

# Corrigé d'analyse fonctionnelle TD n° 12

## CONVOLUTION DES DISTRIBUTIONS

Séance du 2 mai 2017

### Solution 1. *Échauffement*

1. Soit  $\phi \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R})$ .

$$\langle H', \phi \rangle = -\langle H, \phi' \rangle = -\int_0^\infty \phi'(x) dx = \phi(0) = \langle \delta_0, \phi \rangle.$$

2. •  $\delta_a$  est à support compact, il n'y a donc pas de problème pour calculer

$$(\delta_a * H)' = \delta_a * H' = \delta_a * \delta_0 = \delta_a,$$

donc  $(\delta_a * H)(x) = \mathbb{1}_{x \geq a}$ . On peut aussi remarquer directement que  $(\delta_a * \psi)(x) = \psi(x - a)$ , et donc

$$\langle H * \delta_a, \psi \rangle = \langle H, \check{\delta}_a * \psi \rangle = \langle H, \psi(\cdot + a) \rangle = \langle \mathbb{1}_{x \geq a}, \psi \rangle.$$

- On calcule :  $\delta_0' * \mathbb{1} = (\delta_0 * \mathbb{1})' = \mathbb{1}' = 0$ .
- Il faut remarquer que si  $m > n$ ,  $x^m \delta_0^{(n)} = 0$  (on fait le calcul explicite sur une fonction test, grâce à la formule de Leibniz). Par ailleurs, on calcule, pour  $\psi \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R})$ ,

$$\begin{aligned} \langle x^m \delta_0^{(n)}, \psi \rangle &= \langle \delta_0^{(n)}, x^m \psi(x) \rangle = (-1)^n (x^m \psi)^{(n)}(0) \\ &= (-1)^n \binom{n}{m} (m!) \psi^{(n-m)}(0) = (-1)^m A_n^m \langle \delta_0^{(n-m)}, \psi \rangle. \end{aligned}$$

Ainsi,  $x^m \delta_0^{(n)} = (-1)^m A_n^m \delta_0^{(n-m)}$ . On va donc supposer que  $m \leq n$  et  $p \leq q$ . On a alors

$$x^m \delta_0^{(n)} * x^p \delta_0^{(q)} = (-1)^{m+p} A_n^m A_q^p \delta_0^{(n-m)} * \delta_0^{(q-p)} = (-1)^{m+p} A_n^m A_q^p \delta_0^{(n+q-m-p)},$$

puisque pour tous  $r, s \geq 0$ ,  $\delta_0^{(r)} * \delta_0^{(s)} = (\delta_0 * \delta_0)^{(r+s)} = \delta_0^{(r+s)}$ .

•  $(\mathbb{1}_{[a,b]} * \mathbb{1}_{[c,d]})''$  ne fait intervenir que des distributions de  $\mathcal{E}'$ , il n'y a pas de problème pour définir leur convolution. Ensuite,

$$(\mathbb{1}_{[a,b]} * \mathbb{1}_{[c,d]})'' = \mathbb{1}'_{[a,b]} * \mathbb{1}'_{[c,d]} = (\delta_a - \delta_b) * (\delta_c - \delta_d).$$

Or  $\delta_x * \delta_y = \delta_{x+y}$  (voir plus haut), donc

$$(\mathbb{1}_{[a,b]} * \mathbb{1}_{[c,d]})'' = \delta_{a+c} + \delta_{b+d} - \delta_{a+d} - \delta_{b+c}.$$

•  $T * \mathbb{1}$  est bien définie en tant que distribution, car  $T \in \mathcal{E}'(\mathbb{R})$ . Ensuite,

$$\langle T * \mathbb{1}, \psi \rangle = \langle T, \check{\mathbb{1}} * \psi \rangle = \langle T, \mathbb{1} * \psi \rangle = \int_{\mathbb{R}} \psi \cdot \langle T, \mathbb{1} \rangle.$$

Ainsi,  $T * \mathbb{1} = \langle T, \mathbb{1} \rangle \mathbb{1}$  est une distribution constante.

- $T * \exp$  est bien définie, comme précédemment. On calcule

$$\langle T * \exp, \psi \rangle = \langle T, \text{e}\ddot{x}\text{p} * \psi \rangle = \left\langle T, x \mapsto \int_{\mathbb{R}} e^{y-x} \psi(y) dy \right\rangle = \int \psi(y) e^y \langle T, \exp(-x) \rangle dy.$$

Et donc  $T * \exp = \langle T, \exp(-x) \rangle \exp$ .

On peut aussi voir directement que  $(T * \exp)' = T * \exp$ , donc nécessairement  $T * \exp = C \exp$ , pour un  $C \in \mathbb{R}$ . Ensuite, on calcule

$$C = (T * \exp)(0) = \langle T, \text{e}\ddot{x}\text{p} \rangle = \langle T, \exp(-x) \rangle.$$

3. En dérivant l'égalité, on voit qu'on veut en fait

$$u * (\delta_0 - \delta_1) = u - \tau_1 u = \delta'_0.$$

Ceci donne l'idée de choisir :

$$u = \sum_{k \in \mathbb{N}} \delta'_k.$$

Calculons alors  $\delta'_a * \mathbb{1}_{[0,1]} = \delta_a * (\delta_0 - \delta_1) = \delta_a - \delta_{a+1}$ . Donc, si on note  $T_n = \sum_{k=0}^n \delta'_k$ , la somme se télescope, et on a

$$T_n * \mathbb{1}_{[0,1]} = \delta_0 - \delta_n \rightarrow \delta_0.$$

Comme  $T_n \rightarrow u$  (dans  $\mathcal{D}'$ ),  $u * \mathbb{1}_{[0,1]} = \delta_0$ .

★

**Solution 2.** *Dérivées successives des fonctions test*

1. On peut écrire  $H_a$  sous la forme

$$H_a = \frac{1}{a} \mathbb{1}_{[0,a]}.$$

On a  $(u * H_a)' = \frac{1}{a} u * (\delta_0 - \delta_a) = \frac{1}{a} (u(x) - u(x-a))$ , qui est de classe  $\mathcal{C}^k$  si  $u \in \mathcal{C}^k$ . On a donc prouvé que  $u * H_a \in \mathcal{C}^{k+1}$ .

2. On a  $\int_{\mathbb{R}} u * H_a dx = \iint u(y) H_a(x-y) dx dy = \int_{\mathbb{R}} u(y) dy$ , car  $\int_{\mathbb{R}} H_a(x-y) dx = \frac{1}{a} \int_y^{y+a} 1 dx = 1$ .

3. Il suffit de vérifier que  $H_{a_0} * H_{a_1}$  est continue, et de raisonner par récurrence, en appliquant la question 1. On a

$$H_{a_0} * H_{a_1}(x) = \frac{1}{a_0 a_1} \int_0^{a_0} \mathbb{1}_{[0,a_1]}(x-y) dy = \frac{1}{a_0 a_1} \left( \int_0^x \mathbb{1}_{[0,a_1]}(y) dy - \int_0^{x-a_0} \mathbb{1}_{[0,a_1]}(y) dy \right),$$

qui est bien une fonction continue en  $x$ .

Par ailleurs, le support de  $H_{a_0} * \dots * H_{a_n}$  est inclus dans la somme des supports, c'est-à-dire dans  $[0, a_0 + \dots + a_n]$ .

4. Soit  $j < n$ . On calcule

$$(H_{a_0} * \dots * H_{a_n})^{(j)} = \frac{1}{a_0 \dots a_{j-1}} (\delta_0 - \delta_{a_0}) * \dots * (\delta_0 - \delta_{a_{j-1}}) * H_{a_j} * \dots * H_{a_n}.$$

On a donc  $2^j$  termes de la forme

$$\delta_{\kappa} * H_{a_j} * \dots * H_{a_n}, \quad \kappa \in \mathbb{R}.$$

Chacun est majoré par  $\|H_{a_j} * \dots * H_{a_n}\|_{L^\infty} \leq \|H_{a_j}\|_{L^\infty} \|H_{a_{j+1}} * \dots * H_{a_n}\|_{L^1}$ , et comme on a  $\|H_{a_{j+1}} * \dots * H_{a_n}\|_{L^1} = 1$  d'après la question 2, et que d'autre part  $\|H_{a_j}\|_{L^\infty} \leq \frac{1}{a_j}$ , on peut conclure. L'autre majoration fonctionne de même.

5. On montre d'abord que  $u_n$  est de Cauchy dans  $L^\infty$ . On utilise l'associativité de la convolution, et la positivité des  $H_a$  :

$$\begin{aligned} |u_n(x) - u_{k+n}(x)| &= |u_n(x) - u_n * (H_{a_{n+1}} * \dots * H_{a_{n+k}})(x)| \\ &= \left| \int_{\mathbb{R}} H_{a_{n+1}} * \dots * H_{a_{n+k}}(y) (u_n(x-y) - u_n(x)) dy \right| \\ &\leq \int_{\mathbb{R}} H_{a_{n+1}} * \dots * H_{a_{n+k}}(y) \|u_n'\|_{L^\infty} |y| dy \end{aligned}$$

Sur le support de  $H_{a_{n+1}} * \dots * H_{a_{n+k}}$ , on a  $|y| \leq a_{n+1} + \dots + a_{n+k}$ , donc on obtient

$$\|u_n - u_{k+n}\|_{L^\infty} \leq \frac{2}{a_0 a_1} (a_{n+1} + \dots + a_{n+k}).$$

Comme la somme des  $a_j$  est convergente, cela prouve que  $\{u_n\}$  est de Cauchy dans  $L^\infty$ . On procède de la même manière pour les dérivées.

Ainsi, on a montré que  $u_n$  converge uniformément, ainsi que toutes ses dérivées, vers une fonction  $C^\infty$ , dont le support est inclus dans  $[0, a_\infty]$ , où  $a_\infty := \sum_j a_j$  (en particulier,  $u$  est à support compact).

6. Par la formule de Taylor, un fonction vérifiant de tels encadrements sur ses dérivées pour  $\alpha \leq 1$  serait analytique, ce qui l'empêche d'être à support compact par le théorème des zéros isolés. En revanche, si  $\alpha > 1$ , on peut appliquer la construction précédente avec  $a_n = n^{-\alpha}$  (qui est sommable) : ainsi, pour tout  $\alpha > 1$ , il existe des fonctions  $C_c^\infty$  dont les dérivées  $n$ -ièmes sont uniformément majorées par  $2^n (n!)^\alpha$ .

★

### Solution 3. Équations différentielles linéaires

1. Soient  $S, T \in \mathcal{D}'_+$ , et  $\psi \in C_c^\infty$ . Alors  $\check{S}$  est à support dans  $\mathbb{R}_-$ , et  $\check{S} * \psi$  dans  $\mathbb{R}_- + \text{supp}(\psi) =: X$ . L'important est que  $\mathbb{R}_+ \cap X$  est compact. Soit  $\chi$  une fonction test qui vaut 1 au voisinage de  $\mathbb{R}_+ \cap X$ . Alors

$$\langle T * S, \psi \rangle = \langle T, \check{S} * \psi \rangle = \langle T, \chi(\check{S} * \psi) \rangle,$$

donc  $T * S$  est bien définie. De plus, son support est inclus dans  $\mathbb{R}_+$ , puisque si  $\psi$  est supportée dans  $\mathbb{R}_-$ , alors  $X \subseteq \mathbb{R}_-$ , et donc  $\chi \equiv 0$  et  $\langle T * S, \psi \rangle = 0$ .

Ainsi  $\mathcal{D}'_+$  forme une algèbre d'élément neutre  $\delta_0$ . L'associativité se démontre comme dans le cours.

2. Il suffit de faire le calcul :

$$\begin{aligned} (\delta'_0 - \lambda \delta_0) * (H(t)e^{\lambda t}) &= \delta'_0 * (H(t)e^{\lambda t}) - \lambda \delta_0 * (H(t)e^{\lambda t}) \\ &= (\delta_0 * (H(t)e^{\lambda t}))' - \lambda H(t)e^{\lambda t} \\ &= (H(t)e^{\lambda t})' - \lambda H(t)e^{\lambda t} \\ &= \delta_0 e^{\lambda t} + \lambda H(t)e^{\lambda t} - \lambda H(t)e^{\lambda t}. \end{aligned}$$

Mais bien sûr,  $\delta_0 e^{\lambda t} = \delta_0$ .

3. Pour  $n = 1$ , c'est la question précédente. Ensuite, c'est une récurrence :

$$\begin{aligned} (\delta'_0 - \lambda\delta_0) * \left( H(t) \frac{t^{n-1}e^{\lambda t}}{(n-1)!} \right) &= \left( H(t) \frac{t^{n-1}e^{\lambda t}}{(n-1)!} \right)' - \lambda \left( H(t) \frac{t^{n-1}e^{\lambda t}}{(n-1)!} \right) \\ &= \delta_0 \frac{t^{n-1}e^{\lambda t}}{(n-1)!} + H(t) \frac{t^{n-2}e^{\lambda t}}{(n-2)!} + H(t)\lambda \frac{t^{n-1}e^{\lambda t}}{(n-1)!} - \lambda H(t) \frac{t^{n-1}e^{\lambda t}}{(n-1)!} = H(t) \frac{t^{n-2}e^{\lambda t}}{(n-2)!}, \end{aligned}$$

qui vaut  $(\delta'_0 - \lambda\delta_0)^{*(n-1)}$  par hypothèse de récurrence. Cela assure l'hérédité.

4. On considère l'équation différentielle ordinaire à coefficients constants  $\sum_k a_k y^{(k)}(t) = f(t)$ . Alors on peut réécrire l'équation  $\sum_k a_k u^{(k)}(t) = \delta_0$  sous la forme :

$$\left( \sum_k a_k (-\delta'_0)^{*k} \right) * u = \delta_0.$$

Introduisons le polynôme  $P = \sum_{k=0}^K a_k X^k$ . Comme  $\mathbb{C}$  est algébriquement clos, on le factorise en produit de facteurs de degré 1, soit  $P = \beta \prod_j (X - \lambda_j)^{n_j}$ , et donc

$$\sum_k a_k (-\delta'_0)^{*k} = \beta \cdot \star_j (\delta' - \lambda_j \delta)^{n_j}.$$

On conclut donc que :

$$u = \left( \sum_k a_k (-\delta'_0)^{*k} \right)^{*-1} = \frac{1}{\beta} \cdot \star_j \left( H(t) \frac{t^{n_j-1}e^{\lambda_j t}}{(n_j-1)!} \right).$$

★

#### Solution 4. L'équation de Schrödinger

1. On prend la transformée de Fourier de l'équation par rapport à  $x \in \mathbb{R}^n$ . Cela donne

$$i\partial_t \widehat{u}(\xi) - |\xi|^2 \widehat{u}(\xi) = 0,$$

donc on résout pour obtenir  $\widehat{u} = e^{it|\cdot|^2} \widehat{u}_0$ . Comme la transformée de Fourier est un isométrie de  $L^2$  dans lui même, on trouve en particulier

$$\|u(t)\|_{L^2} = \|u_0\|_{L^2}.$$

2. La fonction  $\xi \mapsto e^{it|\xi|^2}$  est bornée, donc est dans  $\mathcal{S}'$ , et sa transformée de Fourier est bien définie (au sens de  $\mathcal{S}'$ ).

3. On montre que pour  $\alpha$  de partie réelle strictement négative, et  $x \in \mathbb{R}^n$ , on a

$$\begin{aligned} \nabla \mathcal{F}^{-1}(e^{\alpha|\xi|^2})(x) &= \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}^n} i\xi e^{\alpha|\xi|^2 + ix \cdot \xi} d\xi \\ &= -\frac{1}{(2\pi)^n} \frac{i}{2\alpha} \int_{\mathbb{R}^n} e^{\alpha|\xi|^2} \cdot (ix e^{ix \cdot \xi}) d\xi \\ &= \frac{x}{2\alpha} \mathcal{F}^{-1}(e^{\alpha|\xi|^2})(x), \end{aligned}$$

donc  $\mathcal{F}^{-1}(e^{\alpha|\xi|^2})(x) = \mathcal{F}^{-1}(e^{\alpha|\xi|^2})(0) e^{\frac{|x|^2}{4\alpha}}$ .

On calcule ensuite

$$\mathcal{F}^{-1}(e^{\alpha|\xi|^2})(0) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}^n} e^{\alpha|\xi|^2} d\xi = \frac{1}{(2\pi)^n} \left( \frac{\pi}{-\alpha} \right)^{\frac{n}{2}}.$$

4. Soit  $\phi \in \mathcal{S}$ , et  $b \in \mathbb{R}$ . On écrit

$$\begin{aligned} \left\langle \frac{1}{(-i4\pi b)^{\frac{n}{2}}} e^{\frac{|x|^2}{-i4b}}, \phi \right\rangle &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left\langle \frac{1}{(4\pi(\varepsilon - ibt))^{\frac{n}{2}}} e^{\frac{|x|^2}{4(\varepsilon - ibt)}}, \phi \right\rangle \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left\langle \mathcal{F}^{-1}(e^{(-\varepsilon + ib)|\xi|^2}), \phi \right\rangle \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left\langle e^{(-\varepsilon + ib)|\xi|^2}, \mathcal{F}^{-1}(\phi) \right\rangle \\ &= \langle e^{ib|\xi|^2}, \mathcal{F}^{-1}(\phi) \rangle \\ &= \langle \mathcal{F}^{-1}(e^{ib|\xi|^2}), \phi \rangle. \end{aligned}$$

5. Si  $u(t)$  est solution de l'équation de Schrödinger, alors d'après la question 1,  $u(t) = \mathcal{F}^{-1}(e^{it|\xi|^2}) * u_0$ , donc pour  $t > 0$ , on a

$$\|u(t)\|_{L^\infty} \leq \|\mathcal{F}^{-1}(e^{it|\xi|^2})\|_{L^\infty} \|u_0\|_{L^1} \leq \frac{1}{(4\pi t)^{\frac{n}{2}}} \|u_0\|_{L^1}.$$

★

**Solution 5.** *Régularisation par polynômes*

1. Soit  $\phi \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n)$  à support compact. Supposons que  $\text{supp } \phi \subset B(0, R)$ . On calcule, grâce au changement de variables  $u = kx$ ,

$$\begin{aligned} \langle P_k, \phi \rangle &= \int_{B(0, R)} P_k(x) \phi(x) dx = k^{-n} \int_{B(0, kR)} P_k\left(\frac{u}{k}\right) \phi\left(\frac{u}{k}\right) du \\ &= \frac{1}{\pi^{n/2}} \int_{B(0, kR)} \left(1 - \frac{|u|^2}{k^{n+2}}\right)^{k^{n+2}} \phi\left(\frac{u}{k}\right) du. \end{aligned}$$

Ensuite, on rappelle que si  $y \in [0, p]$ , alors

$$\left| e^{-y} - \left(1 - \frac{y}{p}\right)^p \right| \leq \frac{1}{e(p-1)}. \quad (\star)$$

En effet, on considère  $f : [0, p] \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $y \mapsto e^{-y} - \left(1 - \frac{y}{p}\right)^p$ , et

$$f'(y) = -e^{-y} + \left(1 - \frac{y}{p}\right)^{p-1} = e^{-y} \left( \exp((p-1) \ln(1 - \frac{y}{p}) + y) - 1 \right).$$

Donc  $f'$  a le signe de  $g(y) := (p-1) \ln(1 - \frac{y}{p}) + y$ . Or  $g'(y) = 1 - \frac{p-1}{p-y}$ ,  $g$  est donc croissante sur  $[0, 1]$ , décroissante sur  $[1, p]$ . Comme  $g(0) = 0$  et  $g(y) \rightarrow -\infty$  quand  $y \rightarrow p^-$ , il existe un unique  $c_p$  ( $c_p \geq 1$ ) tel que  $g \geq 0$  sur  $[0, c_p]$  et  $g \leq 0$  sur  $[c_p, p]$ . De plus,  $c_p$  vérifie

$$(p-1) \ln\left(1 - \frac{c_p}{p}\right) = -c_p.$$

Finalement,  $f$  atteint son maximum en  $c_p$  (puisque  $f(0) = 0$ ,  $f(p) = e^{-p}$ , on a aussi  $f \geq 0$  sur  $[0, c_p]$ ), et on trouve

$$f(c_p) = e^{-c_p} - e^{p \ln(1 - \frac{c_p}{p})} = e^{-c_p} - e^{-\frac{p}{p-1} c_p} = e^{-c_p} \left(1 - e^{-\frac{c_p}{p-1}}\right) \leq e^{-c_p} \frac{c_p}{p-1}.$$

(car  $e^y \geq 1 + y$  pour tout  $y \in \mathbb{R}$ ). Et finalement, comme  $y \mapsto ye^{-y}$  atteint son maximum  $1/e$  en  $1$ , on obtient  $(\star)$ .

Maintenant, avec  $y = |u|^2$  et  $p = k^{n+2}$ , pour  $k \geq R^2$  et  $u \in B(0, kR)$ ,  $|u|^2 \leq |kR|^2 \leq k^{n+2}$ , et on en déduit :

$$\begin{aligned} & \left| \int_{B(0, kR)} \left(1 - \frac{|u|^2}{k^{n+2}}\right)^{k^{n+2}} \phi\left(\frac{u}{k}\right) du - \int_{B(0, kR)} e^{-|u|^2} \phi\left(\frac{u}{k}\right) du \right| \\ & \leq \frac{1}{e(k^{n+2} - 1)} \int_{B(0, kR)} \left| \phi\left(\frac{u}{k}\right) \right| du = \frac{k^n}{e(k^{n+2} - 1)} \|\phi\|_{L^1} \rightarrow 0. \end{aligned}$$

Enfin, on voit que  $\phi(u/k) \rightarrow \phi(0)$  lorsque  $k \rightarrow \infty$  à  $u \in \mathbb{R}^n$  fixé, et la domination

$$|e^{-|u|^2} \phi(u/k) \mathbb{1}_{B(0, kR)}(u)| \leq e^{-|u|^2} \|\phi\|_{L^\infty}$$

permet d'appliquer le théorème de convergence dominée. Ainsi,

$$\int_{B(0, kR)} e^{-|u|^2} \phi\left(\frac{u}{k}\right) du \rightarrow \left( \int_{\mathbb{R}^n} e^{-|u|^2} du \right) \phi(0) = \pi^{n/2} \phi(0).$$

Finalement, on a bien :

$$\langle P_k, \phi \rangle \rightarrow \phi(0), \quad P_k \rightharpoonup \delta_0.$$

2. Soit  $T$  une distribution à support compact. On identifie alors  $P_k$  à un élément de  $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ , de sorte que la convolution  $T * P_k$  est bien définie. De plus, on a directement

$$D^{(2k^{n+2}+1, \dots, 2k^{n+2}+1)}(T * P_k) = T * (D^{(2k^{n+2}+1, \dots, 2k^{n+2}+1)} P_k) = 0,$$

donc  $T * P_k$  est un polynôme.

Ensuite, vu que pour  $\phi \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$  à support compact,  $\tilde{T} * \phi \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R})$ ,

$$\langle T * P_k, \phi \rangle = \langle P_k, \tilde{T} * \phi \rangle \rightarrow (\tilde{T} * \phi)(0) = \langle T, \phi \rangle.$$

Et ainsi on a prouvé que  $T * P_k \rightharpoonup T$  dans  $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ .

★