Corrigé d'analyse fonctionnelle
TD n° 11

Opérateurs compacts

Séance du 14 mai 2018

Solution 1. *Échauffement*

Étudions la continuité de M_a. Si $a \in \ell^\infty$, on a clairement

$$\|M_a(u)\|_{\ell^2}^2 = \sum_{n=0}^{\infty} |a_n|^2 |u_n|^2 \leq \|a\|_{\ell^\infty}^2 \|u\|_{\ell^2}^2.$$

Donc M_a est continu, et $\|M_a\| \leq \|a\|_{\ell^\infty}$. Réciproquement, s'il existe $C > 0$ tel que $\forall u \in \ell^2$, $\|M_a(u)\|_{\ell^2} \leq C\|u\|_{\ell^2}$, alors $|a_n| \leq C$ pour tout $n \in \mathbb{N}$: en effet, si $a_n \neq 0$, on applique l'inégalité précédente avec la suite dont seul le n-ième terme est non nul, et vaut $|a_n|/a_n$.

Étudions la compacité de M_a. Si $a_n \to 0$, on peut considérer, pour tout $N \in \mathbb{N}$, la suite $a^N = \{a_n^N\}_{n \in \mathbb{N}}$ définie par

$$a_n^N = \begin{cases} a_n & \text{si } n \leq N, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

On voit que $\|a^N - a\|_{\ell^\infty} \to 0$ quand $N \to +\infty$. Donc $\|M_{a^N} - M_a\| \to 0$. Or M_{a^N} est de rang fini. Donc M_a est compact, en tant que limite en norme opérateur d'une suite d'opérateurs de rang fini.

Inversement, si M_a est compact, considérons la suite δ^n, les suites valant 1 au rang n, et 0 ailleurs. C'est une suite faiblement convergente dans ℓ^2, vers 0, donc la suite $M_a(\delta^n)$ est fortement convergente dans ℓ^2 vers 0 (voir l'exercice 2). Or $\|M_a(\delta^n)\|_{\ell^2} = |a_n|$, donc $a_n \to 0$.

⋆

Solution 2. *Un opérateur compact « renforce » la convergence*

Si T est compact, et si $\{e_n\}$ est une suite de E qui converge faiblement vers e, alors la suite $\{e_n\}$ est bornée. Donc $\{Te_n\}$ est une suite dans un compact de F. Soit f une valeur d'adhérence (forte) de cette suite, et $\ell \in F^*$. Alors $\langle \ell, Te_n \rangle = \langle T^*(\ell), e_n \rangle$, et en passant à la limite des deux côtés de l'égalité, on trouve $\langle \ell, f \rangle = \langle T^*(\ell), e \rangle = \langle \ell, Te \rangle$. Donc par Hahn-Banach, $f = Te$. La suite $\{Te_n\}$ ayant pour seule valeur d'adhérence Te, elle converge vers Te.

Réciproquement, si T transforme toute suite faiblement convergente en une suite fortement convergente, montrons que $T(B_E)$ est relativement compact, où B_E est la boule unité de E. Soit donc une suite $\{f_n\}$ de $T(B_E)$. Écrivons $f_n = T(e_n)$, avec $e_n \in B_E$. Or la suite $\{e_n\}$ est bornée, donc d'après le théorème de Kakutani (et celui d'Eberlein-Šmulian pour l'équivalence entre la notion de compacité et de compacité séquentielle pour la topologie faible), $\{e_n\}$ admet une valeur d'adhérence faible, notée e^∞. Donc par hypothèse, $f^\infty := Te^\infty$ est une valeur d'adhérence forte de $\{f_n\}$, ce qui prouve que $T(B_E)$ est (séquentiellement) fortement relativement compact.

⋆

Solution 3. *Fonctions à support dans un même compact*

1. La fonction u définit une distribution à support compact, et donc, par un théorème du cours, sa transformée de Fourier est donnée par la formule

$$\hat{u}(\xi) = \langle u, e^{-ix\xi} \rangle = \int_{x\in K} u(x) e^{ix\xi} dx, \qquad (\star)$$

pour $\xi \in \mathbb{R}$. Par Cauchy-Schwarz, on a $|\hat{u}(\xi)| \leq \|u\|_{L^2} \cdot |K|^{1/2}$ pour ξ réel, donc $\hat{u}$ est bornée sur $\mathbb{R}$. D'autre part, la formule $(\star)$ reste bien définie pour $\xi \in \mathbb{C}$ (puisqu'on intègre sur K compact), et par le théorème de convergence dominée, définit une fonction holomorphe en ξ.

2. $u_n \rightharpoonup 0$ donc, pour tout $\xi \in \mathbb{R}$,

$$\widehat{u_n}(\xi) = \int_{\mathbb{R}} u_n(x) e^{-ix\xi} dx = \int_{\mathbb{R}} u_n(x) \underbrace{\mathbb{1}_K(x) e^{-ix\xi}}_{\in L^2(\mathbb{R})} dx \overset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

3. Soit $\tilde{K}$ un compact de $\mathbb{C}$, et Ω un ouvert borné qui contient $\tilde{K}$. Alors, $\forall \xi \in \Omega$, $|\widehat{u_n}(\xi)| \leq \|u_n\|_{L^2} \|\mathbb{1}_K(x) e^{-ix\xi}\|_{L^2}$. Observons d'abord que $\|u_n\|_{L^2}$ est bornée uniformément en n, d'après le théorème de Banach-Steinhaus. Ensuite, une majoration brutale garantit que

$$\|\mathbb{1}_K(x) e^{-ix\xi}\|_{L^2} \leq |K|^{1/2} \exp\left(|\Im \xi| \cdot \max_{x\in K} |x| \right) \leq C_\Omega,$$

comme Ω est borné. Les hypothèses du théorème de Montel sont donc satisfaites, donc la suite $\{\widehat{u_n}|_{\tilde{K}}\}$ est relativement compacte dans $\mathcal{C}^0(\tilde{K})$. Or, sa seule valeur d'adhérence possible est 0, d'après la question 2. Donc $\widehat{u_n}$ converge uniformément vers 0 sur $\tilde{K}$.

4. Comme L^2_K est *réflexif*, il suffit de montrer que $\mathcal{F}$ transforme toute suite faiblement convergente dans L^2_K en suite fortement convergente dans L^∞_{loc}. Si $u_n \rightharpoonup u$ dans L^2_K, alors $u_n - u \rightharpoonup 0$, donc $\mathcal{F}(u_n - u) = \mathcal{F}(u_n) - \mathcal{F}(u)$ tend uniformément vers 0 sur les compacts de $\mathbb{R}$.

$\star$

Solution 4. *Opérateurs de Hilbert-Schmidt*

1. Par définition, $(T^* f_p | e_n) = (f_p | T e_n)$, donc la formule de Parseval donne $\|T^* f_p\|^2 = \sum_n |(f_p|Te_n)|^2$. Ainsi,

$$\sum_p \|T^* f_p\|^2 = \sum_p \sum_n |(f_p|Te_n)|^2 = \sum_n \sum_p |(f_p|Te_n)|^2 = \sum_n \|Te_n\|^2,$$

car (f_p) est une base hilbertienne de H (tous les termes étant positifs, l'interversion des sommations est licite). Étant donnée une autre base hilbertienne $(\tilde{e}_n)$ de H, on a également $\sum_n \|T\tilde{e}_n\|^2 = \sum_n \|T^* f_p\|^2$, ce qui entraîne que $\sum_n \|T\tilde{e}_n\|^2 < \infty$, et l'égalité demandée. Autrement dit, le calcul de $\|T\|_{HS}$ ne dépend pas de la base considérée.

2. Soit $x \in H$ de norme 1. La formule de Parseval appliquée à Tx donne

$$\|Tx\|^2 = \sum_n |(Tx|e_n)|^2 = \sum_n |(x|T^* e_n)|^2 \leq \sum_n \|T^* e_n\|^2 = \|T^*\|^2_{HS}.$$

Or, d'après le calcul précédent, $\|T^*\|_{HS} = \|T\|_{HS}$, ce qui prouve que T est continu, de norme $\leq \|T\|_{HS}$.

3. Soit $\{u^n\}$ une suite de H telle que $u_n \rightharpoonup 0 \in H$ faiblement. On note $u_n = \sum_m a_m^n e_m$. La convergence convergence faible implique que pour tout $m \in \mathbb{N}$ fixé, $a_m^n \to 0$ quand $n \to \infty$. Comme $\{u_n\}$ est bornée, il existe $C > 0$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\sum_m |a_m^n|^2 \leq C^2.$$

T étant continue, $Tu_n = \sum_m a_m^n T e_m$. Pour $\varepsilon > 0$ donné,

— il existe M tel que $\sum_{m\geq M} \|Te_m\|^2 \leq \varepsilon^2/C^2$ (propriété de Hilbert-Schmidt) ;

— il existe N tel que pour tout $n \geq N$,

$$\sum_{m<M} |a_m^n|^2 \leq \frac{\varepsilon^2}{\|T\|_{HS}^2}.$$

Alors

$$\begin{aligned}
\|Tu_n\| &= \left\| \sum_m a_m^n T e_m \right\| \\
&\leq \left| \sum_{m<M} |a_m^n| \|Te_m\| \right| + \left| \sum_{m\geq M} |a_m^n| \|Te_m\| \right| \\
&\leq \left(\sum_{m<M} |a_m^n|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{m<M} \|Te_m\|^2 \right)^{\frac{1}{2}} + \left(\sum_{m\geq M} |a_m^n|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{m\geq M} \|Te_m\|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\
&\leq \frac{\varepsilon}{\|T\|_{HS}} \|T\|_{HS} + C\frac{\varepsilon}{C} \leq 2\varepsilon.
\end{aligned}$$

Donc $Tu_n \to 0$ dans H fortement. Cela prouve que T est compact.

Réciproquement il existe des opérateurs T compacts mais qui ne sont pas de Hilbert-Schmidt : par exemple, la multiplication M_a de l'exercice 1, avec $a_n = \frac{1}{\sqrt{n}}$ $(n \geq 1)$.

⋆

Solution 5. *Opérateurs à noyaux*

1. Soit (e_n) une base hilbertienne de H. Notons $e_n \otimes e_m : (x, y) \mapsto e_n(x)e_m(y)$.

$$\begin{aligned}
\|T_K\|_{HS}^2 = \sum_n \|T_K e_n\|_{L^2}^2 &= \sum_{n,m} |(T_K e_n | e_m)|^2 \\
&= \sum_{n,m} \left| \iint_\Omega K(x,y) e_n(x) e_m(y) dx dy \right|^2 = \sum_{n,m} |(K | e_n \otimes e_m)|^2.
\end{aligned}$$

La seule chose est donc de vérifier que $(e_n \otimes e_m)$ est une base hilbertienne de $L^2(\Omega \times \Omega)$. C'est bien une famille orthonormée. Soit V est l'espace vectoriel qu'elle engendre. Alors, si $h \in V^\perp$, on a $\forall n, m \in \mathbb{N}$,

$$\iint_\Omega h(x,y) e_n(x) e_m(y) dx dy = 0,$$

et donc pour tout n, la fonction $y \mapsto h(x,y)e_n(x)$, qui pour presque tout $x \in \Omega$ est dans $L^2(\Omega)$, est nulle. Donc à y fixé, $\int_\Omega h(x,y)e_n(x)dx = 0$, et donc $h(x,y) \equiv 0$. Cela prouve que $\overline{V} = (V^\perp)^\perp = \{0\}^\perp = L^2(\Omega \times \Omega)$.

2. Soit T un opérateur de Hilbert-Schmidt sur $H = L^2(\Omega)$. Notons $Te_n = \sum_m a_m^n e_m$ et

$$K(x,y) = \sum_{m,n} a_m^n e_m(x) e_n(y).$$

Alors $K \in L^2(\Omega \times \Omega)$ car T est Hilbert-Schmidt (on a précisément $\|K\|_{L^2}^2 = \sum_{n,m} |a_m^n|^2 = \|T\|_{HS}^2 < +\infty$). Par construction, T_K vérifie que pour tout $p, q \geq 0$, $(T_K e_p | e_q) = a_q^p$ et donc $T_K e_p = T e_p$. Ainsi, T_K est continu sur $L^2(\Omega)$, et coincide avec T sur $\mathrm{Vect}(e_n)$, qui est dense. Donc T_K est égal à T.

Examinons l'unicité : supposons que $T = T_{K_1} = T_{K_2}$. Alors $0 = \|T_{K_1 - K_2}\|_{L^2} = \|K_1 - K_2\|_{L^2}$, et donc $K_1 = K_2$.

3. Soit $\varepsilon > 0$. Il existe un ouvert ω de $\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d$ tel que $\overline{\omega}$ est borné, contenu dans $\Omega \times \Omega$, et tel que $\int_{(\Omega\times\Omega)\setminus\omega} |K|^2 \leq \varepsilon$. Soit F une fonction continue sur $\Omega \times \Omega$, à support dans $\overline{\omega}$, telle que $\|K - F\|_{L^2(\overline{\omega})} \leq \varepsilon$. Il existe un polynôme P en les variables x, y tel que

$$\|F - P\|_{L^\infty(\overline{\omega})} \leq \frac{\varepsilon}{\sqrt{|\omega|}}.$$

Notons $\tilde{P} := \mathbb{1}_{\overline{\omega}} P$. Alors $T_{\tilde{P}}$ est de rang fini (car si d est le degré en x de P, alors pour tout $f \in L^2(\Omega)$, $T_{\tilde{P}}(f)$ est une combinaison linéaire de troncatures des monomes $1, x, \ldots, x^d$). Enfin, $\|T_K - T_{\tilde{P}}\| \leq \|T_K - T_{\tilde{P}}\|_{HS} = \|K - \tilde{P}\|_{L^2} \leq 3\varepsilon$. Donc T_K est bien approchable par une suite d'opérateurs de rang fini.

⋆

Solution 6. *Théorème de Krein-Rutman*

1. $Tu \in \mathring{C}$, donc il existe ρ tel que $B(Tu, \rho) \subset C$ donc $r = \frac{\rho}{\|u\|}$ convient.

2. On suppose $T(x + u) = \lambda x$ pour un certain x dans C. Comme $x + u \in C \setminus \{0\}$, on sait que $\lambda > 0$.

On montre par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\left(\frac{\lambda}{r}\right)^n x - u \in C$. Tout d'abord, $\lambda x - T(u) = T(x) \in C$, donc $\lambda x - T(u) + T(u) - ru \in C$ donc $\frac{\lambda}{r} x - u \in C$. Supposons maintenant que $\frac{\lambda^n}{r^n} x - u \in C$. Alors $\frac{\lambda^n}{r^n} T(x) - T(u) \in C$ donc $\frac{\lambda^n}{r^n}(\lambda x - T(u)) - T(u) \in C$, donc $\frac{\lambda^n}{r^n}(\lambda x - T(u)) - T(u) + (T(u) - ru) + \frac{\lambda^n}{r^n} T(u) \in C$, donc $\frac{\lambda^{n+1}}{r^{n+1}} x - u \in C$. Or si $\lambda < r$, en faisant tendre n vers $+\infty$, on obtient $-u \in C$, donc $u = 0$, ce qui est contredit l'hypothèse selon laquelle u est intérieur au cône.

3. Supposons que pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe $x_n \in C$ tel que

$$\|x_n + u\| \leq \frac{1}{n}.$$

Alors $x_n \to -u$, mais comme C est fermé, $-u \in C$, ce qui est absurde. On considère donc l'application $\Phi : C \to C$, $x \mapsto T(\frac{x+u}{\|x+u\|})$. L'application $x \mapsto x/\|x\|$ est continue sur $E \setminus B(0, \alpha)$, donc Φ est continue sur C, en tant que composée d'applications continues. Par ailleurs $\Phi(C) \subset T(B_1)$ est relativement compact. On peut donc appliquer le théorème de Schauder à Φ, ce qui nous donne l'existence d'un point fixe $x \in C$. Ainsi,

$$T(x + u) = \|x + u\| x.$$

Notons que d'après la question précédente, $\|x + u\| \geq r$.

4. On obtient de la même manière, pour tout $\varepsilon > 0$, l'existence d'un $x_\varepsilon \in C$ tel que

$$T(x_\varepsilon + \varepsilon u) = \|x_\varepsilon + \varepsilon u\| x_\varepsilon. \qquad (\star)$$

On pose $\lambda_\varepsilon = \|x_\varepsilon + \varepsilon u\|$. Alors, pour tout $\varepsilon > 0$, $\lambda_\varepsilon \geq r$, avec r indépendant de ε (en effet, ce r, donné par la question 1, peut être choisi identique, car on a toujours $T(\varepsilon u) - r(\varepsilon u) = \varepsilon(T(u) - ru) \in C)$. Par ailleurs,

$$\|x_\varepsilon + \varepsilon u\|\|x_\varepsilon\| \leq \|T\|\|x_\varepsilon + \varepsilon u\|,$$

donc $\|x_\varepsilon\| \leq T$, et $\lambda_\varepsilon \leq \|T\| + \varepsilon\|u\|$. Quitte à extraire, on peut donc supposer que

$$\lambda_\varepsilon \longrightarrow \mu_0 > 0,$$

et par compacité de T,

$$T(x_\varepsilon) \longrightarrow x_0 \in C,$$

puisque C est fermé. D'après $(\star)$, on obtient donc

$$x_\varepsilon \longrightarrow \frac{1}{\mu_0} x_0,$$

et par conséquent, $T(x_0) = \mu_0 x_0$. Bien sûr, $x_0 \neq 0$, sans quoi on aurait $\lambda_\varepsilon \to 0$.

5. Comme $-x \notin C$, on peut poser $b := \sup\{\beta \in [0,1] \mid (1-\beta)x_0 - \beta x \in C\}$. Comme C est convexe et fermé, on voit que $(1-\beta)x_0 - \beta x \in C$ pour $0 \leq \beta \leq b$, et $(1-\beta)x_0 - \beta x \notin C$ pour $b < \beta \leq 1$. On a

$$T((1-\beta)x_0 - \beta x) = (1-\beta)\mu_0 x_0 - \beta\mu x$$

Supposons que x_0 et x ne soient pas alignés. Alors, on a $(1-b)x_0 - bx \in C \setminus \{0\}$, donc $(1-b)\mu_0 x_0 - b\mu x \in \mathring{C}$, et donc $\mu < \mu_0$ (sinon $((1-b)\mu_0 x_0 - b\mu x) + b(\mu - \mu_0) \in \mathring{C}$, ce qui n'est pas le cas). En inversant les rôles de x et x_0, on obtient l'inégalité inverse, et une absurdité. Donc x_0 et x sont alignés (et alors nécessairement $\mu = \mu_0$).

6. On peut supposer $x \notin C$ et $-x \notin C$ (sinon il suffit d'appliquer la question précédente). En particulier, x et x_0 ne sont pas alignés. Il existe b tel que $(1-\beta)x_0 + \beta x \in C$ pour $0 \leq \beta \leq b$, et $(1-\beta)x_0 + \beta x \notin C$ pour $b < \beta \leq 1$. On a donc

$$T((1-b)x_0 + bx) = (1-b)\mu_0 x_0 + b\mu x,$$

et donc, comme précédemment, $\mu < \mu_0$.

7. Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ à coefficients strictement positifs. Notons C l'ensemble des vecteurs de $\mathbb{R}^n$ dont toutes les composantes sont positives (≥ 0). C est un cône convexe de sommet 0, fermé, $C \cap (-C) = \{0\}$, et l'intérieur de C est formé des vecteurs dont toutes les composantes sont *strictement* positives. De plus, M est un opérateur compact, tel que $M(C \setminus \{0\}) \subset \mathring{C}$. Donc on peut appliquer le théorème de Krein-Rutman pour obtenir l'existence d'une valeur propre simple de M, notée μ_0, qui majore toutes les autres valeurs propres (qui, en outre, sont positives). Bien sûr, le vecteur propre associé à μ_0 est à coefficients strictement positifs.

$\star$