Correction du Td n° 12 d'Analyse fonctionnelle

EDP Elliptiques

Séance du 22 Mai 2015

Solution 1. *Inégalité de Poincaré-Wirtinger*

1. Rappelons que l'injection $H^1(\Omega) \hookrightarrow L^2(\Omega)$ est compacte. Supposons que l'inégalité désirée n'ait pas lieu. Il existerait donc $u_n \in H^1(\Omega)$ tel que $\|u_n - \bar{u}_n\|_{L^2} = 1$ et $\|\nabla u_n\|_{L^2} \to 0$. Ainsi, $v_n = u_n - \bar{u}_n$ est bornée dans $H^1(\Omega)$, donc quitte à extraire, converge vers v fortement dans L^2 et faiblement dans $H^1(\Omega)$. Comme $\|\nabla u_n\|_{L^2} = \|\nabla v_n\|_{L^2} \to 0$, en fait, $v_n \to v$ fortement dans $H^1(\Omega)$ et $\nabla v = 0$. Comme Ω est connexe, v est constante. Comme $\int v_n = 0$ (et Ω de mesure finie), $\int v = 0$ et donc $v = 0$. Ceci contredit que $\|v\|_{L^2} = \lim \|v_n\|_{L^2} = 1$.

⋆

Solution 2. *Problème de Neumann*

1. Comme u est régulière, si u est solution forte, on a le droit de faire l'intégration par partie, qui donne

$$\begin{aligned}\int fv = -\int \Delta u.v + \int_\Omega uv &= -\int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial n} v + \int_\Omega (\nabla u, \nabla v) + \int_\Omega uv \\ &= \int_\Omega (\nabla u, \nabla v) + \int_\Omega uv,\end{aligned}$$

par la condition au bord.

Réciproquement, si u est solution faible, on déduit de cette même intégration par parties que

$$\int_\Omega (-\Delta u + u - f)v - \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial n} v = 0$$

pour tout $v \in \mathcal{C}^\infty(\overline{\Omega}) \subset H^1(\Omega)$. On en déduit (en utilisant des fonctions $\mathcal{C}^1_c(\Omega)$), que $-\Delta u + u = f$ p.p. dans Ω, puis pour tout x dans Ω (puisque u est $\mathcal{C}^2$), puis enfin que $\partial u / \partial n = 0$ sur $\partial\Omega$.

2. Soit

$$B(u, v) = \int_\Omega (\nabla u, \nabla v + uv).$$

Cette application est clairement bilinéaire, continue et coercive sur $H^1(\Omega) \times H^1(\Omega)$. Le lemme de Lax-Milgram nous donne l'existence d'une unique fonction $u \in H^1(\Omega)$ telle que $B(u, v) = \int_\Omega fv$ pour tout $v \in H^1(\Omega)$. D'où l'existence et l'unicité de la solution faible.

De plus, comme $B(u, v) = B(v, u)$ pour tout u, v, on sait que u est l'unique minimiseur sur $H^1(\Omega)$ de $J(u) = \int_\Omega (\frac{1}{2}|\nabla u|^2 + \frac{1}{2}u^2 - fu)$.

3. Si (1) admet une solution faible, alors $\int_\Omega \nabla u \nabla v = \int_\Omega fv$ pour tout $v \in H^1(\Omega)$. En prenant $v \equiv 1$, on en déduit que

$$\int_\Omega f = 0.$$

Montrons que cette condition sur f est suffisante pour avoir l'existence d'une solution faible. Pour cela, nous allons montrer que B est bilinéaire, continue et coercive sur $H^1_K(\Omega)\times H^1_K(\Omega)$. La bilinéarité et la continuité sont évidentes. Pour tout $u \in H^1_K(\Omega)$,

$$B(u,u) = \int_\Omega |\nabla u|^2.$$

Or l'inégalité de Poincaré-Wirtinger nous donne l'existence d'une constante C telle que pour tout $v \in H^1(\Omega)$,

$$\left\| v - \frac{1}{|\Omega|}\int_\Omega v \right\|_{L^2(\Omega)} \le C\|\nabla v\|^2_{L^2(\Omega)}.$$

Donc si $u \in H^1_K(\Omega)$, $\|u\|_{L^2(\Omega)} \le C\|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}$ (ce qui signifie que $\|u\|_{H^1(\Omega)}$ et $\|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}$ sont deux normes équivalentes sur $H^1_K(\Omega)$). D'où la coercivité de B :

$$B(u,u) \ge \frac{1}{C}\|u\|_{H^1(\Omega)}.$$

Donc il existe une unique fonction $u \in H^1_K(\Omega)$ telle que pour tout $\mathbf{v} \in \mathbf{H^1_K(\Omega)}$, $B(u,v) = \int_\Omega fv$. **L'exercice n'est pas fini ! Il faut maintenant étendre cette identité aux fonctions $v \in H^1(\Omega)$ (et non $H^1_K(\Omega)$).**

Soit donc $v \in H^1(\Omega)$ et $w = v - \frac{1}{|\Omega|}\int_\Omega v$. Comme $w \in H^1_K(\Omega)$ et $\nabla v = \nabla w$, on a

$$B(u,v) = B(u,w) = \int_\Omega fw = \int_\Omega fv - \frac{1}{|\Omega|}\int_\Omega\int_\Omega f(x)v(y)dxdy = \int_\Omega fv$$

car $\int_\Omega f = 0$. D'où la conclusion.

Si u_0 est une autre solution de cette équation, alors $-\Delta(u-u_0) = 0$ et $\partial_n(u-u_0) = 0$ sur $\partial\Omega$. On en déduit facilement que $\int_\Omega |\nabla(u-u_0)|^2 = 0$, donc $u - u_0$ est constante. Réciproquement, $u + c$ est solution de (1) pour toute constante c.

⋆

Solution 3. *Problème elliptique avec contrainte intégrale*

On remarque pour commencer que sur $H^1_0(\Omega)$, on a l'inégalité de Poincaré donc la norme H^1 est équivalente à la norme L^2 du gradient.

1. Comme d'habitude (revoir le cours au besoin) on considère une suite minimisante (w_k) dans $\mathcal{A}$ telle que :

$$I(w_k) \to \inf_{w\in\mathcal{A}} I(w).$$

En particulier w_k est borné dans H^1_0 donc on peut (quitte à extraire) supposer que $w_k \rightharpoonup u$ faiblement dans H^1_0. Par l'inégalité de Fatou, on a bien $I(u) = \inf_{w\in\mathcal{A}} I(w)$.

Mais ce n'est pas fini, il faut vérifier que $J(u) = 0$. Pour cela, par injection compacte de H^1 dans L^2 on a $w_k \to u$ fortement dans L^2. On écrit ensuite :

$$|J(u)| = |J(u) - J(w_k)| \le \int_\Omega |G(u) - G(w_k)|.$$

Je vous laisse conclure.

2. C'est un peu plus délicat que d'habitude à cause de la "non linéarité" de G : si $v \in \mathcal{A}$, on n'a pas forcément $u + tv \in \mathcal{A}$. Voilà comment on s'en sort quand même. On fixe v une fonction de $H^1_0(\Omega)$.

Commençons par supposer que $g(u)$ n'est pas nul presque partout. On peut alors choisir w dans $H_0^1(\Omega)$ telle que :

$$\int_\Omega g(u)w \neq 0.$$

On considère alors $j(\tau, \sigma) = J(u + \tau v + \sigma w)$. On vérifie que l'on a

$$j(0,0) = 0, \quad \frac{\partial j}{\partial \sigma}(0,0) \neq 0.$$

D'après le théorème des fonctions implicites, il existe un C^1 difféomorphisme ϕ tel que $\phi(0) = 0$ et pour $|\tau|$ assez petit :

$$j(\tau, \phi(\tau)) = 0$$

On considère à présent $i(\tau) = I(u + \tau v + \phi(\tau)w)$ (on a bien $u + \tau v + \phi(\tau)w \in \mathcal{A}$). Comme u est minimum, i a un minimum en 0, ce qui entraine :

$$\int_\Omega \nabla u.(\nabla v + \phi'(0)\nabla w) = 0.$$

Or (pour le voir, différencier $j(\tau, \phi(\tau)) = 0$) ,

$$\phi'(0) = -\frac{\int_\Omega g(u)v}{\int_\Omega g(u)w}.$$

On définit alors

$$\lambda = \frac{\int_\Omega \nabla u.\nabla w}{\int_\Omega g(u)w}.$$

Dans le cas où $g(u) = 0$ p.p., alors $\nabla G(u) = 0$ p.p. . Donc comme Ω est connexe, $G(u) = C$ p.p., puis $G(u) = 0$ p.p.

Par le théorème de trace, $G(u) = 0$ sur $\partial\Omega$. Comme $u = 0$ sur $\partial\Omega$, on a forcément $G(0) = 0$. Cela implique que $0 \in \mathcal{A}$.

Donc on a $u = 0$, car sinon $I(u) > I(0) = 0$. L'identité demandée est donc trivialement vérifiée pour n'importe quel λ.

⋆

Solution 4. *Terme manquant dans le lemme de Fatou*

1. Par les accroissement finis, pour $\alpha \in]-1,1[$, $||1+\alpha|^p - 1| \leq 2^{p-1}|\alpha|$. D'autre part, la convexité de $x \mapsto |x|^p)$ donne :

$$0 \leq |\alpha + \beta|^p \leq 2^{p-1}(|\alpha|^p + |\beta|^p).$$

Si $\varepsilon < 2^{p-1}$. Supposons que $|b| \leq \frac{\varepsilon}{2^{p-1}}|a|$. Alors

$$||a+b|^p - |a|^p| = |a|^p \left| \left| 1 + \frac{b}{a} \right|^p - 1 \right| \leq |a|^p 2^{p-1} \left| \frac{b}{a} \right| \leq \varepsilon |a|^p.$$

Si $|b| \geq \frac{\varepsilon}{2^{p-1}}|a|$, $|a| \leq \frac{2^{p-1}}{\varepsilon}|b|$ et

$$||a+b|^p - |a|^p| \leq \max(|a+b|^p, |a|^p) \leq 2^{p-1}(|a|^p + |b|^p) \leq 2^{p-1}\left(\frac{2^{p(p-1)}}{\varepsilon^p} + 1\right)|b|^p.$$

Maintenant, si $\varepsilon \geq 2^{p-1}$, on a par l'inégalité de convexité :

$$||a+b|^p - |a|^p| \leq \max(|a+b|^p, |a|^p) \leq 2^{p-1}|a|^p + 2^{p-1}|b|^p.$$

Dans tous les cas, la constante $C_\varepsilon = \frac{2^{p-1}(2^{p(p-1)}+1)}{\varepsilon^p}$ convient.

2. Comme $f_n \to f$ p.p., on a que $g_n^\varepsilon \to 0$ p.p. De plus,

$$\begin{aligned} ||f_n|^p - |f|^p - |f-f_n|^p| &\leq |f|^p + ||f + (f_n - f)|^p - |f-f_n|^p| \\ &\leq |f|^p + \varepsilon|f-f_n|^p + C_\varepsilon|f|^p \\ &\leq \varepsilon|f-f_n|^p + (1+C_\varepsilon)|f|^p. \end{aligned}$$

Dans tous les cas, on a donc

$$\begin{aligned} 0 \leq g_n^\varepsilon &= \max(||f_n|^p - |f|^p - |f-f_n|^p| - \varepsilon|f-f_n|^p, 0) \\ &\leq \max((1+C_\varepsilon)|f|^p, 0) \leq (1+C_\varepsilon)|f|^p. \end{aligned}$$

Comme $|f|^p \in L^1$, le théorème de convergence dominée s'applique et

$$\int g_n^\varepsilon \to 0 \quad \text{quand} \quad n \to \infty.$$

3. Maintenant, (vu que $a \leq (a-b)_+ + b$),

$$||f_n|^p - |f|^p - |f-f_n|^p| \leq g_n^\varepsilon + \varepsilon|f-f_n|^p,$$

donc

$$\limsup \int ||f_n|^p - |f|^p - |f-f_n|^p| \leq \varepsilon \limsup \int |f-f_n|^p.$$

Mais comme $\|f_n\|_{L^p} \leq C$, on a :

$$\int |f-f_n|^p = \|f-f_n\|_{L^p}^p \leq (\|f\|_{L^p} + \|f_n\|_{L^p})^p \leq (\|f\|_{L^p} + C)^p = D.$$

Ainsi,

$$\limsup \int ||f_n|^p - |f|^p - |f-f_n|^p| \leq D\varepsilon,$$

d'où le résultat.

4. Pour Fatou, il suffit d'écrire que

$$\limsup \int |f|^p - |f_n|^p + |f-f_n|^p = 0, \quad \text{d'où}$$

$$\int |f|^p = \liminf \int |f_n|^p - |f-f_n|^p \leq \liminf \int |f_n|^p.$$

Pour l'autre résultat, on voit que l'on a en particulier

$$\lim \int |f-f_n|^p + \int |f|^p - \int |f_n|^p = 0,$$

d'où $\int |f-f_n|^p \to 0$ et $f_n \to f$ dans L^p (ce dernier résultat est également une conséquence de l'uniforme convexité de L^p).

$\star$