Corrigé d'analyse fonctionnelle
TD n° 12

Espaces de Sobolev

Séance du 6 mai 2019

Solution 1. *Échauffement : cas limite d'injection de Sobolev*

1. On considère la fonction radiale définie par $f(x) = \chi(|x|)(\ln|x|)^{1/3}$, où χ est une fonction $\mathcal{C}_c^\infty$ sur $\mathbb{R}$, qui vaut 1 sur $[-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}]$ et à support dans $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$. On vérifier que $f \in L^2(\mathbb{R}^2)$. On calcule, sur $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$, $\partial_r f = \frac{1}{3r(\ln r)^{2/3}}\chi(r) + (\ln r)^{1/3}\chi'(r)$, et f est continue en sur le disque unité, donc en calculant l'intégrale en coordonnées polaires,

$$\|\nabla f\|_{L^2(\mathbb{R}^2)}^2 = 2\pi \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \left((\ln r)^{1/3}\chi'(r) + \frac{1}{3r(\ln r)^{2/3}}\chi(r)\right)^2 r dr < +\infty.$$

Ainsi $f \in H^1(\mathbb{R}^2)$, mais bien sûr, $f \notin L^\infty(\mathbb{R}^2)$.

2. On a $|u(x_1, x_2)| \leq \int_{x_1} |\partial_{x_1} u(t, x_2)| dt$, et symétriquement pour x_2, donc :

$$|u(x_1, x_2)|^2 \leq \int_{x_1} |\partial_{x_1} u(t, x_2)| dt \cdot \int_{x_2} |\partial_{x_2} u(x_1, t)| dt.$$

En intégrant en x_1 et en x_2, vu que les variables sont séparées :

$$\|u\|_{L^2(\mathbb{R}^2)}^2 \leq \iint |\partial_{x_2} u(x_1, t)| dt dx_1 \cdot \iint |\partial_{x_1} u(t, x_2)| dt dx_2 \leq \|\partial_{x_1} u\|_{L^1(\mathbb{R}^2)} \|\partial_{x_2} u\|_{L^1(\mathbb{R}^2)}.$$

3. On applique ce qui précède à u^θ, dont les dérivées sont $\theta u^{\theta-1}\partial_{x_i} u$. Ainsi,

$$\begin{aligned}
\|u\|_{L^{2\theta}(\mathbb{R}^2)}^{2\theta} &= \|u^\theta\|_{L^2(\mathbb{R}^2)}^2 \\
&\leq \|\theta u^{\theta-1}\partial_{x_1} u\|_{L^1(\mathbb{R}^2)} \|\theta u^{\theta-1}\partial_{x_2}\theta\|_{L^1(\mathbb{R}^2)} \\
&\leq \theta^2 \|u^{\theta-1}\|_{L^2(\mathbb{R}^2)} \|\partial_{x_1} u\|_{L^2(\mathbb{R}^2)} \|u^{\theta-1}\|_{L^2(\mathbb{R}^2)} \|\partial_{x_2} u\|_{L^2(\mathbb{R}^2)} \\
&\leq \theta^2 \|u\|_{L^{2(\theta-1)}(\mathbb{R}^2)}^{2(\theta-1)} \|\nabla u\|_{L^2(\mathbb{R}^2)}^2.
\end{aligned}$$

En prenant la racine carrée, on obtient l'estimée voulue.

4. La concavité du logarithme s'écrit, pour $x, y > 0$, $\lambda \in [0, 1]$:

$$\lambda \ln x + (1-\lambda) \ln y \leq \ln\left(\lambda x + (1-\lambda) y\right),$$

soit encore : $x^\lambda y^{1-\lambda} \leq \lambda x + (1-\lambda) y$. On choisit donc $\lambda = (\theta-1)/\theta$, $x = \|u\|_{L^{2(\theta-1)}(\mathbb{R}^2)}$ et $y = \|\nabla u\|_{L^2(\mathbb{R}^2)}$, pour obtenir

$$\|u\|_{L^{2\theta}(\mathbb{R}^2)} \leq (\theta-1)\|u\|_{L^{2(\theta-1)}(\mathbb{R}^2)} + \|\nabla u\|_{L^2(\mathbb{R}^2)}.$$

On peut donc même choisir $C(\theta) = \theta$.

On sait que $H^1(\mathbb{R}^2) \hookrightarrow L^2(\mathbb{R}^2)$, donc avec $\theta = 2$, on obtient que $H^1(\mathbb{R}^2) \hookrightarrow L^4(\mathbb{R}^2)$. Puis par récurrence immédiate sur k, on obtient $H^1(\mathbb{R}^2) \hookrightarrow L^{2k}(\mathbb{R}^2)$, pour $k \in \mathbb{N}$. Enfin, pour tout $q \in [2, \infty[$, on interpole entre $L^2(\mathbb{R}^2)$ et $L^{2k}(\mathbb{R}^2)$ avec $k \geq q/2$, et ainsi $H^1(\mathbb{R}^2) \hookrightarrow L^q(\mathbb{R}^2)$.

⋆

Solution 2. *Injection de Sobolev homogène*

1. On vérifie la positivité, l'homogénéité et l'inégalité triangulaire immédiatement. Les fonctions constantes annulent $\|\cdot\|_{\mathrm{BMO}(\mathbb{R}^d)}$ donc celle-ci ne définit pas une norme.

2. On a

$$\begin{aligned}\|f_{\flat,A} - f_{\flat,A|B}\|_{L^2(B,\frac{dx}{|B|})} &\leq 2R\|\nabla f_{\flat,A}\|_{L^\infty(\mathbb{R}^d)} \\ &\leq CR\int_{\mathbb{R}^d} |\xi|^{1-\frac{d}{2}}|\xi|^{\frac{d}{2}}|\widehat{f_{\flat,A}}(\xi)|\,d\xi \\ &= CR\int_{B(0,A)} |\xi|^{1-\frac{d}{2}}|\xi|^{\frac{d}{2}}|\widehat{f_{\flat,A}}(\xi)|\,d\xi \\ &\leq CR\left(\int_{B(0,A)} |\xi|^{2-d}\,d\xi\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int_{B(0,A)} |\xi|^{d}|\widehat{f_{\flat,A}}(\xi)|^2\,d\xi\right)^{\frac{1}{2}} \\ &= C'RA\|f\|_{\dot{H}^{\frac{d}{2}}(\mathbb{R}^d)}.\end{aligned}$$

3. Ce résultat suit directement de l'inégalité triangulaire : comme $f = f_{\flat,A} + f_{\sharp,A}$,

$$\begin{aligned}\int_B |f - f_{|B}|\frac{dx}{|B|} &\leq \|f_{\flat,A} - f_{\flat,A|B}\|_{L^1(B,\frac{dx}{|B|})} + \|f_{\sharp,A}\|_{L^1(B,\frac{dx}{|B|})} + \|f_{\sharp,A|B}\|_{L^1(B,\frac{dx}{|B|})} \\ &\leq \|f_{\flat,A} - f_{\flat,A|B}\|_{L^2(B,\frac{dx}{|B|})} + 2\|f_{\sharp,A}\|_{L^2(B,\frac{dx}{|B|})} \\ &\leq \|f_{\flat,A} - f_{\flat,A|B}\|_{L^2(B,\frac{dx}{|B|})} + \frac{2}{\sqrt{|B|}}\|f_{\sharp,A}\|_{L^2(\mathbb{R}^2)}.\end{aligned}$$

4. On a alors

$$\begin{aligned}\int_B |f - f_{|B}|\frac{dx}{|B|} &\leq CRA\|f\|_{\dot{H}^{\frac{d}{2}}(\mathbb{R}^d)} + CR^{-\frac{d}{2}}\Big(\int_{|\xi|\geq A}\left(\frac{|\xi|}{A}\right)^d|\widehat{f}(\xi)|^2\,d\xi\Big)^{\frac{1}{2}} \\ &\leq CRA\|f\|_{\dot{H}^{\frac{d}{2}}(\mathbb{R}^d)} + C(AR)^{-\frac{d}{2}}\Big(\int_{|\xi|\geq A}|\xi|^d|\widehat{f}(\xi)|^2\,d\xi\Big)^{\frac{1}{2}},\end{aligned}$$

et le résultat suit en choisissant $A = \frac{1}{R}$.

⋆

Solution 3. *L'équation des ondes*

1. On considère la transformation de Fourier en $x \in \mathbb{R}^d$ de l'équation, et on se ramène donc à chercher une solution $t \mapsto \hat{u}(t,\xi)$ de l'équation différentielle ordinaire :

$$\begin{cases}\partial_{tt}\hat{u} + |\xi|^2\hat{u} = 0 \text{ dans } \mathbb{R}\times\mathbb{R}^d, \\ \hat{u}(0,\cdot) = \hat{u}_0,\ \partial_t\hat{u}(0,\cdot) = \hat{u}_1 \text{ dans } \mathbb{R}^d,\end{cases} \tag{1}$$

L'unique solution de cette équation est

$$\hat{u}(t,\xi) = \cos(t|\xi|)\hat{u}_0(\xi) + \frac{\sin(t|\xi|)}{|\xi|}\hat{u}_1(\xi),$$

On en déduit l'unique solution en inversant la transformée de Fourier, en se souvenant que tout est bien défini car $\hat{u}_0$ et $\hat{u}_1$ sont dans $L^2(\mathbb{R}^d)$ par hypothèse, et les membres restants des termes dans

$L^\infty(\mathbb{R}^d)$. En dimension 1, si $\frac{\hat{u}_1(\xi)}{\xi}$ est dans $L^1(\mathbb{R})$, on peut faire un calcul plus explicite et on retrouve la formule dite de d'Alembert :

$$\begin{aligned} u(t,x) &= \mathcal{F}^{-1}\left(\frac{e^{it\xi}+e^{-it\xi}}{2}\hat{u}_0(\xi) + \frac{e^{it\xi}-e^{-it\xi}}{2i\xi}\hat{u}_1(\xi)\right)(x) \\ &= \frac{u_0(x+t)+u_0(x-t)}{2} + \frac{f(x+t)-f(x-t)}{2i}, \end{aligned}$$

avec $f = \mathcal{F}^{-1}(\frac{\hat{u}_1(\xi)}{\xi})$.

2. Comme $\operatorname{supp} \widehat{f} \subset \{\xi, 1 \leq |\xi| \leq 2\}$, on peut écrire $\widehat{f} = \chi \widehat{f}$ avec χ radiale telle que $\chi(\xi) = 0$ pour $|\xi| \leq \frac{1}{2}$ et $|\xi| \geq 3$, et $\chi(\xi) = 1$ pour $1 \leq |\xi| \leq 2$. On a donc

$$\mathcal{F}^{-1}(e^{it|\xi|}\widehat{f}) = \mathcal{F}^{-1}(e^{it|\xi|}\widehat{f}\chi) = f * \mathcal{F}^{-1}(e^{it|\xi|}\chi(\xi)),$$

d'où la formule

$$K(t,x) = \frac{1}{(2\pi)^d}\int_{\mathbb{R}^d} \chi(\xi) e^{it|\xi|+ix\cdot\xi} d\xi.$$

3. On écrit en coordonnées polaires

$$K(t,x) = \frac{1}{(2\pi)^d}\int_{r=0}^{+\infty} r^{d-1}\chi(r)\int_{\omega\in\mathbb{S}^{d-1}} e^{ir(t+x\cdot\omega)} d\omega dr.$$

L'idée est simple : on veut faire des intégrations par parties en r, en intégrant l'exponentielle pour gagner des puissances de t. En effet,

$$e^{ir(t+x\cdot\omega)} = \frac{i}{t+x\cdot\omega}\partial_r e^{ir(t+x\cdot\omega)}$$

Pour $|x| \leq \frac{t}{2}$, on a

$$\left|\frac{i}{t+x\cdot\omega}\right| \leq \frac{2}{t},$$

donc on peut itérer le processus, et gagner autant de puissances de t que l'on veut.

La partie délicate concerne donc la tranche $\frac{t}{2} \leq |x|$. On écrit

$$\begin{aligned} K(t,x) &= \frac{1}{(2\pi)^d}\int_{r=\frac{1}{2}}^{3} \chi(r) r^{d-1} e^{itr}\int_{\omega\in\mathbb{S}^{d-1}} e^{irx\cdot\omega} d\omega dr \\ &= \frac{1}{(2\pi)^d}\int_{r=\frac{1}{2}}^{3} \chi(r) r^{d-1} e^{itr}\int_{\omega\in\mathbb{S}^{d-1}} e^{ir|x|\omega_1} d\omega dr \\ &= \tilde{c}_d \int_{r=\frac{1}{2}}^{3} \chi(r) r^{d-1} e^{itr}\int_{\theta\in\mathbb{S}^1} e^{ir|x|\cos(\theta)}|\sin(\theta)|^{d-2} d\theta dr \end{aligned}$$

où l'on a utilisé l'invariance de l'intégrale en ω par rotation, puis où l'on a intégré en $(\omega_2, \dots, \omega_{N-1})$. À présent, on intègre par parties en θ, et on voit que l'on peut faire $\lceil \frac{d-2}{2} \rceil$ intégrations par parties grâce au facteur $\sin(\theta)$: si au bout d'un certain nombre d'intégrations par parties, pour un certain $g(\theta)$ polynômiale en $\cos(\theta)$ et $\sin(\theta)$, on se retrouve avec un terme

$$\int_0^\pi e^{iy\cos(\theta)} \sin(\theta)^k g(\theta) d\theta,$$

on procède de la façon suivante :

$$\int_0^\pi e^{iy\cos(\theta)}\sin(\theta)\sin(\theta)^{k-1}g(\theta)d\theta = \int_0^\pi \frac{e^{iy\cos(\theta)}}{iy}\sin(\theta)^{k-2}((k-1)\cos(\theta)g(\theta)+\sin(\theta)g'(\theta))d\theta,$$

et l'on ne crée pas de terme de bord lorsque $k \geq 1$. Avec $y = r|x|$, à chaque intégration par partie, un facteur $\frac{1}{|x|}$ apparaît, et comme $|x| \lesssim t$ sur cette tranche, on obtient une première estimée de décroissance.

Pour « gagner » encore un peu, il faut remarquer que, si $y > 0$, alors

$$\int_0^\pi e^{iy\cos\theta} g(\theta) d\theta = \mathcal{O}_{y \to +\infty}(\frac{1}{\sqrt{y}}).$$

Cela provient d'un développement en série de Taylor de $\theta \mapsto \cos\theta$ au voisinage de 0 (lemme de phase stationnaire). On obtient donc la décroissance voulue.

Voici quelques rappels sur le principe de la phase stationnaire. On s'intéresse au développement asymptotique de l'intégrale à paramètre $F(\lambda) := \int_a^b e^{i\lambda\varphi(x)} g(x) dx$, où φ est à valeurs réelles (on suppose pour simplifier f et φ de classe $\mathcal{C}^\infty$). Si la dérivée de la phase φ ne s'annule pas, une intégration par parties nous montre que

$$F(\lambda) = \left[\frac{e^{i\lambda\varphi(x)}}{i\lambda\varphi'(x)} g(x) \right]_a^b - \frac{1}{i\lambda} \int_a^b e^{i\lambda\varphi(x)} \left(\frac{g}{\varphi'} \right)' (x) dx = \mathcal{O}(\frac{1}{\lambda}).$$

Néanmoins, si la dérivée de la phase φ s'annule en un point x_0 (on le suppose unique, égal à 0 et sur le bord de l'intervalle $[a, b]$ quitte à couper cet intervalle et translater les variables), alors la décroissance de l'intégrale est donnée par le terme d'ordre 2 dans le développement de Taylor autour de 0, si celui-ci ne s'annule pas.

Observons d'abord le cas $\varphi(x) = x^2$ et $g = 1$, auquel on se ramène par difféomorphisme dans le cas général. Il s'agit de calculer $\int_0^a e^{i\lambda x^2} dx = \int_0^{+\infty} e^{i\lambda x^2} dx + \mathcal{O}(\frac{1}{\lambda})$. On peut par exemple appliquer la formule de Cauchy à la fonction holomorphe $G(z) = e^{i\lambda z^2}$ sur le contour triangulaire délimité par les points 0, R et $R(1+i)$. On obtient

$$\begin{aligned}
\int_0^R e^{i\lambda x^2} dx &= (1+i) \int_0^R e^{i\lambda(1+i)^2 x^2} dx - i \int_0^R e^{i\lambda(M+ix)^2} dx \\
&= (1+i) \int_0^R e^{-2\lambda x^2} dx - i \int_0^R e^{i\lambda(M^2 - x^2) - 2\lambda M x} dx.
\end{aligned}$$

Par convergence dominée, on déduit que

$$\int_0^R e^{i\lambda x^2} dx \xrightarrow{R \to +\infty} (1+i) \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{2\lambda}}.$$

Dans le cas général, si $a = 0$, $\varphi'(0) = 0$ mais $\varphi''(0) \neq 0$ (par exemple si $\varphi''(0) > 0$ quitte à conjuguer), on observe aussi une décroissance en $\frac{1}{\sqrt{\lambda}}$. Pour cela, on écrit $\varphi(x) = \varphi(0) + x^2 \psi(x)$ où ψ est $\mathcal{C}^\infty$. On veut faire le changement de variable $Y(x) = \sqrt{\psi(x)}$. Cette fonction est bien définie au voisinage de 0, de classe $\mathcal{C}^\infty$, vérifie $Y(0) = 0$, et comme $\psi(0) = \frac{\varphi(0)}{2} > 0$, on a $Y'(0) = \sqrt{\psi(0)} > 0$. D'après le théorème d'inversion locale, il existe alors $\delta, \varepsilon > 0$ tels que $Y : x \in [0, \delta] \mapsto x\sqrt{\psi(x)} \in [0, \varepsilon]$ est un $\mathcal{C}^\infty$-difféomorphisme. Grâce à ce changement de variables, en posant $f = g \circ Y^{-1} \times (Y^{-1})'$, on transforme $F(\lambda)$ en

$$F(\lambda) = \int_0^\varepsilon e^{i\lambda y^2} f(y) dy e^{i\lambda\varphi(0)} + \int_\delta^b e^{i\lambda\varphi(x)} g(x) dx.$$

Le deuxième terme est un $\mathcal{O}(\frac{1}{\lambda})$ car la phase n'est stationnaire en aucun point de $[\delta, b]$ par hypothèse.

Pour le premier terme, on effectue un deuxième développement de Taylor de g, ce qui donne $f(y) = f(0) + yh(y)$ pour h de classe $\mathcal{C}^\infty$. De plus, $f(0) = g(0)\sqrt{\frac{2}{\varphi''(0)}}$. On décompose alors

$$F(\lambda) = \int_0^\varepsilon e^{i\lambda y^2} dy f(0) e^{i\lambda\varphi(0)} + \int_0^\varepsilon e^{i\lambda y^2} y h(y) dy e^{i\lambda\varphi(0)} + \mathcal{O}(\frac{1}{\lambda}).$$

Une intégration par parties montre que le deuxième terme est un $\mathcal{O}(\frac{1}{\lambda})$, et l'étude avec $\varphi(x) = x^2$, $g(x) = 1$ conduit à

$$F(\lambda) = (1+i)e^{i\lambda\varphi(0)}\frac{g(0)}{2}\sqrt{\frac{\pi}{\lambda\varphi''(0)}} + \mathcal{O}(\frac{1}{\lambda}).$$

Pour revenir au problème du calcul de $\int_0^\pi e^{iy\cos\theta}g(\theta)d\theta$, on voit que la dérivée de $\theta \mapsto \cos(\theta)$ s'annule en 0 et en π, mais la dérivée seconde ne s'annule pas en ces points donc on obtient bien une décroissance en $\frac{1}{\sqrt{y}}$ lorsque y tend vers $+\infty$.

4. On a vu à la question 1 que

$$u(t,x) = \frac{1}{2}(K(t,x) + K(-t,x)) * u_0 + \frac{1}{2i}(K(t,x) - K(-t,x)) * \mathcal{F}^{-1}\left(\frac{\widehat{u_1}(\xi)}{|\xi|}\right),$$

donc

$$|u(t,x)| \leq \frac{1}{2}(\|K(t,\cdot)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^d)} + \|K(-t,\cdot)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^d)})(\|u_0\|_{L^1(\mathbb{R}^d)} + \|\mathcal{F}^{-1}\left(\frac{\widehat{u_1}}{|\xi|}\right)\|_{L^1(\mathbb{R}^d)}) \lesssim \frac{1}{|t|^{\lfloor\frac{d-2}{2}\rfloor + \frac{1}{2}}}.$$

⋆

Solution 4. *Théorème de Riesz-Fréchet-Kolmogorov*

1. On applique le théorème d'Ascoli. Tout d'abord, $\rho_n * f$ est régulière, et donc $(\rho_n * f)|_{\overline{\Omega\cap B(0,R)}} \in C^0(\overline{\Omega \cap B(0,R)})$. Ensuite,

$$\|\rho_n * f\|_{L^\infty(\mathbb{R}^d)} \leq \|\rho_n\|_{L^{p'}(\mathbb{R}^d)}\|f\|_{L^p(\mathbb{R}^d)} \leq C_n.$$

Ainsi $\mathcal{F}_{n,R}$ est bornée uniformément dans $C^0(\overline{\Omega \cap B(0,R)})$. De plus, pour $x, y \in \overline{\Omega}$,

$$\begin{aligned}
|(\rho_n * f)(x) - (\rho_n * f)(y)| &= \left|\int_{\mathbb{R}^d}(\rho_n(x-z) - \rho_n(y-z))f(z)dz\right| \\
&\leq \left(\int_{B(x,\frac{1}{n})\cup B(y,\frac{1}{n})}|\rho_n(x-z) - \rho_n(y-z)|^{p'}dz\right)^{1/p'}\|f\|_{L^p} \\
&\leq C\left(\int_{B(x,\frac{1}{n})\cup B(y,\frac{1}{n})}\|\nabla\rho_n\|_{C^0(\mathbb{R}^d)}^{p'}|x-y|^{p'}dz\right)^{1/p'} \\
&\leq C'\|\nabla\rho_n\|_{C^0(\mathbb{R}^d)}n^{-d/p'}|x-y| \\
&= C''(n)|x-y|,
\end{aligned}$$

où $C'' = C''(n)$ dépend de n mais pas de f. Donc $\mathcal{F}_{n,R}$ est équicontinue. Par le théorème d'Ascoli, $\mathcal{F}_n$ est relativement compacte dans $C^0(\overline{\Omega \cap B(0,R)})$.

2. En appliquant l'inégalité de Hölder avec la mesure $\rho_n(h)dh$, on a

$$\begin{aligned}
|(\rho_n * f)(x) - f(x)| &= \left|\int_{\mathbb{R}^d}\rho_n(h)(f(x-h) - f(x))dh\right| \\
&\leq \left(\int_{\mathbb{R}^d}|f(x-h) - f(x)|^p\rho_n(h)dh\right)^{1/p}\left(\int_{\mathbb{R}^d}1\cdot\rho_n(h)dh\right)^{p'} \\
&\leq \left(\int_{\mathbb{R}^d}|f(x-h) - f(x)|^p\rho_n(h)dh\right)^{1/p},
\end{aligned}$$

car $\int_{\mathbb{R}^d} \rho_n = 1$. Ainsi, par Fubini,

$$\begin{aligned}
\int_\Omega |(\rho_n * f)(x) - f(x)|^p dx &\leq \int_{x\in\Omega} \int_{h\in\mathbb{R}^d} |f(x-h) - f(x)|^p \rho_n(h) dh dx \\
&= \int_{h\in\mathbb{R}^d} \rho_n(h) \int_{x\in\Omega} |f(x-h) - f(x)|^p dx dh \\
&\leq \int_{h\in B(0,1/n)} \rho_n(h) \|\tau_{-h} f - f\|^p_{L^p(\Omega)} dh.
\end{aligned}$$

Soit $\varepsilon > 0$. On choisit $\delta > 0$ qui convient pour (ii), et $N \geq 1/\delta$. Alors pour $n \geq N$, $h \in B(0, 1/n)$ entraîne que $\|\tau_{-h} f - f\|_{L^p(\Omega)} \leq \varepsilon$, et donc

$$\|\rho_n * f - f\|^p_{L^p(\Omega)} \leq \varepsilon^p \int_{h\in B(0,1/n)} \rho_n(h) dh \leq \varepsilon^p.$$

3. Soit $\varepsilon > 0$. Soit $R > 0$ qui convient pour (iii), et N qui convient pour la question 2. Par la question 1, $\mathcal{F}_{N,R}$ est relativement compacte dans $C^0(\overline{\Omega \cap B(0,R)})$, et donc dans $L^p(\Omega \cap B(0,R))$, comme $\Omega \cap B(0,R)$ est de mesure finie. En particulier, $\mathcal{F}_{N,R}$ est précompacte : on peut recouvrir cet ensemble par un nombre fini k de boules de rayon ε, que l'on note $B((\rho_N * f_1)|_{\overline{\Omega\cap B(0,R)}}, \varepsilon), \dots, B((\rho_N * f_k)|_{\overline{\Omega\cap B(0,R)}}, \varepsilon)$.

Par la question 2 et par (iii), on voit que $\mathcal{F}$ est recouverte par les boules de rayon quintuple : $B(f_1, 5\varepsilon), \dots, B(f_k, 5\varepsilon)$. En effet, si $f \in \mathcal{F}$, par ce qui précède, il existe j tel que $(\rho_N * f)|_{\overline{\Omega\cap B(0,R)}} \in B(\rho_N * f_j, \varepsilon)$, et donc

$$\begin{aligned}
\|f - f_j\|_{L^p(\Omega)} &\leq \|f - f_j\|_{L^p(\Omega\cap B(0,R))} + \|f\|_{L^p(\Omega\setminus B(0,R))} + \|f_j\|_{L^p(\Omega\setminus B(0,R))} \\
&\leq \|f - \rho_N * f\|_{L^p(\Omega\cap B(0,R))} + \|\rho_N * f - \rho_N * f_j\|_{L^p(\Omega\cap B(0,R))} \\
&\quad + \|\rho_N * f_j - f_j\|_{L^p(\Omega\cap B(0,R))} + 2\varepsilon \\
&\leq 5\varepsilon,
\end{aligned}$$

grâce à (iii) puis à la question 2.

Ainsi, $\mathcal{F}$ est précompacte dans $L^p(\Omega)$, donc relativement compacte, car $L^p(\Omega)$ est complet.

4. Par densité des fonctions en escalier et par linéarité de τ_h, il suffit de vérifier la convergence pour des fonctions indicatrices d'intervalles finis $[a, b]$. Mais pour h assez petit, on a alors

$$\|\tau_h \mathbb{1}_{[a,b]} - \mathbb{1}_{[a,b]}\|_{L^p(\mathbb{R}^d)} \leq 2|h|^{\frac{1}{p}},$$

qui tend bien vers 0 quand $|h|$ tend vers 0.

5. Comme $\mathcal{F}$ est relativement compacte, elle est bornée (d'une suite $(f_n)_n$ telle que $\|f_n\| \to +\infty$, on ne peut extraire aucune sous-suite convergente).

D'autre part, supposons que $\mathcal{F}$ ne vérifie pas (ii). Il existe donc une suite $f_n \in \mathcal{F}$, $h_n \in \mathbb{R}^d$ tel que $|h_n| \to 0$ et $\varepsilon > 0$ telle que $\|\tau_{h_n} f_n - f_n\|_{L^p(\Omega)} \geq \varepsilon$. Quitte à extraire, on peut supposer que $f_n \to f$ fortement dans $L^p(\Omega)$. Or on a

$$\tau_{h_n} f - f = (\tau_{h_n} f - \tau_{h_n} f_n) + (\tau_{h_n} f_n - f_n) + (f_n - f).$$

Comme

$$\begin{aligned}
\|\tau_{h_n} f - \tau_{h_n} f_n\|_{L^p(\Omega)} &\leq \|f - f_n\|_{L^p(\Omega)} \to 0, \\
\|\tau_{h_n} f_n - f_n\|_{L^p(\Omega)} &\geq \varepsilon, \\
\|f_n - f\|_{L^p(\Omega)} &\to 0,
\end{aligned}$$

on en déduit que $\liminf_{n\to+\infty} \|\tau_{h_n} f - f\|_{L^p(\Omega)} \geq \varepsilon$, ce qui contredit la question 4.

Enfin, supposons que $\mathcal{F}$ ne vérifie pas (iii). Il existe alors $\varepsilon > 0$ et des suites $f_n \in \mathcal{F}$ et $R_n \to \infty$ telles que $\|f_n\|_{L^p(\Omega\cap B(0,R_n+1)\setminus B(0,R_n))} \geq 2\varepsilon$. Quitte à extraire, on peut supposer que $f_n \to f$ dans $L^p(\Omega)$ fortement : pour $n \geq N$, $\|f_n - f\|_{L^p(\Omega)} < \varepsilon$. Mais alors, on a pour tout $n \geq N$ $\|f\|_{L^p(\Omega\cap B(0,R_n+1)\setminus B(0,R_n))} \geq \varepsilon$. Comme les ensembles en présence sont disjoints, on en déduit que $\|f\|_{L^p(\Omega)} = \infty$, ce qui est absurde.

6. Soit T l'injection de $H^1(\Omega)$ dans $L^2(\Omega)$, et $\mathcal{F} = T(B_{H^1}(0,1)) \subseteq L^2(\Omega)$. Comme Ω est borné, il existe $R > 0$ tel que $\Omega \subset B(0,R)$ et (iii) est vérifié. De plus, on a bien sur $\|f\|_{L^2} \leq \|f\|_{H^1}$ donc $\mathcal{F}$ est L^2-bornée. Enfin,

$$\begin{aligned}
\|\tau_h f - f\|_{L^2(\Omega)}^2 &= \int_\Omega |f(x+h) - f(x)|^2 dx \\
&= \int_\Omega \left| \int_0^1 \nabla f(x+th) \cdot h dt \right|^2 dx \\
&\leq |h|^2 \int_{\mathbb{R}^d} \int_{t=0}^1 |\nabla f(x+th))|^2 dt dx \\
&\leq |h|^2 \underbrace{\|f\|_{H^1}^2}_{\leq 1}.
\end{aligned}$$

Ainsi, $\mathcal{F}$ vérifie (ii).

⋆