Corrigé d'analyse fonctionnelle
TD n° 11

Transformation de Fourier - Espaces de Sobolev

Séance du 15 avril 2019

Solution 1. *Échauffement : opérateurs différentiels*

1. Si T est une distribution à support compact, sa transformée de Fourier s'étend en une fonction analytique sur $\mathbb{C}^d$ (cf TD 10, exercice 5). En effet, on peut écrire, d'après le cours,

$$\mathcal{F}(T)(\xi) = \langle T, e^{-ix\xi} \rangle, \quad \xi \in \mathbb{R}^d,$$

et cette expression s'étend à $\xi \in \mathbb{C}^d$.

Soit χ une fonction test égale à 1 sur un voisinage de $\mathrm{supp}(T)$. On a alors

$$\mathcal{F}(T)(\xi) = \langle T, \chi e^{-ix\xi} \rangle.$$

Comme pour tout $\xi \in \mathbb{C}^d$, la fonction $x \mapsto \chi(x)e^{-ix\xi}$ est à support inclus dans $\mathrm{supp}(\chi)$, que $\chi(x)e^{-ix\xi}$ est $\mathcal{C}^\infty$ en les deux variables, on peut dériver sous le crochet de dualité, et obtenir que $\mathcal{F}(T)$ est analytique.

En Fourier, on a donc $P(\xi)\hat{T}(\xi) = 0$. Or $\hat{T}$ est analytique donc par le principe des zéros isolés, $\hat{T} = 0$ et donc $T = 0$.

Autre méthode : comme $T \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^d)$, $\widehat{T}$ est $\mathcal{C}^\infty$ et en particulier continue. En passant en Fourier, on voit que $\mathrm{supp}(T) \subset \{\xi \in \mathbb{R}^d \mid P(\xi) = 0\}$ qui est un fermé d'intérieur vide, ce qui signifie que la fonction (continue) $\widehat{T}$ s'annule sur un ouvert dense, i.e. $\widehat{T} = 0$.

2.

a) Soit $\psi \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^d \setminus \{0\})$. Alors ψ s'annule sur une boule de centre 0 et de rayon $\varepsilon_0 > 0$. On considère une approximation de l'identité $\chi_\varepsilon(x) = \varepsilon^{-d}\chi(x/\varepsilon)$ où $\mathrm{supp}(\chi) \subset B(0,1)$. On sait par hypothèse que

$$\mathrm{supp}(a * \chi_\varepsilon) \subset \mathrm{supp}(\chi_\varepsilon)$$

donc pour $\varepsilon \leq \varepsilon_0$, $\mathrm{supp}(a * \chi_\varepsilon) \cap \mathrm{supp}(\psi) = \emptyset$. Par conséquent,

$$\langle a * \chi_\varepsilon, \psi \rangle = 0$$

et par convergence de $a * \chi_\varepsilon$ vers a au sens des distributions, $\langle a, \psi \rangle = 0$.

b) Posons $T = \mathcal{F}^{-1}(p) \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$. Comme $\varphi \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^d)$,

$$\widehat{T * \varphi} = \widehat{T} \cdot \widehat{\varphi} = p\widehat{\varphi},$$

donc $P\varphi = T * \varphi$. L'hypothèse sur P permet d'appliquer la question précédente, qui conduit à $\mathrm{supp}(T) \subset \{0\}$. Mais alors T est une combinaison linéaire de dérivées de la masse de Dirac en 0 : $\mathcal{F}^{-1}(p) = T = \sum_{|\alpha| \leq N} c_\alpha \delta_0^{(\alpha)}$. En appliquant la transfromée de Fourier aux deux membres de l'égalité, $p = \sum_{|\alpha| \leq N} c_\alpha (i\xi)^\alpha$ est un polynôme. Enfin,

$$P\varphi = \mathcal{F}^{-1}\Big(\sum_{|\alpha| \leq N} c_\alpha (i\xi)^\alpha \widehat{\varphi}\Big) = \sum_{|\alpha| \leq N} c_\alpha \partial^\alpha \varphi,$$

donc P est un opérateur différentiel.

⋆

Solution 2. *Petites questions sur $H^s(\mathbb{R}^d)$*

1. On remarque que $\hat{\delta}_0 = 1$, puis que $\int_{\mathbb{R}^d}(1+|\xi|^2)^s d\xi < +\infty$ si et seulement si $s < -d/2$.
Remarque : Pour montrer l'injection de $H^s(\mathbb{R}^d)$ dans $\mathcal{C}^0(\mathbb{R}^d)$, c'est dans la même veine : pour avoir le résultat, on peut montrer que $\hat{u} \in L^1(\mathbb{R}^d)$ dès que $s > d/2$, puis conclure par la formule d'inversion (dans $L^2(\mathbb{R}^d)$), et le théorème de convergence dominée.

2. Il suffit de remarquer que $(1+|\xi|^2)^{s_1} \geq (1+|\xi|^2)^{s_2}$ pour $s_1 \geq s_2$ et $\xi \in \mathbb{R}^d$, et l'on obtient la continuité de l'injection $H^{s_1}(\mathbb{R}^d) \hookrightarrow H^{s_2}(\mathbb{R}^d)$.

3. Soit $s \in \mathbb{R}$.

Montrons d'abord que $P = -\Delta + \lambda$ est continu de $H^{s+2}(\mathbb{R}^d)$ dans $H^s(\mathbb{R}^d)$. Soit $u \in H^{s+2}(\mathbb{R}^d)$: en passant en Fourier, $\mathcal{F}(Pu) = (|\xi|^2 + \lambda)\hat{u}$ donc

$$(1+|\xi|^2)^{\frac{s}{2}}|\mathcal{F}(Pu)(\xi)| = (1+|\xi|^2)^{\frac{s}{2}}(|\xi|^2+\lambda)|\hat{u}(\xi)| \leq \max(1,\lambda)(1+|\xi|^2)^{\frac{s}{2}+1}|\hat{u}(\xi)|,$$

ce qui assure que $\|Pu\|_{H^s(\mathbb{R}^d)} \leq \max(1,\lambda)\|u\|_{H^{s+2}(\mathbb{R}^d)}$.

L'injectivité de P découle du fait que si $Pu = 0$, alors en Fourier $(|\xi|^2+\lambda)\hat{u}(\xi) = 0$ donc $\hat{u} = 0$, soit $u = 0$.

Enfin, P est surjectif. En effet, soit $f \in H^s(\mathbb{R}^d)$. On peut poser $u = \mathcal{F}^{-1}(\frac{\hat{f}}{|\xi|^2+\lambda}) \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$ qui vérifie $Pu = f$ dans $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$. On voit alors que

$$(1+|\xi|^2)^{\frac{s}{2}+1}|\hat{u}(\xi)| \leq \max(1,\frac{1}{\lambda})(1+|\xi|^2)^{\frac{s}{2}}|\hat{f}(\xi)|$$

donc $u \in H^{s+2}(\mathbb{R}^d)$. On remarque que cette dernière inégalité donne également la continuité de la réciproque.

4. Soit m l'ordre de T dans $\mathcal{E}'(\mathbb{R}^d)$, K son support. La transformée de Fourier de T est bien définie car $\mathcal{E}'(\mathbb{R}^d) \subset \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$ (on a même vu qu'il s'agit alors d'une fonction entière). On veut montrer qu'il existe $s \in \mathbb{R}$ pour lequel $\xi \mapsto \hat{T}(\xi)(1+|\xi|^2)^{s/2} \in L^2(\mathbb{R}^d)$. On prend $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ et on évalue :

$$\begin{aligned}
\langle (1+|\xi|^2)^{s/2}\hat{T}, \varphi\rangle &= \langle \hat{T}, (1+|\xi|^2)^{s/2}\varphi\rangle \\
&= \left\langle T, \mathcal{F}\left((1+|\xi|^2)^{s/2}\varphi\right)\right\rangle \\
&\leq C \sup_{\substack{|\alpha|\leq m \\ x\in K}} \left|\partial^\alpha \mathcal{F}\left((1+|\xi|^2)^{s/2}\varphi\right)\right| \\
&\leq C \int_{\mathbb{R}^d} (1+|\xi|^2)^{m/2}(1+|\xi|^2)^{s/2}|\varphi(\xi)|d\xi \\
&\leq C \left(\int_{\mathbb{R}^d}(1+|\xi|^2)^{m+s}d\xi\right)^{\frac{1}{2}} \|\varphi\|_{L^2}
\end{aligned}$$

(on a utilisé successivement : les propriétés fondamentales de la transformée de Fourier, la définition d'une distribution à support compact, et pour la dernière inégalité, c'est bien sûr Cauchy-Schwarz). Si $s < -m - \frac{d}{2}$, la dernière constante intégrale est finie. Grâce à la densité de $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ dans $L^2(\mathbb{R}^d)$, on voit donc que $(1+|\xi|^2)^{s/2}\hat{T}$ définit une forme linéaire sur $L^2(\mathbb{R}^d)$, et on conclut par dualité.

5.

a) Comme l'application $t \mapsto e^{it}$ est 1-lipschitzienne, on a

$$|e^{-ix\cdot\xi} - e^{-iy\cdot\xi}| \leq |x\cdot\xi - y\cdot\xi| \leq |x-y||\xi|,$$

par Cauchy-Schwarz sur $\mathbb{R}^d$. Et donc en interpolant, on a, pour tout $\alpha \in [0,1]$, par exemple avec $C = 2^{1-\alpha}$,

$$|e^{-ix\cdot\xi} - e^{-iy\cdot\xi}| = |e^{-ix\cdot\xi} - e^{-iy\cdot\xi}|^{\alpha}|e^{-ix\cdot\xi} - e^{-iy\cdot\xi}|^{1-\alpha} \leq C|x-y|^{\alpha}|\xi|^{\alpha}.$$

b) Or, pour $u \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$, par inversion de Fourier,

$$u(x) - u(y) = \frac{1}{(2\pi)^d}\int_{\mathbb{R}^d} \hat{u}(\xi)\left(e^{ix\cdot\xi} - e^{iy\cdot\xi}\right)d\xi.$$

Donc, pour tout $\varepsilon > 0$,

$$\begin{aligned}\frac{|u(x)-u(y)|}{|x-y|^{\alpha}} &\leq \frac{C}{(2\pi)^d}\int_{\mathbb{R}^d}|\xi|^{\alpha}|\hat{u}(\xi)|d\xi \\ &\leq \frac{C}{(2\pi)^d}\left(\int_{\mathbb{R}^d}\frac{d\xi}{(1+|\xi|)^{d+\varepsilon}}\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int_{\mathbb{R}^d}(1+|\xi|)^{d+\varepsilon+2\alpha}|\hat{u}(\xi)|^2 d\xi\right)^{\frac{1}{2}} \\ &\leq C(d,\alpha,\varepsilon)\|u\|_{H^{\frac{d+\varepsilon}{2}+\alpha}}.\end{aligned}$$

Finalement, pour tout $\alpha \in]0, s-\frac{d}{2}[$, on a (avec $\varepsilon = 2s - d - 2\alpha > 0$),

$$\frac{|u(x)-u(y)|}{|x-y|^{\alpha}} \leq C(\alpha,d)\|u\|_{H^s}.$$

c) Enfin (c'est encore la même preuve que mentionnée à la question 1),

$$\begin{aligned}(2\pi)^d|u(x)| = \left|\int_{\mathbb{R}^d}\widehat{u}(\xi)e^{ix\cdot\xi}d\xi\right| &\leq \int_{\mathbb{R}^d}|\widehat{u}(\xi)|d\xi \leq \int_{\mathbb{R}^d}|\widehat{u}(\xi)|\frac{(1+|\xi|^2)^{s/2}}{(1+|\xi|^2)^{s/2}}d\xi \\ &\leq \left(\int_{\mathbb{R}^d}|\widehat{u}(\xi)|^2(1+|\xi|^2)^s d\xi\right)^{1/2}\left(\int_{\mathbb{R}^d}\frac{d\xi}{(1+|\xi|^2)^s}\right)^{1/2} \leq C(s)\|u\|_{H^s},\end{aligned}$$

car $s > d/2$, et donc $1/(1+|\xi|^2)^s \in L^1(\mathbb{R}^d, d\xi)$. Finalement,

$$\|u\|_{L^\infty} + \sup_{x\neq y}\frac{|u(x)-u(y)|}{|x-y|^{\alpha}} \leq C(\alpha,d)\|u\|_{H^s}.$$

Par densité de $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$, si $(u_n)_n \subset \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ converge vers u dans $H^s(\mathbb{R}^d)$, quitte à extraire, on peut supposer que la convergence a lieu presque-partout et on conclut que $H^s(\mathbb{R}^d) \subset C^{\alpha}(\mathbb{R}^d)$ avec injection continue.

⋆

Solution 3. *Transformée de Fourier de la distribution diagonale*

1. Comme $\psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^2)$, on sait que $\widehat{\psi} \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^2)$, et en particulier il existe $C > 0$ telle que

$$(1+\xi^2+\eta^2)|\widehat{\psi}(\xi,\eta)| \leq C.$$

En prenant $\xi = \eta$, on voit que $\xi \mapsto \psi(\xi,\xi)$ est dans $L^1(\mathbb{R})$. Par conséquent, le théorème de convergence dominée implique

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\mathbb{R}} e^{-\varepsilon\xi^2}\widehat{\psi}(\xi,\xi)d\xi = \int_{\mathbb{R}}\widehat{\psi}(\xi,\xi)d\xi = \langle T, \widehat{\psi}\rangle = \langle \widehat{T}, \psi\rangle.$$

2. On développe

$$\widehat{\psi}(\xi,\xi) = \int_{\mathbb{R}^2} e^{-i(\xi,\xi).(x,y)}\psi(x,y)dxdy,$$

soit

$$I_\varepsilon = \int_{\mathbb{R}} e^{-\varepsilon\xi^2} \int_{\mathbb{R}^2} e^{-i\xi(x+y)}\psi(x,y)dxdyd\xi.$$

On peut intervertir sans problème les intégrales car $(\xi, x, y) \mapsto e^{-\varepsilon\xi^2}e^{-i\xi(x+y)}\psi(x,y)$ est dans $L^1(\mathbb{R}^3)$. Mais on connaît la transformée de Fourier de la Gaussienne

$$\int_{\mathbb{R}} e^{-\varepsilon\xi^2}e^{-i\xi(x+y)}d\xi = \sqrt{\frac{\pi}{\varepsilon}}e^{-\frac{(x+y)^2}{4\varepsilon}}$$

donc

$$I_\varepsilon = \sqrt{\frac{\pi}{\varepsilon}} \int_{\mathbb{R}^2} e^{-\frac{(x+y)^2}{4\varepsilon}}\psi(x,y)dxdy.$$

Dans l'intégrale en y, on fait le changement de variable $z = \frac{x+y}{2\sqrt{\varepsilon}}$. On obtient comme voulu

$$I_\varepsilon = 2\sqrt{\pi}\int_{\mathbb{R}^2} e^{-z^2}\psi(x, 2\sqrt{\varepsilon}z - x)dxdz.$$

3. On pose $f_\varepsilon(x,z) = e^{-z^2}\psi(x, 2\sqrt{\varepsilon}z - x)$ et on va appliquer le théorème de convergence dominée en faisant tendre ε vers 0. On voit que $f_\varepsilon(x,z) \to e^{-z^2}\psi(x,-x)$. De plus, en choisissant $C > 0$ telle que

$$(1 + x^2 + y^2)|\psi(x,y)| \leq C,$$

on a la majoration

$$f_\varepsilon(x,z) \leq \frac{Ce^{-z^2}}{1+x^2}$$

qui est intégrable sur $\mathbb{R}^2$, donc en passant à la limite,

$$\langle \widehat{T}, \psi\rangle = 2\sqrt{\pi}\int_{\mathbb{R}^2} e^{-z^2}\psi(x,-x)dxdz = 2\pi\int_{\mathbb{R}}\psi(x,-x)dx$$

⋆

Solution 4. *L'équation de Schrödinger*

1. On prend la transformée de Fourier par rapport à x de l'équation : dans $L^2(\mathbb{R}^d)$, on a l'égalité

$$i\partial_t\widehat{u} - |\xi|^2\widehat{u} = 0,$$

et on obtient $\widehat{u}(t,\xi) = e^{it|\xi|^2}\widehat{u_0}(\xi)$ dans $L^2(\mathbb{R}^d)$. Comme la transformée de Fourier est un isométrie de $L^2(\mathbb{R}^d)$ dans lui même, on obtient

$$\|u(t)\|_{L^2} = \|u_0\|_{L^2}.$$

2. On sait que $e^{it|\xi|^2}$ est borné, donc est dans $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$ et sa transformée de Fourier est bien définie (au sens de $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$).

3. On voit que pour α de partie réelle strictement négative, on a

$$\nabla\mathcal{F}^{-1}(e^{\alpha|\xi|^2})(x) = \frac{x}{2\alpha}\mathcal{F}^{-1}(e^{\alpha|\xi|^2})(x),$$

donc en calculant $\nabla(e^{-\frac{|x|^2}{4\alpha}}\mathcal{F}^{-1}(e^{\alpha|\xi|^2})(x)) = 0$, on déduit que $\mathcal{F}^{-1}(e^{\alpha|\xi|^2})(x) = e^{\frac{|x|^2}{4\alpha}}\mathcal{F}^{-1}(e^{\alpha|\xi|^2})(0)$.

On calcule ensuite

$$\mathcal{F}^{-1}(e^{\alpha|\xi|^2})(0) = \frac{1}{(2\pi)^d}\int_{\mathbb{R}^d} e^{\alpha|\xi|^2}d\xi = \frac{1}{(2\pi)^d}\left(\frac{\pi}{-\alpha}\right)^{\frac{d}{2}}.$$

4. Soit $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$. On considère un imaginaire pur $\alpha = ib$. On écrit

$$\begin{aligned}
\langle \frac{1}{(-4\pi ibt)^{\frac{d}{2}}}e^{\frac{|x|^2}{4ib}}, \varphi\rangle &= \lim_{\varepsilon\to 0}\langle \frac{1}{(-4\pi(-\varepsilon+ibt))^{\frac{d}{2}}}e^{\frac{|x|^2}{4(-\varepsilon+ib)}}, \varphi\rangle \\
&= \lim_{\varepsilon\to 0}\langle \mathcal{F}^{-1}(e^{(-\varepsilon+ib)|\xi|^2}), \varphi\rangle \\
&= \lim_{\varepsilon\to 0}\langle e^{(-\varepsilon+ib)|\xi|^2}, \mathcal{F}^{-1}(\varphi)\rangle \\
&= \langle e^{ib|\xi|^2}, \mathcal{F}^{-1}(\varphi)\rangle \\
&= \langle \mathcal{F}^{-1}(e^{ib|\xi|^2}), \varphi\rangle,
\end{aligned}$$

les deux limites étant justifiées directement par le théorème de convergence dominée.

5. Si $u(t)$ est solution de l'équation de Schrödinger, alors $u(t) = \mathcal{F}^{-1}(e^{it|\xi|^2}) * u_0$, donc pour $t > 0$ on a

$$\|u(t)\|_{L^\infty} \leq \|\mathcal{F}^{-1}(e^{it|\xi|^2})\|_{L^\infty}\|u_0\|_{L^1} \leq \frac{1}{(4\pi t)^{\frac{d}{2}}}\|u_0\|_{L^1}.$$

⋆

Solution 5. *Un théorème dû à Hörmander*

1. Soit $f \in L^p(\mathbb{R}^d)$ dont le support est contenu dans un compact K. Il existe M assez grand tel que si $|h| \geq M$, alors $K \cap (h+K) = \emptyset$. On a alors

$$\begin{aligned}
\|\tau_h f + f\|_{L^p}^p &= \int_{\mathbb{R}} |f(x-h) + f(x)|^p(\mathbf{1}_K(x) + \mathbf{1}_{h+K}(x))dx \\
&= \int_K |f(x)|^p dx + \int_{h+K}|f(x-h)|^p dx \\
&= 2\|f\|_{L^p}^p.
\end{aligned}$$

On a ainsi $\|\tau_h f + f\|_{L^p} = 2^{\frac{1}{p}}\|f\|_{L^p}$.

À présent, soit $f \in L^p(\mathbb{R}^d)$ quelconque, et $\varepsilon > 0$. Il existe $g \in L^p(\mathbb{R}^d)$ à support compact tel que

$$\|f - g\|_{L^p} < \varepsilon\,.$$

Soit $M \geq 0$ tel que pour tout $|h| \geq M$, $\|\tau_h g + g\|_{L^p} = 2^{\frac{1}{p}}\|g\|_{L^p}$. Majorons alors

$$\begin{aligned}
\|\tau_h f + f\|_{L^p} - 2^{\frac{1}{p}}\|f\|_{L^p} &\leq \|\tau_h g + g\|_{L^p} + \|f-g\|_{L^p} + \|\tau_h f - \tau_h g\|_{L^p} - 2^{\frac{1}{p}}\|f\|_{L^p} \\
&\leq 2^{\frac{1}{p}}(\|g\|_{L^p} - \|f\|_{L^p}) + 2\|f-g\|_{L^p} \\
&\leq 4\|f-g\|_{L^p} \\
&\leq 4\varepsilon,
\end{aligned}$$

car τ_h est une isométrie de $L^p(\mathbb{R}^d)$. Dans l'autre sens,

$$\begin{aligned} 2^{\frac{1}{p}}\|f\|_{L^p} - \|\tau_h f + f\|_{L^p} &\leq 2^{\frac{1}{p}}(\|g\|_{L^p} + \varepsilon) - \|\tau_h f + f\|_{L^p} \\ &\leq 2\varepsilon + \|\tau_h g + g\|_{L^p} - \|\tau_h f + f\|_{L^p} \\ &\leq 2\varepsilon + \|\tau_h(g-f) + (g-f)\|_{L^p} \\ &\leq 4\varepsilon. \end{aligned}$$

2. Notons $C := \sup\left\{\|Tf\|_{L^q} \mid f \in L^p(\mathbb{R}^d),\ \|f\|_{L^p} = 1\right\}$. Soit $f \in L^p(\mathbb{R}^d)$ telle que $\|f\|_{L^p} = 1$. D'une part, on a

$$\|T(\tau_h f + f)\|_{L^q} \leq C\|\tau_h f + f\|_{L^p}.$$

D'autre part, comme T commute aux translations, $\|T(\tau_h f + f)\|_{L^q} = \|\tau_h(Tf) + (Tf)\|_{L^q}$. En faisant tendre h vers l'infini, on obtient alors

$$2^{\frac{1}{q}}\|Tf\|_{L^q} \leq C \cdot 2^{\frac{1}{p}}.$$

En prenant le supremum sur de telles fonctions f, on trouve

$$C \cdot 2^{\frac{1}{q}} \leq C \cdot 2^{\frac{1}{p}}.$$

Vu que $p > q$, on voit que nécessairement $C = 0$, donc T est nulle, par homogénéité.

3. Supposons que pour tout $f \in L^2(\mathbb{R}^d)$, on a $w * f \in L^1(\mathbb{R}^d)$. Définissons alors l'opérateur

$$T : \begin{cases} L^2(\mathbb{R}^d) \longrightarrow L^1(\mathbb{R}^d) \\ \qquad f \longmapsto w * f. \end{cases}$$

Premièrement, T commute avec les translations : si $x, h \in \mathbb{R}^d$, alors

$$(w * \tau_h f)(x) = \int_{\mathbb{R}^d} w(y)\tau_h f(x-y)dy = \int_{\mathbb{R}^d} w(y) f(x-h-y)dy = (w*f)(x-h).$$

Reste à voir pourquoi T est continue. On va appliquer le théorème du graphe fermé : soit $(f_n)_n$ une suite d'éléments de $L^2(\mathbb{R}^d)$ tels que $f_n \to f$ dans $L^2(\mathbb{R}^d)$ et $w * f_n \to g$ dans $L^1(\mathbb{R}^d)$. Il s'agit de montrer que $g = w * f$. Pour ce faire, considérons la transformée de Fourier : nous avons

$$\begin{aligned} \widehat{f_n} &\to \widehat{f} \quad \text{dans } L^2(\mathbb{R}^d), \\ \widehat{w * f_n} = \widehat{w} \cdot \widehat{f_n} &\to \widehat{g} \quad \text{dans } L^\infty(\mathbb{R}^d). \end{aligned}$$

Or à une sous-suite près de $(\widehat{f_n})_n$, la convergence vers $\widehat{f}$ a lieu presque partout, ce qui signifie que pour presque tout $x \in \mathbb{R}^d$, $\widehat{w}(x)\widehat{f_n}(x) \to \widehat{g}(x)$. Donc $\widehat{g} = \widehat{w}\widehat{f}$ dans $L^\infty(\mathbb{R}^d)$, i.e. $g = Tf$.

D'après la question précédente, cela impose que $T \equiv 0$. Or si l'on choisit $f := \mathcal{F}^{-1}(\overline{\widehat{w}})$, on a clairement $Tf \neq 0$ car $\widehat{Tf} = |\widehat{w}|^2$. D'où une contradiction.

$\star$