminus B(0, r/2)$, et donc par définition,

$$\langle u, (1-\psi_r)\phi \rangle = 0 = \langle u, \phi \rangle - \langle \psi_r u, \phi \rangle,$$

d'où le résultat.

3. Soit $\varepsilon > 0$. Il existe un voisinage K_ε de 0 tel que si $|\alpha| = m$,

$$\forall x \in K, \quad |(D^\alpha \varphi)(x)| \leq \varepsilon.$$

Montrons par récurrence descendante sur $|\beta|$ que

$$\forall \beta \in \mathbb{N}^n,\ |\beta| \leq m,\ \forall x \in K, \quad |(D^\beta\varphi)(x)| \leq \varepsilon n^{m-|\beta|}|x|^{m-|\beta|}.$$

Pour $|\beta| = m$, c'est ce qui précède. On suppose que le résultat est démontré pour $|\beta| = k+1$. Soit β de longueur k. Alors

$$\nabla(D^\beta\varphi) = (\partial_{x_1}D^\beta\varphi, \ldots, \partial_{x_n}D^\beta\varphi).$$

Donc par hypothèse de récurrence, pour tout $x \in K_\varepsilon$,

$$\sum_{j=1}^n |\partial_{x_j}(D^\beta\varphi)(x)| \leq n \cdot \varepsilon(n|x|)^{m-(k+1)} \leq \varepsilon n^{m-k}|x|^{m-(k+1)}.$$

On applique alors le théorème des accroissement finis, avec $D^{\beta}(\varphi)(0) = 0$:

$$|D^{\beta}\varphi(x) - D^{\beta}\varphi(0)| \leq |x| \sup_{y \in [0,x]} |\nabla(D^{\beta}\varphi)(y)|,$$

ce qui achève la récurrence.

Soit $0 < r < 1$ assez petit pour que $\mathrm{supp}(\psi_r \varphi) \subseteq B(0, 2r) \subseteq K_{\varepsilon}$. On calcule maintenant par la formule de Leibniz

$$D^{\alpha}(\psi_r \varphi)(x) = \sum_{\beta \leq \alpha} c_{\alpha\beta} (D^{\alpha-\beta}\psi)\left(\frac{x}{r}\right)(D^{\beta}\phi)(x) r^{|\beta|-|\alpha|}.$$

Or pour $x \in B(0, 2r) \subset K_{\varepsilon}$, et $|\alpha| \leq m$,

$$|D^{\alpha}(\psi_r \varphi)(x)| \leq \sum_{\beta \leq \alpha} c_{\alpha\beta} \|\psi\|_{\mathcal{C}_K^{|\alpha|-|\beta|}} \cdot \varepsilon (2n)^{m-|\beta|} r^{m-|\alpha|} \leq C(n,m)\varepsilon \|\psi\|_{\mathcal{C}_K^{|\alpha|}},$$

puisque $r < 1$. Bien sûr, comme $\psi_r \varphi$ est nulle en dehors de $B(0, 2r)$, l'inégalité ci-dessus reste valable sur $\mathbb{R}^n$. Finalement, en sommant pour tous les multi-indices de longueur inférieure à m, on obtient

$$\|\psi_r \varphi\|_{\mathcal{C}^m(\mathbb{R}^n)} \leq C(n,m) \|\psi\|_{\mathcal{C}_K^m} \varepsilon.$$

Il suffit de faire tendre $\varepsilon \to 0$ pour obtenir le résultat.

4. Soit $\tilde{K}$ le support de φ. Comme u est d'ordre m, il existe $C_{\tilde{K}}$ tel que pour toute fonction ϕ à support dans $\tilde{K}$, $|\langle u, \phi \rangle| \leq C_{\tilde{K}} \|\phi\|_{\mathcal{C}_{\tilde{K}}^m}$. Maintenant,

$$|\langle u, \varphi \rangle| = |\langle u, \psi_r \varphi \rangle| \leq C_{\tilde{K}} \|\psi_r \varphi\|_{\mathcal{C}_{\tilde{K}}^m} \to 0$$

quand $r \to 0$. Donc $\langle u, \varphi \rangle = 0$.

5. On a montré que $\bigcap_{k=0}^{m} \ker \delta_0^{(k)} \subset \ker u$. Par le lemme des noyaux, on en déduit que $u \in \mathrm{Vect}\{\delta_0^{(k)} \mid k \in [\![0, m]\!]\}$, ce qui est le résultat recherché.

⋆

Solution 4. *Valeur principale de* $\frac{1}{x}$

1. Par la formule de Taylor, $\phi(x) = \phi(0) + x\psi(x)$ avec $\psi \in C^{\infty}(\mathbb{R})$ et $\|\psi\|_{L^{\infty}} \leq \|\phi'\|_{L^{\infty}}$ (puisque $\psi(x) = \phi'(\theta_x)$, avec $\theta_x \in]0, x[$). Ainsi,

$$\int_{\varepsilon}^{1} \frac{\phi(x)}{x} dx = \phi(0) \int_{\varepsilon}^{1} \frac{dx}{x} + \int_{\varepsilon}^{1} \psi(x) dx = -\phi(0) \ln \varepsilon + \int_{\varepsilon}^{1} \psi(x) dx.$$

Un calcul similaire pour $\int_{-1}^{-\varepsilon}$ montre que le terme en $\ln \varepsilon$ disparaît. La limite existe et vaut donc

$$\int_{|x| \geq 1} \frac{\phi(x)}{x} dx + \int_{|x| \leq 1} \psi(x) dx.$$

Cette distribution n'est pas d'ordre 0, sinon elle apparaîtrait comme une mesure. Plus précisément, soit χ une fonction $\mathcal{C}^{\infty}$ à support compact, positive, et égale à 1 sur $[-1, 1]$. On définit la suite $\phi_n : x \mapsto \arctan(nx)\chi(x)$. C'est une suite de fonctions continues à support compact telles que $\phi_n(0) = 0$ et $\|\phi_n\|_{\mathcal{C}^0} \leq C$, mais les $\langle \mathrm{vp}(\frac{1}{x}), \phi_n \rangle$ divergent :

$$\langle \mathrm{vp}(\tfrac{1}{x}), \phi_n \rangle = 2 \int_0^{\infty} \frac{\arctan(nx)}{x} \chi(x) dx = \int_0^{\infty} \frac{\arctan(x)}{x} \chi(x/n) dx \to \infty.$$

Par contre, l'expression de ψ assure que c'est une distribution d'ordre au plus 1.

2. On a

$$\begin{aligned}\left\langle x\mathrm{vp}(\tfrac{1}{x}), \phi\right\rangle &= \left\langle \mathrm{vp}(\tfrac{1}{x}), x\phi\right\rangle \\ &= \lim_{\varepsilon\to 0}\left(\int_{-\infty}^{-\varepsilon}\phi(x)dx + \int_{\varepsilon}^{\infty}\phi(x)dx\right) \\ &= \int_{-\infty}^{\infty}\phi = \langle \mathbb{1}, \phi\rangle.\end{aligned}$$

Cela prouve que $x\mathrm{vp}(\frac{1}{x}) = \mathbb{1}$.

3. Si u est comme dans l'énoncé, on a $xu - x\mathrm{vp}(\frac{1}{x}) = 0$. Cela signifie en particulier que $\mathrm{supp}\left(u - \mathrm{vp}(\frac{1}{x})\right) \subseteq \{0\}$. On en déduit (voir l'exercice précédent) qu'il existe $c_0, \ldots, c_n$ tels que

$$u - \mathrm{vp}(\tfrac{1}{x}) = \sum_{j=0}^{n} c_j \delta_0^{(j)}.$$

On a donc également $\sum_{j=0}^{n} c_j x\delta_0^{(j)} = 0$. Or $x\delta_0 = 0$ et pour $j \geq 1$:

$$\langle x\delta_0^{(j)}, \phi\rangle = \langle \delta_0^{(j)}, x\phi\rangle = (-1)^j (x\phi)^{(j)}(0) = j(-1)^j \phi^{(j-1)}(0) = -j\langle \delta_0^{(j-1)}, \phi\rangle.$$

Comme la famille $(\delta_0, \delta_0', \ldots)$ est libre, cela entraîne que $c_j = 0$ pour $j \geq 1$. Ainsi

$$u - \mathrm{vp}(\tfrac{1}{x}) = c_0\delta_0.$$

4. Remarquons que pour $\alpha > 0$, on a

$$\langle x|x|^{\alpha-2}, \phi\rangle = \int_{|x|\geq 1} |x|^{\alpha}\frac{\phi(x)}{x}dx + \int_{-1}^{1}|x|^{\alpha}\frac{\phi(x)-\phi(0)}{x}dx + \phi(0)\underbrace{\int_{-1}^{1} x|x|^{\alpha-2}dx}_{=0}.$$

En appliquant le théorème de convergence dominée à chacun des deux termes restants, on voit que $\langle x|x|^{\alpha-2}, \phi\rangle \to \langle \mathrm{vp}(\frac{1}{x}), \phi\rangle$ quand $\alpha \to 0$ (avec $\alpha > 0$), ce que l'on voulait démontrer.

5. En reprenant la question 1, on voit que $\mathrm{vp}(\frac{1}{x})$ est une distribution tempérée, bien définie pour les fonctions à décroissance rapide (car alors, l'intégrale $\int_{|x|\geq 1}\frac{\phi(x)}{x}dx$ converge). Pour tout $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, on a donc, par définition de la transformée de Fourier des distributions,

$$\begin{array}{rcl}\langle \mathcal{F}(\mathrm{vp}(\frac{1}{x})), \check{\varphi}\rangle &=& \langle \mathrm{vp}(\frac{1}{x}), \mathcal{F}(\check{\varphi})\rangle \\ &=& \langle \mathrm{vp}(\frac{1}{x}), (\mathcal{F}(\varphi))\check{}\rangle \\ &=& \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{-\infty}^{-\varepsilon}\frac{\mathcal{F}(\varphi)(-\xi)}{\xi}d\xi + \int_{\varepsilon}^{\infty}\frac{\mathcal{F}(\varphi)(-\xi)}{\xi}d\xi \\ &=& -\langle \mathrm{vp}(\frac{1}{x}), \mathcal{F}(\varphi)\rangle.\end{array}$$

D'après la question 2, on a, comme $\mathcal{F}(1) = 2\pi\delta_0$,

$$2\pi\delta_0 = \mathcal{F}(x\mathrm{vp}(\tfrac{1}{x})) = i\mathcal{F}(\mathrm{vp}(\tfrac{1}{x}))',$$

donc $\mathcal{F}(\mathrm{vp}(\frac{1}{x}))' = -2i\pi\delta_0$. On en déduit que $\mathcal{F}(\mathrm{vp}(\frac{1}{x})) = -2i\pi(H + C)$, où H est la fonction de Heaviside (soit $H = \mathbb{1}_{\{x\geq 0\}}$) et C est une constante. L'imparité de $\mathcal{F}(\mathrm{vp}(\frac{1}{x}))$ impose à la fonction $H + C$ d'être impaire, c'est-à-dire donne $C = -1/2$, d'où

$$\mathcal{F}(\mathrm{vp}(\tfrac{1}{x}))(\xi) = -i\pi\,\mathrm{sgn}(\xi) = -i\pi\frac{\xi}{|\xi|}.$$

⋆

Solution 5. *Support et ordre*

1. Soit $\phi \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R})$. Il existe alors $\psi \in C^\infty(\mathbb{R})$ telle que $\phi(x) = \phi(0) + \phi'(0)x + \psi(x)x^2$. Alors le terme d'ordre n de la somme vaut

$$n\phi(0) + \phi'(0)\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{j} + \sum_{j=1}^{n}\frac{\psi(1/j)}{j^2} - n\phi(0) - \phi'(0)\log n.$$

Or il est bien connu que que $\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{i} - \log n \to \gamma$, et la série qui reste est convergente car ψ est bornée sur $[0,1]$: de la sorte, $u(\phi)$ est bien défini. Ensuite, comme on a $\|\psi\|_{L^\infty([0,1])} \leq C\|\phi''\|_{L^\infty}$, puisque grâce à la formule de Taylor avec reste intégral, on trouve explicitement

$$\psi(x) = \int_0^1 (1-y)\phi''(xy)dy.$$

On en déduit que $|u(\phi)| \leq C(\|\phi'\|_{L^\infty} + \|\phi''\|_{L^\infty})$, et u est donc d'ordre au plus 2.

2. Soit $K = \{0\} \cup \bigcup_{j=1}^{\infty}\{1/j\}$. Bien sûr, $S \subseteq K$ car si $x \notin K$, il existe un voisinage V de x ne rencontrant pas K, et toute fonction test à support dans V annule u, d'après les formules ci-dessus. D'autre part, pour tout $j \in \mathbb{N}^*$, en choisissant une fonction test ayant son support dans $]1/j - \varepsilon, 1/j + \varepsilon[$, on voit que $1/j \in S$. Or S est un support, donc est fermé et ainsi, automatiquement, $0 \in S$. Finalement, $S = K$.

3. Un calcul direct montre que $u(\phi_k) = k$, mais comme $\partial_x^\alpha \phi_k(1/j) = 0$ si $\alpha \geq 0$ et quel que soit $j \geq 1$,

$$\sum_{i=0}^{p}\sup_{x\in S}|\partial_x^i \phi_k(x)| = \sup_{x\in S}|\phi_k(x)| = 1.$$

On ne peut donc pas avoir $k \leq C$ pour tout $k \in \mathbb{N}$. Cela prouve que la connaissance du support d'une distribution ne permet pas de se retreindre à l'étude des fonctions sur celui-ci.

4. Si u était d'ordre 1, on aurait une relation du type

$$|u(\varphi)| \leq C(\|\varphi\|_{L^\infty} + \|\varphi'\|_{L^\infty}).$$

On introduit donc comme suggéré le « cut-off » de la primitive seconde d'une fonction test : soit $\phi \in \mathcal{C}_c^\infty(]0,1[)$, positive, d'intégrale 1. Soit $\psi \in \mathcal{C}_c^\infty(]-1,2[$, $0 \leq \psi \leq 1$ et $\psi|_{[0,1]} = 1$. On pose

$$\psi_k(x) = \psi(x)\int_0^x\int_0^y \phi(kt)dtdy.$$

Alors $\|\psi_k\|_{L^\infty} \leq \frac{C}{k}$ et $\|\psi_k'\|_{L^\infty} \leq \frac{C}{k}$. Le membre de droite dans l'inégalité supposée est ainsi majoré par C/k.

D'autre part,

$$u(\psi_k) = \sum_{i=1}^{\infty}\psi_k(1/i) = \sum_{i=1}^{k}\psi_k(1/i) + \sum_{i=k+1}^{\infty}\psi_k(1/i).$$

Remarquons que, par une simple inégalité triangulaire, on voit que $|\psi_k(x)| \leq \|\phi\|_{L^\infty}x^2/2$ si $x \in [0,1]$. Donc

$$\left|\sum_{i=k+1}^{\infty}\psi_k(1/i)\right| \leq C\|\phi\|_{L^\infty}1/k.$$

Enfin, sur $[1/k, 1]$, comme $t \mapsto \phi(kt)$ s'annule, ψ_k est affine de pente $1/k$, et donc

$$\sum_{i=1}^{k} \psi_k\left(\frac{1}{i}\right) = \sum_{i=1}^{k}\left(\psi_k\left(\frac{1}{k}\right) + \frac{1}{k}\left(\frac{1}{i} - \frac{1}{k}\right)\right) = k\psi_k\left(\frac{1}{k}\right) + \frac{\log k}{k} + O\left(\frac{1}{k}\right).$$

Comme $|\psi_k(x)| \lesssim \|\phi\|_{L^\infty} x^2$, $k\psi_k(1/k) = O(\frac{1}{k})$. Cela prouve que

$$u(\psi_k) = \sum_{i=1}^{\infty} \psi_k\left(\frac{1}{i}\right) \gtrsim \frac{\log k}{k},$$

d'où la conclusion.

⋆

Solution 6. *Polynômes d'Hermite*

1. Si f est orthogonale à tous les polynômes pour le produit hermitien de H, alors, si $x \in \mathbb{R}$ est fixé, on a pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\int_{\mathbb{R}} f(t)\left(\sum_{j=0}^{n} \frac{x^j t^j}{j!}\right) e^{-t^2} dt = 0.$$

La fonction sous l'intégrale est dominée par

$$|f(t)|\left(\sum_{j=0}^{n} \frac{|x|^j |t|^j}{j!}\right) e^{-t^2} \leq |f(t)| e^{-\frac{t^2}{2}} \cdot e^{|x|\cdot|t|} e^{-\frac{t^2}{2}},$$

qui est une fonction de $L^1(\mathbb{R}, dx)$, en tant que produit de fonctions L^2. On peut donc appliquer le théorème de convergence dominée, et trouver que $\int_{\mathbb{R}} f(t) e^{xt-t^2} dt = 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

Posons, pour $z \in \mathbb{C}$, la fonction

$$F(z) = \int_{\mathbb{R}} f(t) e^{zt-t^2} dt.$$

C'est une fonction entière de z, car $t \mapsto tf(t)e^{zt-t^2}$ est intégrable sur $\mathbb{R}$. D'autre part, nous venons de voir que cette fonction s'annule sur $\mathbb{R}$. D'après le principe des zéros isolés, elle est donc identiquement nulle. Enfin, elle vérifie $F(ix) = \mathcal{F}(fe^{-t^2})$. Donc $\mathcal{F}(fe^{-t^2}) \equiv 0$, et comme $\mathcal{F}$ induit un isomorphisme sur L^2, on trouve $f \equiv 0$. Le théorème de projection de Hilbert sur les convexes fermés montre donc que l'espace vectoriel engendré par les polynômes est dense dans H.

2. On voit que $H_0 = 1$, et en dérivant l'expression de H_n, on trouve $H_n' = 2xH_n - H_{n+1}$, autrement dit, $H_{n+1} = 2xH_n - H_n'$. Une récurrence montre donc immédiatement que H_n est un polynôme de degré n.

Si maintenant P est un polynôme de degré $\leq n-1$, calculons

$$(H_n|P)_H = \int_{\mathbb{R}} H_n(t)\overline{P(t)} e^{-t^2} dt = (-1)^n \int_{\mathbb{R}} \frac{d^n}{dt^n}(e^{-t^2})\overline{P(t)} dt = \int_{\mathbb{R}} e^{-t^2} \frac{d^n}{dt^n}(\overline{P(t)}) dt = 0,$$

grâce à des intégrations par partie où l'exponentielle annule les termes de bord.

3. Calculons différemment H_{n+1} :

$$H_{n+1}(x) = -(-1)^n \frac{d^n}{dx^n}(-2xe^{-x^2}) = 2xH_n(x) - 2nH_{n-1}(x),$$

grâce à la formule de Leibniz. En combinant les deux formules sur H_{n+1}, on trouve $\frac{d}{dx}H_n = 2nH_{n-1}$.

4. Un calcul frontal montre que

$$\frac{d}{dx}\psi_n = \frac{d}{dx}\left(e^{\frac{-x^2}{2}}H_n\right) = -x\psi_n + 2n\psi_{n-1}.$$

Par conséquent,

$$\left(-\frac{d}{dx}+x\right)\psi_n = 2x\psi_n - 2n\psi_{n-1} = \psi_{n+1}.$$

5. Dérivons la première équation de la question précédente : $\psi_n'' + \psi_n + x\psi_n' = 2n\psi_{n-1}'$. D'autre part, en multipliant la même équation par x, on trouve $x\psi_n' + x^2\psi_n = 2xn\psi_{n-1}$. En reportant dans l'expression précédente, on arrive à

$$\psi_n'' - x^2\psi_n + \psi_n = 2n(\psi_{n-1}' - x\psi_{n-1}) = -2n\psi_n,$$

avec la deuxième équation de la question précédente. On trouve ainsi l'expression demandée :

$$\left(\frac{d^2}{dx^2} - x^2\right)\psi_n = -(2n+1)\psi_n.$$

6. Commençons par observer que $\psi_n \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, donc sa transformée de Fourier $\widehat{\psi_n}$ également. D'autre part, des intégrations par partie et des dérivations sous le signe « somme » montrent que pour tout $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$,

$$\int_{\mathbb{R}} \left(\frac{d^2}{dx^2}\varphi\right)(x)e^{-ix\xi}dx = -\xi^2 \int_{\mathbb{R}} \varphi(x)e^{-ix\xi}dx,$$
$$\int_{\mathbb{R}} (-x^2)\varphi(x)e^{-ix\xi}dx = \frac{d^2}{d\xi^2}\int_{\mathbb{R}} \varphi(x)e^{-ix\xi}dx.$$

Cela prouve donc que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\widehat{\psi_n}$ vérifie la même équation que ψ_n :

$$\left(\frac{d^2}{dx^2} - x^2\right)\widehat{\psi_n} = -(2n+1)\widehat{\psi_n}.$$

Montrons à présent que la famille $\{\psi_n\}$ est dense dans $L^2(\mathbb{R})$. On sait déjà que $\{H_n\}$ est dense dans H, puisque c'est une famille étagée en degré, et que les polynômes sont denses dans H. Ainsi, si $f \in L^2(\mathbb{R})$ est orthogonale à tous les ψ_n, alors $\tilde{f} := fe^{x^2/2} \in H$, et $\langle \tilde{f}, H_n\rangle_H = \langle f, \psi_n\rangle_{L^2} = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Alors $\tilde{f} \equiv 0$, c'est-à-dire en fait $f \equiv 0$.

D'autre part, $\{\psi_n\}$ forme une famille orthogonale de L^2 (cela découle de l'orthogonalité des H_n dans H, démontrée à la question 2).

Enfin, en notant $A := \frac{d^2}{dx^2} - x^2$ l'opérateur sur $\mathcal{S}$ qui apparaît naturellement ici, on voit que si $f, g \in \mathcal{S}$ satisfont $Af = \lambda f$ et $Ag = \lambda' g$ avec $\lambda \neq \lambda'$, alors $\langle f, g\rangle_{L^2} = 0$ (c'est simplement parce que A est autoadjoint pour cette structure). Cela prouve que pour $n \neq m$,

$$\int_{\mathbb{R}} \widehat{\psi_n}\psi_m = 0.$$

Notons à présent P la projection orthogonale sur $\psi_n^{\perp}$ (au sens du produit hermitien L^2 standard). Comme $P\psi_m = \psi_m$ pour tout $m \neq n$, et que P est autoadjoint, on a $P\widehat{\psi_n} \perp \psi_m$. Bien sûr, on a aussi $P\widehat{\psi_n} \perp \psi_n$. Par densité, cela prouve que $P\widehat{\psi_n} \equiv 0$, et donc $\widehat{\psi_n} \in \mathrm{Vect}(\psi_n)$. Ainsi ψ_n est un vecteur propre de $\mathcal{F}$ sur $\mathbb{R}$.

⋆