Correction du Td n° 11 d'Analyse fonctionnelle

Opérateurs non bornés

Séance du 16 mai 2014

Solution 1. *Théorème de Bôchner*

1. On calcule

$$\begin{aligned}\sum_{j,k=1}^{n} f(\xi_j - \xi_k) z_j \bar{z_k} &= \sum_{j,k=1}^{n} \int e^{ix.(\xi_j - \xi_k)} z_j \bar{z_k} \mu(dx) \\ &= \int (\sum_{j=1}^{n} z_j e^{ix.\xi_j}) \overline{\sum_{k=1}^{n} z_k e^{ix.\xi_k}} \mu(dx) \\ &= \int \left| \sum_{j=1}^{n} z_j e^{ix.\xi_j} \right|^2 \mu(dx) \geq 0\end{aligned}$$

2. On prend $\xi_1 = y$, $\xi_2 = 0$, $z_2 = 1$ et z_1 tel que $|z_1| = 1$. On a

$$2f(0) + f(y)z_1 + f(-y)\bar{z_1} \geq 0.$$

On choisit Z_1 tel que $z_1 f(y) = -|f(y)|$ pour obtenir l'inégalité souhaitée.

3. Si $\phi \in \mathcal{S}$ strictement positive, $\phi = \psi^2$ avec $\psi \in \mathcal{S}$ donc

$$l(\phi) = \int f(\xi)\widehat{\psi^2} d\xi = \int f(\xi)\hat{\psi}(\eta)\hat{\psi}(\xi - \eta) d\eta d\xi = \int f(\xi - \eta)\hat{\psi}(\xi)\overline{\hat{\psi}(\eta)} d\eta d\xi \geq 0.$$

4. Soit $\phi \in \mathcal{S}$. Pour tout C, il existe R tel que pour $|x| \geq R$ on ait $|\phi(x)| \leq \frac{C}{(1+|x|^4)}$. On peut ensuite trouver λ assez petit tel que

$$\|\phi\|_{L^\infty} \leq \frac{\varepsilon + \|\phi\|_{L^\infty}}{1 + \lambda R^4}.$$

5. On applique la question 3 à $(\varepsilon + \|\phi\|_{L^\infty})K_\lambda - \phi$.

6. On calcule $\hat{K_\lambda}(\xi) = \frac{1}{\lambda^{\frac{n}{4}}}\hat{K_1}(\frac{\xi}{\lambda^{\frac{1}{4}}})$. On a donc quand λ tend vers 0,

$$\int \hat{K_\lambda}(\xi) f(\xi) d\xi \longrightarrow f(0)$$

On a donc

$$|l(\phi)| \leq (\varepsilon + \|\phi\|_{L^\infty}),$$

et en faisant tendre ε vers 0, on obtient $|l(\phi)| \leq \|\phi\|_{L^\infty}$. On peut donc prolonger l en une mesure de probabilité μ positive. Au sens des distributions, on a $\hat{f} = \mu$ donc

$$f = \int e^{i\xi.x} \mu(dx)$$

⋆

Solution 2. *Transformée de Cayley*

1. On a

$$\begin{aligned}||Au+iu||^2 &= ||Au||^2+||u||^2+ < Au, iu > + < iu, Au > \\ &= ||Au||^2+||u||^2 - i < Au, u > +i < u, Au > \\ &= ||Au||^2+||u||^2.\end{aligned}$$

Si A est fermé, on montre donc de la même mainière que dans l'exercice 1 du TD 11 que $Im(A+i)$ est fermée. $Im(A+i)^{\perp} = Ker(A^* - i)$ a été vu en cours. Si $Au+iu=0$ alors d'après le calcul précédent $Au=0$ et $u=0$. Ainsi $\mathrm{Ker}(A+i)=0$.

2. Soit $v \in Im(U-I)$. On a alors $v = Uw - w$ avec $w \in Im(A+I)$, donc $w = Au+iu$ avec $u \in D(A)$. On écrit

$$v = (A-i)u - (Au+iu) = -2iu$$

donc $v \in D(A)$. La réciproque s'obtient en suivant le raisonnement à l'envers. On a montré de plus, sur $Im(A+i)$

$$(U-I) = -2i(A+i)^{-1}$$

Soit $w \in Im(A+i)$? On écrit $w = Ay+iy$. On calcule

$$\begin{aligned}< Uw, Uw > = < Ay-iy, Ay-iy > &= < Ay+iy-2iy, Ay+iy-2iy > \\ &= ||w||^2 + < Ay+iy, -2iy > + < -2iy, Ay+iy > +4||y||^2 \\ &= ||w||^2 + 2i < Ay, y > -2i < Ay, y > -4||y||^2 + 4||y||^2 \\ &= ||w||^2\end{aligned}$$

U est donc une isomètrie.

Si $Uw = w$ avec $w = Ay+iy$, alors $Ay-iy = Ay+iy$ donc $y=0$. On a donc $\mathrm{Ker}(U-I)=0$.

On calcule, sur $D(A)$,

$$\begin{aligned}(U+I)(U+I)^{-1} &= (U-I+2I)(U+I)^{-1} \\ &= I + 2(U+I)^{-1} \\ &= I + 2(\frac{i}{2})(A+i) \\ &= I + iA - I = iA\end{aligned}$$

Cette formule permet de vérifier $Im(U) = Im(A-i)$.

3. A est auto-adjoint si et seulement si $Im(A \pm i) = H$, donc si et seulement si U est une isomètrie $H \to H$.

4. Si A admet une extension auto-ajdjointe, alors U admet une extension isomètrique $H \to H$ donc $Im(A+i)^{\perp}$ et $Im(A-i)^{\perp}$ sont isomètriques donc ont la même dimension. Réciproquement, si $Im(A+i)^{\perp}$ et $Im(A-i)^{\perp}$ ont la même dimension, on peut construire une isomètrie $V : Im(A+i)^{\perp} \to Im(A-i)^{\perp}$ et définir ainsi une extension isomètrique de U $H \to H$. On peut donc définir une extension auto-ajointe de A.

Dans le cas de $A = i\frac{d}{dx}$ défini sur H_0^1, si $iu = A^*u$ avec $u \in H^1$, alors $u = C\exp(x)$. On a donc $\dim(\mathrm{Ker}(A^* \pm i)) = 1$.

⋆