Corrigé d'analyse fonctionnelle
TD n$^{\text{o}}$ 12

Opérateurs non-bornés

Séance du 15 mai 2018

Solution 1. *Échauffement*

Soit $T \in \mathcal{L}(E,F)$. Si $\ell \in F^*$, alors $x \in E \mapsto \langle \ell, Tx \rangle$ est continue, comme composée de deux applications continues. Donc $\ell \in D(T^*)$ et $T^*\ell \in E^*$.

Si $\|x\|_E \leq 1$, alors $|\langle T^*\ell, x\rangle| = |\langle \ell, Tx\rangle| \leq \|\ell\|_{F^*}\|T\|$. D'où $\|T^*\ell\|_{E^*} \leq \|\ell\|_{F^*}\|T\|$, et donc $\|T^*\| \leq \|T\|$.

Réciproquement, soit $x \in E$ tel que $\|x\|_E \leq 1$. D'après le théorème de Hahn-Banach, il existe $\ell_x \in F^*$ telle que $\|\ell_x\|_{F^*} = 1$ et $\langle \ell_x, Tx\rangle = \|Tx\|_F$. Or $\langle \ell_x, Tx\rangle = \langle T^*\ell_x, x\rangle \leq \|T^*\|$. Pour tout $x \in E$ tel que $\|x\|_E \leq 1$, on a donc $\|Tx\|_F \leq \|T^*\|$. Ainsi $\|T\| \leq \|T^*\|$.

⋆

Solution 2. *Relations entre noyau et image*

1. Soit $x \in \ker T$ et $e \in \operatorname{Im} T^*$. Il existe alors $f \in D(T^*) \subset F^*$ tel que $T^*f = e$. On a ainsi $\langle e, x\rangle = \langle T^*f, x\rangle = \langle f, Tx\rangle = 0$. Cela prouve que $\ker T \subset (\operatorname{Im} T^*)^\perp$.

Ensuite, si $f \in \ker T^*$ et si $y = Tx$ pour un certain $x \in E$, alors $\langle f, y\rangle = \langle f, Tx\rangle = \langle T^*f, x\rangle = 0$. Inversement, si $f \in F^*$ est tel que $f \equiv 0$ sur $\operatorname{Im} T$, alors pour tout $x \in D(T)$, $0 = \langle f, Tx\rangle = \langle T^*f, x\rangle$, ce qui veut dire que $T^*f = 0$ dans E^*, par densité de $D(T)$ dans E. Cela prouve que $\ker T^* = (\operatorname{Im} T)^\perp$.

Pour les deux autres inégalités, il suffit de prendre l'orthogonal, et donc de prouver que si $M \subset F$ et $N \subset E^*$ sont des sous-espaces vectoriels, alors $(M^\perp)^\perp = \overline{M}$, et $(N^\perp)^\perp \supset \overline{N}$. En effet, si $f \in M^\perp$, alors f est une forme linéaire continue qui s'annule sur M, donc f s'annule aussi sur $\overline{M}$. Ainsi $(M^\perp)^\perp \supset \overline{M}$. Réciproquement, si $x \notin \overline{M}$, on peut séparer strictement x et $\overline{M}$ par une forme linéaire continue, par Hahn-Banach. Cette forme linéaire g sera nulle sur $\overline{M}$, qui est un sous-espace vectoriel, et non nulle en x. Donc $g \in M^\perp$ et $x \notin (M^\perp)^\perp$.

Reste le cas de N. Si $x \in N^\perp$, alors $\langle f, x\rangle = 0$ pour tout $f \in N$. Comme l'évaluation est continue, $\langle \bar{f}, x\rangle = 0$ pour tout $\bar{f} \in \overline{N}$. D'où $\overline{N} \subset (N^\perp)^\perp$.

2. Supposons que T est fermé. Si $x \in D(T)$ et si $\langle e, x\rangle = 0$ pour tout $e \in \operatorname{Im} T^*$, alors $\langle f, Tx\rangle = 0$ pour tout $f \in D(T^*)$. Supposons par l'absurde que $(x, 0) \notin \operatorname{Gr} T$. Alors grâce au théorème de Hahn-Banach, et puisque $\operatorname{Gr} T$ est par hypothèse un convexe fermé, il existe φ une forme linéaire continue sur $E \times F$ telle que $\varphi(x, 0) > 0$ et $\varphi(x', Tx') = 0$ quel que soit $x' \in D(T)$. On a en particulier $0 = \varphi(x, Tx) = \varphi(x, 0) + \varphi(0, Tx)$. Or $f : y \mapsto \varphi(0, y)$ définit une forme linéaire continue sur F. D'après la remarque précédente, $\langle f, Tx\rangle = 0 = \varphi(0, Tx)$. D'où $\varphi(x, 0) = 0$, ce qui est la contradiction recherchée.

⋆

Solution 3. *Une caractérisation de la surjectivité*

1. Soit $y \in B_F(0, r)$. En suivant l'indication, on va construire par récurrence deux suites $\{y_n\}$ et $\{x_n\}$ de F et E respectivement. Posons $y_0 := y$, et $x_0 = 0$. Ensuite, on construit par récurrence y_n et x_n tels que $x_n \in B_E(0, 2 \cdot 2^{-n})$, $y_{n-1} = y_n + Tx_n$ et $\|y_n\|_F \leq r \cdot 2^{-n}$.

Au rang 0, le choix de y_0 et x_0 convient. Supposons à présent y_n et x_n construits. Comme $\|y_n\|_F \leq r \cdot 2^{-n}$, en multipliant l'hypothèse par 2^{-n}, on voit qu'il existe $x_{n+1} \in B_E(0, 2^{-n}) \cap D(T)$ tel que $\|y_n - Tx_{n+1}\|_F \leq r \cdot 2^{-(n+1)}$. On pose ensuite $y_{n+1} = y_n - Tx_{n+1}$, et les suites sont construites.

On a donc, pour $N \in \mathbb{N}$,

$$y_N = y_0 - T\left(\sum_{n=1}^{N} x_n\right),$$

et vu la majoration sur la norme, $y_N \longrightarrow 0$ quand $N \to \infty$. Notons $\sigma_N := \sum_{n=1}^{N} x_n \in D(T)$. Comme $\sum \|x_n\|_E < +\infty$ et que E est un Banach, on voit que σ_N converge vers une limite $\sigma \in E$. De plus, $\|\sigma\|_E \leq \sum_{n \geq 1} 2 \cdot 2^{-n} = 2$. D'autre part, $T\sigma_N \to y$. En d'autres termes,

$$(\sigma_N, T\sigma_N) \longrightarrow (\sigma, y).$$

Comme T est fermé, on trouve donc que $\sigma \in D(T)$ et que $y = T\sigma$. Cela prouve que $y \in T(B_E(0,2) \cap D(T))$.

2. Notons $C = \overline{T(B_E(0,1) \cap D(T))}$. C'est un convexe fermé de F. Prenons également $y_0 \in F \setminus C$. La version géométrique du théorème de Hahn-Banach permet donc d'affirmer qu'il existe $\ell \in F^*$ tel que

$$\langle \ell, y \rangle \leq 1 < \langle \ell, y_0 \rangle, \quad \forall y \in C,$$

quitte à renormaliser ℓ.

En particulier, $\forall x \in B_E(0,1) \cap D(T)$, $\langle \ell, Tx \rangle \leq 1$. Cela implique que l'application linéaire $x \in D(T) \mapsto \langle \ell, Tx \rangle$ est continue, puisqu'elle est bornée sur un borné. Ainsi $\ell \in D(T^*)$, et pour tout $x \in B_E(0,1) \cap D(T)$,

$$\langle T^*\ell, x \rangle \leq 1.$$

Par densité de $D(T)$, cela veut dire que $\|T^*\ell\|_{E^*} \leq 1$. Enfin, grâce à l'hypothèse, $\|\ell\|_{F^*} \leq \frac{1}{r}$.

On en déduit que $1 < \langle \ell, y_0 \rangle \leq \|\ell\|_{F^*} \|y_0\|_F$, ce qui veut dire que $\|y_0\|_F > r$. Ainsi $B_F(0,r) \subset C$. Grâce à la question précédente, on trouve donc $B_F(0,r) \subset T(B_E(0,2) \cap D(T))$, et donc par homogénéité, T est surjective.

3. Supposons maintenant T surjectif, et posons

$$C^* = \{\ell \in D(T^*) \mid \|T^*\ell\|_{E^*} \leq 1\}$$

Pour obtenir l'inégalité, il suffit de montrer que C^* est borné : si c'est le cas, en effet, mais qu'il existe une suite $\{\ell_n\}$ d'éléments de F^* tels que

$$\begin{cases} \|\ell_n\|_{F^*} = 1, \\ \|T^*\ell_n\|_{E^*} \longrightarrow 0, \end{cases}$$

alors la suite

$$\frac{\ell_n}{\|T^*\ell_n\|_{E^*}}$$

est une suite non-bornée de C^*.

Pour prouver que C^* est borné, il suffit de montrer qu'il est ponctuellement borné, grâce au théorème de Banach-Steinhaus. On veut donc montrer que si $y \in F$, alors $\{\langle \ell, y \rangle, \ell \in C^*\}$ est borné. Comme T est surjectif, on peut écrire $y = Tx$ avec $x \in D(T)$. Donc pour tout $\ell \in C^*$ ($\subset D(T^*)$),

$$|\langle \ell, y \rangle| = |\langle \ell, Tx \rangle| = |\langle T^*\ell, x \rangle| \leq \|x\|_E,$$

ce qui termine la preuve.

⋆

Solution 4. *Images fermées*

1. Puisque $\overline{\operatorname{Im} T} = (\ker T^*)^\perp$ (d'après l'exercice 2), il est clair que $\operatorname{Im} T$ est fermé si et seulement si $\operatorname{Im} T = (\ker T^*)^\perp$.

De plus, si $(\ker T)^\perp = \operatorname{Im} T^*$, comme l'évaluation est continue, alors $(\ker T)^\perp$ est fermé, et donc c'est aussi le cas pour $\operatorname{Im} T^*$.

2. On suppose que $\operatorname{Im} T$ est fermé. Pour montrer (iv), et vu l'exercice 2, il suffit de montrer que $(\ker T)^\perp \subset \operatorname{Im} T^*$. Soit donc $\varphi \in (\ker T)^\perp$. On veut réaliser φ comme l'image d'un élément de F^* par T^*. On va donc définir déjà une forme linéaire ℓ sur $\operatorname{Im} T$ par

$$\langle \ell, Tx \rangle := \langle \varphi, x \rangle, \quad \forall x \in D(T).$$

Vérifions que ℓ est bien définie : si $Tx = Tx'$ pour $x, x' \in D(T)$, alors $x - x' \in \ker T$, donc $\langle \varphi, x - x' \rangle = 0$. Cela prouve que ℓ est définie sans ambiguïté.

On montre à présent que ℓ est continue sur $\operatorname{Im} T$. L'application $\Gamma : \operatorname{Gr} T \to \operatorname{Im} T$, $(x, Tx) \mapsto Tx$ est linéaire, surjective, continue, entre deux espaces de Banach (puisque T est fermé et que $\operatorname{Im} T$ est fermé), donc le théorème de l'application ouverte s'applique. Il existe donc $\kappa > 0$ tel que l'image de $B_{E\times F}(0,1) \cap \operatorname{Gr} T$ par Γ contienne $B_F(0,\kappa) \cap \operatorname{Im} T$: autrement dit, si $y \in \operatorname{Im} T$ est tel que $\|y\|_F \le \kappa$, alors il existe $x \in D(T)$ tel que $\|x\|_E \le 1$ et $y = Tx$. Par homogénéité, on en conclut que pour tout $\tilde{y} \in \operatorname{Im} T$, il existe $\tilde{x} \in D(T)$ tel que $\tilde{y} = T\tilde{x}$ et

$$\|\tilde{x}\|_E \le \frac{1}{\kappa} \|\tilde{y}\|_F.$$

En particulier, on trouve donc que $|\langle \ell, \tilde{y} \rangle| = |\langle \varphi, \tilde{x} \rangle| \le \|\varphi\|_{E^*} \|\tilde{x}\|_E \le \kappa^{-1} \|\varphi\|_{E^*} \|\tilde{y}\|_F$. Ainsi ℓ est continue sur $\operatorname{Im} T$.

Prolongeons ℓ en une forme linéaire $L \in F^*$ grâce au théorème de Hahn-Banach. Pour tout $x \in D(T)$, on sait que

$$\langle L, Tx \rangle = \langle \ell, Tx \rangle = \langle \varphi, x \rangle,$$

et donc est continue sur $D(T)$. D'où $L \in D(T^*)$. Enfin, ce calcul montre aussi que $T^* L = \varphi$ puisque ces deux formes linéaires coïncident sur $D(T)$, qui est dense. Cela achève de prouver que $\varphi \in \operatorname{Im} T^*$.

3. On suppose que $\operatorname{Im} T^*$ est fermée. On note $Z = \overline{\operatorname{Im} T}$ et $S : D(T) \to Z$, $x \mapsto Tx$.

(a) S est d'image dense, donc d'après l'exercice 2, on a $\ker S^* = (\operatorname{Im} S)^\perp$. La seule forme linéaire continue sur Z à s'annuler sur $\operatorname{Im} S$ est 0, donc $\ker S^* = \{0\}$.
D'autre part, montrons que $\operatorname{Im} S^* = \operatorname{Im} T^*$, donc est fermée. Si $\varphi \in \operatorname{Im} S^*$, alors $\varphi = S^* \ell$, avec $\ell \in D(S^*) \subset Z^*$. On peut prolonger ℓ en une forme linéaire continue L définie sur F entier, par Hahn-Banach. Alors $L \in D(T^*)$, et $\forall x \in D(S) = D(T)$,

$$\langle \varphi, x \rangle = \langle S^* \ell, x \rangle = \langle \ell, Tx \rangle = \langle L, Tx \rangle = \langle T^* L, x \rangle,$$

d'où $\varphi \in \operatorname{Im} T^*$. L'autre inclusion est identique, par simple restriction des formes de F^* à Z.

(b) Notons $\Gamma : \operatorname{Gr} S^* \to \operatorname{Im} S^*$, $(\ell, S^* \ell) \mapsto S^* \ell$. Comme $\operatorname{Gr} S^*$ est fermé (c'est automatique, cf. cours), Γ est une application entre Banach. Elle est linéaire, continue, surjective, et également injective, puisque S^* est injective. C'est donc un homéomorphisme linéaire, grâce au théorème de l'application ouverte. Donc il existe $C > 0$ telle que

$$\|S^* \ell\|_{E^*} + \|\ell\|_{F^*} \le C \|S^* \ell\|_{E^*}, \quad \forall \ell \in D(S^*).$$

En particulier, cela implique qu'il existe $r > 0$ tel que

$$r\|\ell\|_{F^*} \leq \|S^*\ell\|_{E^*}, \quad \forall \ell \in D(S^*).$$

Grâce à l'exercice 3, on en déduit que S est surjective, *i.e.* $\operatorname{Im} S = Z$. Or $\operatorname{Im} S = \operatorname{Im} T$, et comme Z est fermé, on trouve bien que l'image de T est fermée.

⋆

Solution 5. *Domaine de l'adjoint*

1. $D(T)$ est dense dans ℓ^1, car il contient les suites presque nulles. Montrons que T est fermé : si $u^N \to u$ et $Tu^N \to v$ dans ℓ^1 quand $N \to +\infty$, alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$|u_n^N - u_n| \leq \|u^N - u\|_{\ell^1} \to 0,$$
$$|nu_n^N - v_n| \leq \|Tu^N - v\|_{\ell^1} \to 0.$$

Cela prouve que $v_n = nu_n$. Comme c'est vrai pour tout $n \in \mathbb{N}$, et que $v \in \ell^1$, on en déduit que $u \in D(T)$, et que $v = Tu$. Donc T est fermé.

2. Soit $f \in (\ell^1)^*$. On sait que f s'identifie avec $\{a_n\} \in \ell^\infty$, et que

$$\forall u \in \ell^1, \quad \langle f, u \rangle = \sum_{n=0}^{\infty} a_n u_n.$$

Supposons que $a \in D(T^*)$. Alors la forme linéaire

$$u \mapsto \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot nu_n$$

se prolonge en une forme linéaire continue sur ℓ^1. Le théorème de dualité $\ell^1 - \ell^\infty$ indique donc que $\{na_n\} \in \ell^\infty$. Après réciproque évidente, il est établi que

$$D(T^*) = \{\{a_n\} \in \ell^\infty \,|\, \{na_n\} \in \ell^\infty\},$$

et que $T : \{a_n\} \mapsto \{na_n\}$.

En particulier, on voit que toute suite de $D(T^*)$ tend vers 0, et que $D(T^*)$ contient les suites presque nulles. On peut donc prouver que

$$\overline{D(T^*)} = c_0(\mathbb{N}),$$

l'ensemble des suites de limite nulle. Donc T^* n'est pas à domaine dense.

⋆