Corrigé d'analyse fonctionnelle
TD n° 13

Transformée de Fourier des distributions

Séance du 9 mai 2017

Solution 1. *Échauffement*

Supposons que $-\Delta u = 0$. Alors grâce à la transformée de Fourier, on trouve que $|\xi|^2\hat{u} = 0$ dans $\mathcal{S}'$. En effet, si $T \in \mathcal{S}'$, et $\varphi \in \mathcal{S}$,

$$\langle \mathcal{F}(\Delta T), \varphi\rangle = \langle T, \Delta(\mathcal{F}\varphi)\rangle = \langle T, -|\xi|^2\mathcal{F}\varphi\rangle = -\langle |\xi|^2 T, \mathcal{F}\varphi\rangle.$$

En particulier, on a $\operatorname{supp}\hat{u} = \{0\}$, car si $\varphi \in \mathcal{S}$ est nulle au voisinage de 0,

$$\langle \hat{u}, \varphi\rangle = \langle |\xi|^2\hat{u}, \underbrace{\frac{\varphi}{|\xi|^2}}_{\in\mathcal{S}}\rangle = 0.$$

On a vu (cf. TD 11) qu'alors $\hat{u}$ s'écrit comme une combinaison linéaire (finie) de δ_0 et de ses dérivées. Écrivons donc $\hat{u} = \sum_{|k|\leq K}\lambda_k\delta_0^{(k)}$. Or $\mathcal{F}^{-1}(\delta_0) = \mathbb{1}$, la fonction constante, car $\langle \mathcal{F}(\mathbb{1}), \varphi\rangle = \langle \mathbb{1}, \mathcal{F}(\varphi)\rangle = \int_{\mathbb{R}^d}\hat{\varphi}(\xi)d\xi = \varphi(0)$, d'après la formule d'inversion pour les fonctions de $\mathcal{S}$. Par ailleurs, pour tout $k \in \mathbb{N}^d$,

$$\mathcal{F}^{-1}(\delta_0^{(k)}) = (-ix)^k\mathcal{F}^{-1}(\delta_0),$$

ce qui prouve que $u = \mathcal{F}^{-1}(\hat{u})$ est un polynôme en $x \in \mathbb{R}^d$.

⋆

Solution 2. *Théorème de Paley-Wiener*

1. Si T est une distribution à support compact, on peut écrire, d'après le cours,

$$\mathcal{F}(T)(\xi) = \langle T, e^{-ix\xi}\rangle, \quad \xi \in \mathbb{R}.$$

Comme pour tout $\xi \in \mathbb{C}$, la fonction $x \mapsto ixe^{-ix\xi}$ est toujours $\mathcal{C}^\infty$, on peut « dériver sous le crochet de dualité » (ce qui se justifie en régularisant T), et obtenir que $\mathcal{F}(T)$ est analytique (avec la même formule que ci-dessus, étendue à $\mathbb{C}$).

2. Pour $\xi \neq 0$, on a

$$F(\xi) = \int_{\mathbb{R}} e^{-ix\xi}f(x)dx = \int_{\mathbb{R}}\frac{1}{(-i\xi)^N}e^{-ix\xi}\partial_x^N f(x)dx,$$

donc $|F(x)| \leq C_N|\xi|^{-N}e^{R|\operatorname{Im}(\xi)|}$, car $\partial_x^N f$ est bornée sur $B(0,R)$.

3. La borne sur F permet d'utiliser le théorème de convergence dominée pour conclure.

4. On intègre $e^{ix\xi}F(\xi)$ sur un contour rectangulaire

$$\int_{-A}^{A} e^{ix\xi}F(\xi)d\xi + \int_0^\eta e^{ix(A+i\rho)}F(A+i\rho)d\rho + \int_A^{-A} e^{ix(\xi+i\eta)}F(\xi+i\eta)d\xi + \int_\eta^0 e^{ix(-A+i\rho)}F(-A+i\rho)d\rho = 0.$$

En passant à la limite quand A tend vers ∞, grâce aux bornes sur F, on obtient

$$f(x) = \int_{\mathbb{R}} e^{ix(\xi+i\eta)} F(\xi + i\eta) d\xi.$$

donc $|f(x)| \leq Ce^{R|\eta|-x\eta}$.

5. Si on choisit $\eta > 0$ qui tend vers $+\infty$, alors pour $R < x$, on obtient $f(x) = 0$. On fait de même pour $x < -R$ avec $\eta < 0$.

6. Soit T est une distribution à support compact, on note p son ordre (qui est fini), et $[-R, R]$ son support. Alors

$$|\mathcal{F}(T)(\xi)| = |\langle T, e^{-ix\xi}\rangle| \leq C \sum_{k=1}^{p} \|\partial_x^k e^{-ix\xi}\|_{L^\infty} \leq C(1 + |\xi|)^p e^{R|\operatorname{Im}\xi|}.$$

Réciproquement, soit F une fonction analytique qui satisfait une telle condition. Alors $F \in \mathcal{S}'$ (car à croissance modérée sur $\mathbb{R}$). Soit $\rho_k(x) = k\rho(kx)$ une approximation de l'unité (où $\rho \in \mathcal{C}_c^\infty$ est positive, paire et d'intégrale 1). Comme ρ_k est à support compact, $\widehat{\rho_k}$ satisfait les conditions de la question 2, donc $\widehat{\rho_k}F$ aussi, donc $\rho_k * \mathcal{F}^{-1}(F)$ est $\mathcal{C}^\infty$ à support dans $B(0, R + \frac{1}{k})$. Soit g une fonction $\mathcal{C}^\infty$ à support dans le complémentaire de $\bar{B}(0, R)$. On a alors, pour k assez grand,

$$0 = \langle \rho_k * \mathcal{F}^{-1}(F), g\rangle = \langle \mathcal{F}^{-1}(F), \rho_k * g\rangle \longrightarrow \langle \mathcal{F}^{-1}(F), g\rangle,$$

donc $\mathcal{F}^{-1}(F)$ est à support dans $B(0, R)$.

$\star$

Solution 3. *Fonctions à support dans un même compact*

1. La fonction u définit une distribution à support compact, et donc, par un théorème du cours, sa transformée de Fourier est donnée par la formule

$$\hat{u}(\xi) = \langle u, e^{-ix\xi}\rangle = \int_{x\in K} u(x) e^{ix\xi} dx, \qquad (\star)$$

pour $\xi \in \mathbb{R}$. Par Cauchy-Schwarz, on a $|\hat{u}(\xi)| \leq \|u\|_{L^2} \cdot |K|^{1/2}$ pour ξ réel, donc $\hat{u}$ est bornée sur $\mathbb{R}$. D'autre part, la formule $(\star)$ reste bien définie pour $\xi \in \mathbb{C}$ (puisqu'on intègre sur K compact), et par le théorème de convergence dominée, définit une fonction holomorphe en ξ.

2. $u_n \rightharpoonup 0$ donc, pour tout $\xi \in \mathbb{R}$,

$$\widehat{u_n}(\xi) = \int_{\mathbb{R}} u_n(x) e^{-ix\xi} dx = \int_{\mathbb{R}} u_n(x) \underbrace{\mathbb{1}_K(x) e^{-ix\xi}}_{\in L^2(\mathbb{R})} dx \overset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

3. Soit $\tilde{K}$ un compact de $\mathbb{C}$, et Ω un ouvert borné qui contient $\tilde{K}$. Alors, $\forall \xi \in \Omega$, $|\widehat{u_n}(\xi)| \leq \|u_n\|_{L^2} \|\mathbb{1}_K(x) e^{-ix\xi}\|_{L^2}$. Observons d'abord que $\|u_n\|_{L^2}$ est bornée uniformément en n, d'après le théorème de Banach-Steinhaus. Ensuite, une majoration brutale garantit que

$$\|\mathbb{1}_K(x) e^{-ix\xi}\|_{L^2} \leq |K|^{1/2} \exp\left(|\Im\xi| \cdot \max_{x\in K} |x|\right) \leq C_\Omega,$$

comme Ω est borné. Les hypothèses du théorème de Montel sont donc satisfaites, donc la suite $\{\widehat{u_n}|_{\tilde{K}}\}$ est relativement compacte dans $\mathcal{C}^0(\tilde{K})$. Or, sa seule valeur d'adhérence possible est 0, d'après la question 2. Donc $\widehat{u_n}$ converge uniformément vers 0 sur $\tilde{K}$.

4. Comme L^2_K est *réflexif*, il suffit de montrer que $\mathcal{F}$ transforme toute suite faiblement convergente dans L^2_K en suite fortement convergente dans L^∞_{loc}. Si $u_n \rightharpoonup u$ dans L^2_K, alors $u_n - u \rightharpoonup 0$, donc $\mathcal{F}(u_n - u) = \mathcal{F}(u_n) - \mathcal{F}(u)$ tend uniformément vers 0 sur les compacts de $\mathbb{R}$.

$\star$

Solution 4. *Théorème de Riesz-Fréchet-Kolmogorov*

1. On applique le théorème d'Ascoli. Tout d'abord, $\rho_n * f$ est régulière, et donc $(\rho_n * f)|_{\overline{\Omega \cap B(0,R)}} \in C^0(\overline{\Omega \cap B(0,R)})$. Ensuite,

$$\|\rho_n * f\|_{L^\infty} \leq \|\rho_n\|_{L^{p'}} \|f\|_{L^p} \leq C_n.$$

Ainsi $\mathcal{F}_{n,R}$ est bornée uniformément (en f) dans $C^0(\overline{\Omega \cap B(0,R)})$. De plus, pour $x, y \in \overline{\Omega}$,

$$\begin{aligned}
|(\rho_n * f)(x) - \rho_n * f(y)| &= \left| \int_{\mathbb{R}^d} (\rho_n(x-z) - \rho_n(y-z)) f(z) dz \right| \\
&\leq \left(\int_{B(x,\frac{1}{n}) \cup B(y,\frac{1}{n})} |\rho_n(x-z) - \rho_n(y-z)|^{p'} dz \right)^{1/p'} \|f\|_{L^p} \\
&\leq C \left(\int_{B(x,\frac{1}{n}) \cup B(y,\frac{1}{n})} \|\nabla \rho_n\|^{p'}_{C^0(\mathbb{R}^n)} |x-y|^{p'} dz \right)^{1/p'} \\
&\leq C \|\nabla \rho_n\|_{C^0(\mathbb{R}^n)} n^{d/p'} |x-y| \leq C'_n |x-y|,
\end{aligned}$$

où C'_n dépend de n mais pas de f. Donc $\mathcal{F}_{n,R}$ est équicontinue. Par le théorème d'Ascoli, $\mathcal{F}_n$ est relativement compacte dans $C^0(\overline{\Omega \cap B(0,R)})$.

2. En appliquant l'inégalité de Hölder avec la mesure $\rho_n(h)dh$, on a

$$\begin{aligned}
|(\rho_n * f)(x) - f(x)| &= \left| \int_{\mathbb{R}^d} \rho_n(h)(f(x-h) - f(x)) dh \right| \\
&\leq \left(\int_{\mathbb{R}^d} |f(x-h) - f(x)|^p \rho_n(h) dh \right)^{1/p} \left(\int_{\mathbb{R}^d} 1 \cdot \rho_n(h) dh \right)^{p'} \\
&\leq \left(\int_{\mathbb{R}^d} |f(x-h) - f(x)|^p \rho_n(h) dh \right)^{1/p},
\end{aligned}$$

car $\int_{\mathbb{R}^d} \rho_n = 1$. Ainsi, par Fubini,

$$\begin{aligned}
\int_\Omega |(\rho_n * f)(x) - f(x)|^p dx &\leq \int_{x \in \Omega} \int_h |f(x-h) - f(x)|^p \rho_n(h) dh dx \\
&= \int_h \rho_n(h) \int_{x \in \Omega} |f(x-h) - f(x)|^p dx dh \\
&\leq \int_{h \in B(0,1/n)} \rho_n(h) \|\tau_h f - f\|^p_{L^p(\Omega)} dh.
\end{aligned}$$

Soit donc $\delta > 0$ qui convient pour (ii), et $N \geq 1/\delta$. Alors $h \in B(0,1/n)$ entraîne que $\|\tau_h f - f\|_{L^p(\Omega)} \leq \varepsilon$, et donc

$$\|\rho_n * f - f\|^p_{L^p(\Omega)} \leq \varepsilon^p \int_{h \in B(0,1/n)} \rho_n(h) dh \leq \varepsilon^p.$$

3. Soit $\varepsilon > 0$. Soit $R > 0$ qui convient pour (iii), et N qui convient pour la question 2. Par la question 1, $\mathcal{F}_{N,R}$ est relativement compacte dans $C^0(\overline{\Omega \cap B(0,R)})$, et donc dans

$L^p(\Omega \cap B(0,R))$, comme $\Omega \cap B(0,R)$ est de mesure finie. En particulier, $\mathcal{F}_{N,R}$ est précompacte : on peut recouvrir cet ensemble par un nombre fini k de boules de rayon ε, que l'on note $B((\rho_N * f_1)|_{\overline{\Omega \cap B(0,R)}}, \varepsilon), \ldots, B((\rho_N * f_k)|_{\overline{\Omega \cap B(0,R)}}, \varepsilon)$.

Par la question 2 et par (iii), on voit que $\mathcal{F}$ est recouverte par les boules de rayon quintuple : $B(f_1, 5\varepsilon), \ldots, B(f_k, 5\varepsilon)$. En effet, si $f \in \mathcal{F}$, par ce qui précède, il existe j tel que est telle que $(\rho_N * f)|_{\overline{\Omega \cap B(0,R)}} \in B(\rho_N * f_j, \varepsilon)$, et donc

$$\begin{aligned}
\|f - f_j\|_{L^p} &\leq \|f - f_j\|_{L^p(\Omega \cap B(0,R))} + \|f\|_{L^p(\Omega \setminus B(0,R))} + \|f_j\|_{L^p(\Omega \setminus B(0,R))} \\
&\leq \|f - \rho_N * f\|_{L^p(\Omega \cap B(0,R))} + \|\rho_N * f - \rho_N * f_i\|_{L^p(\Omega \cap B(0,R))} \\
&\quad + \|\rho_N * f_i - f_i\|_{L^p(\Omega \cap B(0,R))} + \|f\|_{L^p(\Omega \setminus B(0,R))} + \|f_i\|_{L^p(\Omega \setminus B(0,R))} \\
&\leq 5\varepsilon,
\end{aligned}$$

puisque $\forall g \in L^p$, $\|\rho_N * g\|_{L^p} \leq \|\rho_N\|_{L^1} \|g\|_{L^p} = \|g\|_{L^p}$ (pour le montrer, on applique également Hölder dans la définition de $|\rho_N * g(x)|$, avec la mesure $\rho_N(y)dy$, comme ci-dessus).

Ainsi, $\mathcal{F}$ est précompacte dans $L^p(\Omega)$, donc relativement compacte, car $L^p(\Omega)$ est complet.

4. $f \in \mathcal{C}_c^0(\mathbb{R}^d)$ est uniformément continue (car à support compact). Cela signifie exactement que

$$\lim_{h \to 0} \sup_{x \in \mathbb{R}^d} |f(x+h) - f(x)| = 0,$$

qui est le résultat demandé.

5. Soit $\varepsilon > 0$, il existe $g \in \mathcal{C}_c^0(\mathbb{R}^d)$, tel que $\|f - g\|_{L^p} < \varepsilon$. Le support de g est inclu dans $B(0,R)$. Soit alors $\delta \in]0,1[$ tel que si $|h| < \delta$, $\|g - \tau_h g\|_{\mathcal{C}^0(\mathbb{R}^d)} \leq \varepsilon / (1+R)^{d/p}$.

Alors, comme $\mathrm{supp}(g - \tau_h g) \subset B(0, R+1)$, on a

$$\|g - \tau_h g\|_{L^p} \leq \|g - \tau_h g\|_{\mathcal{C}^0(\mathbb{R}^d)} \left(\int_{\mathbb{R}^d} \mathbb{1}_{x \in B(0,R+1)} dx \right)^{1/p} \leq \frac{\varepsilon}{(1+R)^{d/p}} (1+R)^{d/p} \leq \varepsilon.$$

Enfin, $\|\tau_h f - \tau_h g\|_{L^p} = \|f - g\|_{L^p} < \varepsilon$. Ainsi, si $|h| < \delta$,

$$\|\tau_h f - f\|_{L^p} \leq \|\tau_h f - \tau_h g\|_{L^p} + \|\tau_h g - g\|_{L^p} + \|g - f\|_{L^p} \leq 3\varepsilon.$$

6. Comme $\mathcal{F}$ est relativement compacte, elle est bornée (d'une suite f_n telle que $\|f_n\| \to \infty$, on ne peut extraire aucune sous-suite convergente).

D'autre part, supposons que $\mathcal{F}$ ne vérifie pas (ii). Il existe donc une suite $f_n \in \mathcal{F}$, $h_n \in \mathbb{R}^d$ tel que $|h_n| \to 0$ et $\varepsilon > 0$ telle que $\|\tau_{h_n} f_n - f_n\|_{L^p(\Omega)} \geq \varepsilon$. Quitte à extraire, on peut supposer que $f_n \to f$ fortement dans $L^p(\Omega)$. Or on a

$$\tau_{h_n} f - f = (\tau_{h_n} f - \tau_{h_n} f_n) + (\tau_{h_n} f_n - f_n) + (f_n - f).$$

Comme

$$\begin{aligned}
\|\tau_{h_n} f - \tau_{h_n} f_n\|_{L^p(\Omega)} &= \|f - f_n\|_{L^p(\Omega)} \to 0, \\
\|\tau_{h_n} f_n - f_n\|_{L^p(\Omega)} &\geq \varepsilon, \\
\|f_n - f\|_{L^p(\Omega)} &\to 0,
\end{aligned}$$

on en déduit que $\liminf \|\tau_{h_n} f - f\|_{L^p(\Omega)} \geq \varepsilon$, ce qui contredit 5.

Enfin, supposons que $\mathcal{F}$ ne vérifie pas (iii). Il existe alors $\varepsilon > 0$ et des suites $f_n \in \mathcal{F}$ et $R_n \to \infty$ telles que $\|f_n\|_{L^p(\Omega \cap B(0,R_n+1) \setminus B(0,R_n))} \geq 2\varepsilon$. Quitte à extraire, on peut supposer que $f_n \to f$ dans $L^p(\Omega)$ fortement : pour $n \geq N$, $\|f_n - f\|_{L^p(\Omega)} < \varepsilon$. Mais alors, on a pour tout $n \geq N$ $\|f\|_{L^p(\Omega \cap B(0,R_n+1) \setminus B(0,R_n)} \geq \varepsilon$. Comme les ensembles en présence sont disjoints, on en déduit que $\|f\|_{L^p(\Omega)} = \infty$, ce qui est absurde.

7. Soit T l'injection de $H^1(\Omega)$ dans $L^2(\Omega)$, et $\mathcal{F} = T(B_{H^1}(0,1)) \subseteq L^2(\Omega)$. Soit φ une fonction régulière qui vaut 1 dans un voisinage de Ω. Comme φ est à support compact, $T(f) = \varphi f$ est à support dans ce même compact ($\forall f \in B_{H^1}$) et (iii) est vérifié. De plus, on a bien sur $\|\varphi f\|_{L^2} \leq \|\varphi\|_{L^\infty} \|f\|_{L^2} \leq C\|f\|_{H^1}$ donc $\mathcal{F}$ est L^2-bornée. Enfin,

$$\begin{aligned}
\|\tau_h(\varphi f) - \varphi f\|_{L^2}^2 &= \int_{\mathbb{R}^d} |\varphi(x+h)f(x+h) - \varphi(x)f(x)|^2 dx \\
&= \int_{\mathbb{R}^d} \left| \int_0^1 \nabla(\varphi(x+th)f(x+th)) \cdot h dt \right|^2 dx \\
&\leq |h|^2 \int_{\mathbb{R}^d} \int_{t=0}^1 |\nabla(\varphi(x+th)f(x+th))|^2 dt dx \\
&\leq C|h|^2 \int_0^1 \int_{\mathbb{R}^d} |\varphi(x+th)\nabla f(x+th)|^2 + |f(x+th)\nabla\varphi(x+th)|^2 dx dt \\
&\leq C|h|^2 \|\varphi\|_{C^1}^2 \underbrace{\|f\|_{H^1}^2}_{\leq 1}.
\end{aligned}$$

Ainsi, $\mathcal{F}$ vérifie (ii).

⋆